

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

**М. И. СКАНАВИ**

**ПОЛНЫЙ  
СБОРНИК РЕШЕНИЙ  
ЗАДАЧ**

**ПО МАТЕМАТИКЕ**

**ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ  
В ВУЗЫ**

**ГРУППА Б**

**ПОЛНЫЙ**  
**СБОРНИК РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ**  
**ПО МАТЕМАТИКЕ**  
**для поступающих в вузы**

**ГРУППА Б**

Под редакцией  
*М. И. Сканава*

Москва  
Мир и Образование  
Астрель

УДК 51(076.1)  
ББК 22.11  
П51

*Все права защищены.  
Перепечатка отдельных глав и произведения в целом  
без письменного разрешения владельцев прав запрещена.*

**П51 Полный сборник решений задач по математике для поступающих в вузы. Группа Б / Под ред. М. И. Сканави. — М.: ООО «Издательство «Мир и Образование»: ООО «Издательство Астрель», 2012. — 1232 с.: ил.**

ISBN 978-5-94666-640-4 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

ISBN 978-5-271-37257-5 (ООО «Издательство Астрель»)

В помощь абитуриентам публикуется полный сборник задач по математике с решениями под редакцией М. И. Сканави по всем группам сложности.

Условия и нумерация всех задач полностью соответствуют изданию «Сборник задач по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави, 6-е издание (М.: Оникс, Мир и Образование).

Пособия помогут при подготовке к выпускным экзаменам в средней школе, сдаче ЕГЭ и вступительным экзаменам в вуз. Книги адресованы школьникам старших классов, абитуриентам, репетиторам и преподавателям.

**УДК 51(076.1)**

**ББК 22.11**

ISBN 978-5-94666-640-4

(ООО «Издательство «Мир и Образование»)

ISBN 978-5-271-37257-5

(ООО «Издательство Астрель»)

ISBN 978-985-18-0105-9 (ООО «Харвест»)

© Суходский А. М., Маслова Т. Н., 2011

© Ничкова Н. Б., Фохт О. Б., наследники, 2011

© ООО «Издательство «Мир и Образование», 2011

© Оформление переплета. ООО «Харвест», 2011

# ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

## ПОНЯТИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ. ТОЖДЕСТВО И ТОЖДЕСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

*Алгебраическим выражением* называется совокупность конечного количества чисел, обозначенных буквами или цифрами, соединенных между собой знаками алгебраических действий и знаками последовательности этих действий (скобками).

Алгебраическое выражение, в котором указаны только действия сложения, вычитания, умножения и возведения в степень с натуральным показателем, называют *целым рациональным выражением*. Если кроме указанных действий, входит действие деления, то выражение называют *дробно-рациональным*.

Целые рациональные и дробно-рациональные выражения вместе называются *рациональными*. Если входит еще и действие извлечения корня, то такое выражение называют *иррациональным*.

*Числовым значением* алгебраического выражения при заданных числовых значениях букв называют тот результат, который получится после замены букв их числовыми значениями и выполнения указанных в выражении действий.

*Областью допустимых значений* (ОДЗ) алгебраического выражения называют множество всех допустимых совокупностей значений букв, входящих в это выражение.

### Действия над степенями

Действия над степенями производятся по нижеследующим правилам:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (2.1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; \quad (2.2)$$

$$(a^n)^m = a^{mn}; \quad (2.3)$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (2.5)$$

## Одночлен

*Одночленом* называется алгебраическое выражение, в котором числа и буквы связаны только двумя действиями — умножением и возведением в натуральную степень.

*Многочленом* называется алгебраическая сумма нескольких одночленов.

Одночлены, из которых состоит многочлен, называются его членами. Одночлен есть частный случай многочлена.

## Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (2.6)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (2.7)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (2.8)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \quad (2.9)$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2; \quad (2.10)$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3; \quad (2.11)$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3; \quad (2.12)$$

$$(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4; \quad (2.13)$$

$$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5; \quad (2.14)$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = a^5 + b^5; \quad (2.15)$$

$$(a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + a^5) = a^6 - b^6; \quad (2.16)$$

$$(a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6) = a^7 - b^7; \quad (2.17)$$

$$(a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) = a^7 + b^7; \quad (2.18)$$

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \dots + b^{n-1}) = a^n - b^n, \quad (2.19)$$

где  $n$  — любое целое число;

$$(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \dots + b^{n-1}) = a^n + b^n, \quad (2.20)$$

где  $n = 2k + 1$ ,  $k$  — натуральное число;

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc; \quad (2.21)$$

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc; \quad (2.22)$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd; \quad (2.23)$$

$$(a+b-c-d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd + 2cd; \quad (2.24)$$

$$a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 + bx + c, \quad (2.25)$$

где  $x_1, x_2$  — корни квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$ .

Формулы (2.16) — (2.24) остаются верными, если вместо одночленов  $a, b, c, d$  подставить любые выражения.

Многочлен  $P_n(x)$  относительно переменной  $x$  вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_0,$$

где  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  — действительные числа и  $a_0 \neq 0$ , называется *многочленом, расположенным по убывающим степеням  $x$* , или *многочленом, представленным в каноническом виде*.

Числа  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  называются его коэффициентами, одночлен  $a_0x^n$  — его старшим членом,  $a_0$  — свободным членом, число  $n$  — степенью многочлена ( $n$  — натуральное число).

Корнями многочлена  $P_n(x)$  будем называть такие значения переменной  $x$ , при которых многочлен  $P_n(x)$  превращается в нуль.

Разделить многочлен  $P_n(x)$  на многочлен  $Q_m(x)$  ( $m \leq n$ ) значит найти

два таких многочлена  $S_{n-m}(x)$  и  $R_k(x)$ , чтобы  $P_n(x) = Q_m(x)S_{n-m}(x) + R_k(x)$  и степень многочлена  $R_k(x)$  была меньше степени делителя  $Q_m(x)$ , т.е.  $k < m$ . При этом многочлен  $S_{n-m}(x)$  называют частным, а многочлен  $R_k(x)$  — остатком.

Для любых двух многочленов  $P_n(x)$  и  $Q_m(x)$  ( $m \leq n$  и  $Q_m(x) \neq 0$ ) всегда найдется, и притом единственная пара многочленов  $S_{n-m}(x)$  и  $R_k(x)$ , удовлетворяющая тождеству

$$P_n(x) = Q_m(x)S_{n-m}(x) + R_k(x) \quad (k < m),$$

т.е. если делитель не нуль — многочлен, то действие деления многочленов всегда выполнимо.

**Теорема Безу.** Если многочлен  $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$  разделить на двучлен  $x - a$ , то в остатке получим число  $R$ , равное значению данного многочлена при  $x = a$ , т.е.  $R = P_n(a)$ .

**Схема сокращенного деления многочлена на двучлен.** При делении многочлена  $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$ , расположенного по убывающим степеням  $x$ , на двучлен  $x - a$  применяется метод сокращенного деления, называемый *схемой Горнера*.

Имеют место следующие формулы для нахождения коэффициентов частного  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  и остатка  $R$ :

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + aa_0, \\ b_2 &= a_2 + ab_1, \\ &\dots\dots\dots \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + ab_{n-2}, \\ R &= a_n + ab_{n-1}. \end{aligned}$$

Практически вычисление коэффициентов частного  $Q_{n-1}(x)$  и остатка  $R$  проводится по следующей схеме (схеме Горнера).

Пусть требуется разделить многочлен  $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$  на двучлен  $x - a$ .

Значение  $a$  двучлена, коэффициенты многочлена ( $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$ ) и остаток запишем в следующей форме:

|                 |                                       |                                       |     |                    |                  |
|-----------------|---------------------------------------|---------------------------------------|-----|--------------------|------------------|
| $a_n$           | $a_{n-1}$                             | $a_{n-2}$                             | ... | $a_1$              | $a_0$            |
| $b_{n-1} = a_n$ | $b_{n-2} = a_{n-1} +$<br>$+ ab_{n-1}$ | $b_{n-3} = a_{n-2} +$<br>$+ ab_{n-2}$ | ... | $b_0 = a_1 + ab_1$ | $R = a_0 + ab_0$ |

Отсюда записываем частное

$$Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0,$$

если  $R = 0$ , и результат деления

$$P_n(x) : (x-a) \equiv Q_{n-1}(x) + \frac{R}{x-a} \quad \text{или} \quad P_n(x) \equiv (x-a)Q_{n-1}(x) + R,$$

если  $R \neq 0$ .

## Понятие корня. Основные свойства корня

Алгебраические выражения, содержащие операцию извлечения корня, называются *иррациональными*.

Корнем  $n$ -й степени из числа  $a$  называется такое число  $b$ ,  $n$ -я степень которого равна  $a$  ( $n \geq 2$ ). Обозначается  $\sqrt[n]{a}$ , где  $a$  — подкоренное выражение (или число),  $n$  — показатель корня ( $n \geq 2; n \in N$ ).

По определению  $\sqrt[n]{a} = b$ , если  $b^n = a$ , или  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ .

### Основные свойства корня

Если корни рассматривать в множестве действительных чисел, то:

а) корень четной степени из положительного числа имеет два значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку;

б) корень четной степени из отрицательного числа в множестве действительных чисел не существует;

в) корень нечетной степени из положительного числа имеет только одно действительное значение, которое положительно;

г) корень нечетной степени из отрицательного числа имеет только одно действительное значение, которое отрицательно;

д) корень любой натуральной степени из нуля равен нулю.

Действие, посредством которого отыскивается корень  $n$ -й степени



из данного числа  $a$ , называется извлечением корня  $n$ -й степени из числа  $a$ , а результат извлечения корня в виде  $\sqrt[n]{a}$  называют *радикалом*.

Таким образом, множество действительных чисел не замкнуто относительно извлечения корня четной степени, а результат этого действия (корень) не однозначен.

Заметим, что множество действительных чисел замкнуто относительно извлечения корня нечетной степени, а результат этого действия однозначен.

### Арифметический корень и его свойства

*Арифметическим значением корня* или арифметическим корнем степени  $n$  ( $n \geq 2; n \in N$ ) из положительного числа  $a$  называется положительное значение корня. Корень из нуля, равный нулю, также будет называться арифметическим корнем, т.е.  $\sqrt[n]{a} = b$  есть арифметический корень, где  $a \geq 0, b \geq 0$  и  $b^n = a$ .

Множество неотрицательных действительных чисел замкнуто относительно извлечения арифметического корня, а результат этого действия однозначен. Это значит, что для любого неотрицательного числа  $a$  и натурального числа  $n$  ( $n > 1$ ) всегда найдется, и при том только одно, такое неотрицательное число  $b$ , что  $b^n = a$ .

### Правила действий над корнями

Для любых действительных чисел  $a, b$  и  $c$  и натуральных  $n$  и  $k$  имеют место следующие правила действий над корнями:

$$\sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b} \cdot \sqrt[2n+1]{c} = \sqrt[2n+1]{abc}, \quad (2.26)$$

$$\sqrt[2n+1]{abc} = \sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b} \cdot \sqrt[2n+1]{c}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{a}} = \sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0), \quad (2.28)$$

$$\sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}} \quad (b \neq 0), \quad (2.29)$$

$$\left(2n+\sqrt{a}\right)^k = 2n+\sqrt{a^k}, \quad (2.30)$$

$$2n+\sqrt{a^k} = \left(2n+\sqrt{a}\right)^k, \quad (2.31)$$

$$2m+\sqrt{2n+\sqrt{a}} = (2m+1)(2n+1)\sqrt{a}, \quad (2.32)$$

$$(2m+1)(2n+1)\sqrt{a} = 2m+\sqrt{2n+\sqrt{a}}; \quad (2.33)$$

$${}^{2n}\sqrt{a} \cdot {}^{2n}\sqrt{b} \cdot {}^{2n}\sqrt{c} = {}^{2n}\sqrt{abc} \quad (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0), \quad (2.34)$$

$${}^{2n}\sqrt{abc} = {}^{2n}\sqrt{|a|} \cdot {}^{2n}\sqrt{|b|} \cdot {}^{2n}\sqrt{|c|} \quad (abc \geq 0), \quad (2.35)$$

$$\frac{{}^{2n}\sqrt{a}}{{}^{2n}\sqrt{b}} = {}^{2n}\sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0), \quad (2.36)$$

$$\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \frac{{}^{2n}\sqrt{|a|}}{{}^{2n}\sqrt{|b|}} \left( \frac{a}{b} \geq 0, b \neq 0 \right), \quad (2.37)$$

$${}^{2n}\sqrt{k}\sqrt{a} = {}^{2nk}\sqrt{a} \quad (a \geq 0), \quad (2.38)$$

$${}^{2nk}\sqrt{a} = {}^{2n}\sqrt{k}\sqrt{a} \quad (a \geq 0), \quad (2.39)$$

$$\left({}^{2n}\sqrt{a}\right)^k = {}^{2n}\sqrt{a^k} \quad (a \geq 0), \quad (2.40)$$

$${}^{2n}\sqrt{a^{2k}} = \left({}^{2n}\sqrt{|a|}\right)^{2k} \quad (a \text{ — любое действительное число}). \quad (2.41)$$

Во множестве действительных чисел рассматриваются корни нечетной степени из любых действительных чисел и корни четной степени из неотрицательных чисел, причем берутся арифметические значения корней.

Замена дробного выражения, у которого числитель или знаменатель (или оба) иррациональны, тождественно равным ему выражением с рациональным числителем (знаменателем) называется исключением иррациональности из числителя (знаменателя) дробного выражения.

При исключении иррациональности из числителя (знаменателя) дробного выражения числитель и знаменатель этого выражения умножают на множитель, сопряженный с числителем (знаменателем).

Сопряженным множителем относительно иррационального выражения  $A$  называют всякое не равное тождественно нулю выражение  $B$ , которое в произведении с  $A$  не содержит знака корня, т.е.  $AB$  рационально.

Рассмотрим основные случаи исключения иррациональности из знаменателей дробных выражений (аналогично выполняется исключение иррациональности из числителей):

1. Дроби вида  $\frac{A}{\sqrt[n]{a^k}}$ , где  $n > k, a > 0, A$  — некоторое выражение; в качестве множителя, сопряженного со знаменателем, можно взять  $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ , так как  $\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}} = a$ .

Умножив числитель и знаменатель этой дроби на  $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ , получим

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a^k}} = \frac{A \sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}}} = \frac{A \sqrt[n]{a^{n-k}}}{a} \quad (a > 0).$$

2. Дроби вида  $\frac{A}{\sqrt{a \pm \sqrt{b}}}$ .

Выражения  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$  и  $\sqrt{a - \sqrt{b}}$  взаимно сопряженные, так как  $(\sqrt{a + \sqrt{b}})(\sqrt{a - \sqrt{b}}) = a - b$ , поэтому

$$\frac{A}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} = \frac{A(\sqrt{a - \sqrt{b}})}{(\sqrt{a + \sqrt{b}})(\sqrt{a - \sqrt{b}})} = \frac{A(\sqrt{a - \sqrt{b}})}{a - b} \quad \text{при } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b;$$

$$\frac{A}{\sqrt{a + \sqrt{b}}} = \frac{A\sqrt{a}}{2a} = \frac{A\sqrt{b}}{2b}, \quad \text{если } a > 0, a = b;$$

$$\frac{A}{\sqrt{a - \sqrt{b}}} = \frac{A(\sqrt{a + \sqrt{b}})}{(\sqrt{a - \sqrt{b}})(\sqrt{a + \sqrt{b}})} = \frac{A(\sqrt{a + \sqrt{b}})}{a - b} \quad \text{при } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b.$$

3. Дроби вида  $\frac{A}{\sqrt[3]{a \pm \sqrt[3]{b}}}$  и  $\frac{A}{\sqrt[3]{a^2 \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}}$ .

Выражения  $\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{b}}$  и  $\sqrt[3]{a^2 - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$ , а также  $\sqrt[3]{a - \sqrt[3]{b}}$  и  $\sqrt[3]{a^2 + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$  взаимно сопряжены, так как их произведения  $(a + b)$  и  $(a - b)$  рациональны. Поэтому исключить иррациональность из знаменателей указанных дробей можно следующим образом:

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{A\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)} = \frac{A\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b},$$

где  $a$  и  $b$  — любые действительные числа, причем  $a+b \neq 0$ .

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{A\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)} = \frac{A\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b},$$

где  $a$  и  $b$  — любые действительные числа, причем  $a \neq b$ .

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{A\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)} = \frac{A\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)}{a+b};$$

где  $a$  и  $b$  — любые действительные числа, причем  $a+b \neq 0$ .

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{A\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)} = \frac{A\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)}{a-b},$$

где  $a$  и  $b$  — любые действительные числа, причем  $a \neq b$ .

4. Дроби вида  $\frac{A}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$  и  $\frac{A}{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}$ .

Для выражения  $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$  сопряженный множитель можно определить из тождества

$$(x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right) = x^n - y^n.$$

Если принять  $x = \sqrt[n]{a}$ ,  $y = \sqrt[n]{b}$ , то получим

$$\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a - b.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} = \frac{A\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{a-b},$$

где  $a \neq b$  ( $a \geq 0, b \geq 0$ , если  $n$  — четное;  $a, b$  — любые действительные числа, если  $n$  — нечетное).

Для выражения  $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$  сопряженный множитель можно определить из тождества

$$(x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + x(-y)^{n-2} + (-y)^{n-1}) = x^n + (-1)^n y^n.$$

Если принять  $x = \sqrt[n]{a}, y = \sqrt[n]{b}$ , то

$$(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}) \left( \sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + (-1)^{n-2} \sqrt[n]{ab^{n-2}} + (-1)^{n-1} \sqrt[n]{b^{n-1}} \right) = a + (-1)^{n-1} b.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[2k]{a} + \sqrt[2k]{b}} = \frac{A \left( \sqrt[2k]{a^{2k-1}} - \sqrt[2k]{a^{2k-2}b} + \dots + \sqrt[2k]{ab^{2k-2}} - \sqrt[2k]{b^{2k-1}} \right)}{a - b}$$

при  $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$ ;

$$\frac{A}{\sqrt[2k+1]{a} + \sqrt[2k+1]{b}} = \frac{A \left( \sqrt[2k+1]{a^{2k}} - \sqrt[2k+1]{a^{2k-1}b} + \dots - \sqrt[2k+1]{ab^{2k-1}} + \sqrt[2k+1]{b^{2k}} \right)}{a + b},$$

где  $a$  и  $b$  — любые действительные числа и  $a + b \neq 0$ .

5. Дроби вида  $\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$ .

Умножив знаменатель на  $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$ , получим

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}) = a + b - c + 2\sqrt{ab}.$$

Умножив последнее выражение на  $a + b - c - 2\sqrt{ab}$ , найдем

$$((a + b - c) + 2\sqrt{ab})(a + b - c - 2\sqrt{ab}) = (a + b - c)^2 - 4ab.$$

Таким образом, множителем, сопряженным со знаменателем данной дроби, является  $(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})$ . Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})}{(a + b - c)^2 - 4ab},$$

где  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, (a + b - c)^2 - 4ab \neq 0$ .

Аналогично исключают иррациональность из знаменателей дробей

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}} \text{ и } \frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}}.$$

Если знаменатель дроби — сумма четырех квадратных корней

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}, \text{ причем } ab = cd, \text{ то исключить иррациональность}$$

из знаменателя этой дроби можно так:

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}} = \frac{A((\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{c} + \sqrt{d}))}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d})}{a + b - c - d},$$

где  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0, a + b \neq c + d$ .

6. Дроби вида  $\frac{A}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$ .

Найдем сопряженный со знаменателем множитель. Для этого воспользуемся тождеством

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Если принять  $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c}$ , то

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc}) = a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}.$$

Умножив полученное выражение на

$$B = (a + b + c)^2 + 3(a + b + c)\sqrt[3]{abc} + 9\sqrt[3]{(abc)^2},$$

получим

$$(a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}) \cdot B = (a + b + c)^3 - 27abc.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}} = \frac{A(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc}) \cdot B}{(a + b + c)^3 - 27abc}$$

при  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \neq 0, (a + b + c)^3 \neq 27abc$ .

## Преобразование сложного квадратного корня (радикала)

Выражения вида  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$  называются сложными квадратными корнями (радикалами). Для их преобразования пользуются формулой

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

где  $A > 0$ ,  $B > 0$  и  $A^2 - B > 0$ ; знаки берутся либо только верхние, либо только нижние. В правильности этой формулы можно убедиться, возведя обе части формулы в квадрат. Эта формула упрощает сложный радикал, если  $A^2 - B$  — точный квадрат.

Упростить выражения и вычислить их, если даны значения параметров (2.158 — 2.284):

$$2.158. \sqrt[4]{(1-2a+a^2)(a^2-1)(a-1)} : \frac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a+1 > 0, \\ a \neq -3, \\ a \neq 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a > -1, \\ a \neq -3, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{(1-2a+a^2)(a^2-1)(a-1)} : \frac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}} = \\ & = \sqrt[4]{(a-1)^2(a-1)(a+1)(a-1)} \cdot \frac{\sqrt[4]{a+1}}{a^2+2a-3} = \frac{\sqrt[4]{(a-1)^4(a+1)^2}}{(a-1)(a+3)} = \\ & = \frac{|a-1| \sqrt[4]{(a+1)^2}}{(a-1)(a+3)} = \frac{|a-1| \sqrt{a+1}}{(a-1)(a+3)} = \\ & = \begin{cases} -\frac{\sqrt{a+1}}{a+3} & \text{при } -1 < a < 1 \text{ (с учетом ОДЗ)} \\ \frac{\sqrt{a+1}}{a+3} & \text{при } 1 < a < \infty \text{ (с учетом ОДЗ)} \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:  $-\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$  при  $-1 < a < 1$ ;  $\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$  при  $1 < a < \infty$ .

$$2.159. \left( \left( \frac{a^3 \sqrt[3]{b}}{b \sqrt{a^3}} \right)^{3/2} + \left( \frac{\sqrt{a}}{a \sqrt[8]{b^3}} \right)^2 \right) : (a^{1/4} + b^{1/4})$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a > 0, \\ b > 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left( \left( \frac{a^3 \sqrt[3]{b}}{b \sqrt{a^3}} \right)^{3/2} + \left( \frac{\sqrt{a}}{a \sqrt[8]{b^3}} \right)^2 \right) : (a^{1/4} + b^{1/4}) = \\ & = \left( \frac{a^{3/2} (\sqrt[3]{b})^{3/2}}{b^{3/2} (\sqrt{a^3})^{3/2}} + \frac{(\sqrt{a})^2}{a^2 (\sqrt[8]{b^3})^2} \right) : (a^{1/4} + b^{1/4}) = \\ & = \left( \frac{a^{3/2} b^{1/2}}{a^{9/4} b^{3/2}} + \frac{a}{a^2 b^{3/4}} \right) \frac{1}{a^{1/4} + b^{1/4}} = \\ & = \left( \frac{1}{a^{3/4} b} + \frac{1}{ab^{3/4}} \right) \frac{1}{a^{1/4} + b^{1/4}} = \frac{a^{1/4} + b^{1/4}}{ab} \cdot \frac{1}{a^{1/4} + b^{1/4}} = \frac{1}{ab}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{ab}.$$

$$2.160. \frac{(a^2 b \sqrt{b} - 6a^{5/3} b^{5/4} + 12ab^3 \sqrt{a} - 8ab^{3/4})^{2/3}}{ab^3 \sqrt{a} - 4ab^{3/4} + 4a^{2/3} \sqrt{b}}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a^{1/3} b^{1/4} \neq 2, \\ a \neq 0, \\ b \neq 0. \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{(a^2 b \sqrt{b} - 6a^{5/3} b^{5/4} + 12ab^3 \sqrt{a} - 8ab^{3/4})^{2/3}}{ab^3 \sqrt{a} - 4ab^{3/4} + 4a^{2/3} \sqrt{b}} = \\
& = \frac{(a^2 b^{3/2} - 6a^{5/3} b^{5/4} + 12a^{4/3} b - 8ab^{3/4})^{2/3}}{a^{4/3} b - 4ab^{3/4} + 4a^{2/3} b^{1/2}} = \\
& = \frac{(ab^{3/4} (ab^{3/4} - 6a^{2/3} b^{1/2} + 12a^{1/3} b^{1/4} - 8))^{2/3}}{a^{2/3} b^{1/2} (a^{2/3} b^{1/2} - 4a^{1/3} b^{1/4} + 4)} = \\
& = \frac{a^{2/3} b^{1/2} ((ab^{3/4} - 8) - 6a^{1/3} b^{1/4} (a^{1/3} b^{1/4} - 2))^{2/3}}{a^{2/3} b^{1/2} (a^{1/3} b^{1/4} - 2)^2} = \\
& = \frac{\left( (a^{1/3} b^{1/4})^3 - 2^3 \right) - 6a^{1/3} b^{1/4} (a^{1/3} b^{1/4} - 2) \Big)^{2/3}}{(a^{1/3} b^{1/4} - 2)^2} = \\
& = \frac{(a^{1/3} b^{1/4} - 2) (a^{2/3} b^{1/2} + 2a^{1/3} b^{1/4} + 4) - 6a^{1/3} b^{1/4} (a^{1/3} b^{1/4} - 2) \Big)^{2/3}}{(a^{1/3} b^{1/4} - 2)^2} = \\
& = \frac{(a^{1/3} b^{1/4} - 2) (a^{2/3} b^{1/2} + 2a^{1/3} b^{1/4} + 4 - 6a^{1/3} b^{1/4}) \Big)^{2/3}}{(a^{1/3} b^{1/4} - 2)^2} = \\
& = \frac{(a^{1/3} b^{1/4} - 2) (a^{2/3} b^{1/2} - 4a^{1/3} b^{1/4} + 4) \Big)^{2/3}}{(a^{1/3} b^{1/4} - 2)^2} = \\
& = \frac{\left( (a^{1/3} b^{1/4} - 2) (a^{1/3} b^{1/4} - 2) \right)^{2/3}}{(a^{1/3} b^{1/4} - 2)^2} = \frac{\left( (a^{1/3} b^{1/4} - 2)^3 \right)^{2/3}}{(a^{1/3} b^{1/4} - 2)^2} = \frac{(a^{1/3} b^{1/4} - 2)^2}{(a^{1/3} b^{1/4} - 2)^2} = 1.
\end{aligned}$$

Ответ: 1

2.161.  $\frac{a^3 - 3a^2 + 4 + (a^2 - 4)\sqrt{a^2 - 1}}{a^3 + 3a^2 - 4 + (a^2 - 4)\sqrt{a^2 - 1}}$ ;  $a > 1$ ,  $a \neq \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{a^3 - 3a^2 + 4 + (a^2 - 4)\sqrt{a^2 - 1}}{a^3 + 3a^2 - 4 + (a^2 - 4)\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{a^2(a-2) - (a^2 - 4) + (a^2 - 4)\sqrt{a^2 - 1}}{a^2(a+2) + (a^2 - 4) + (a^2 - 4)\sqrt{a^2 - 1}} = \\ & = \frac{(a-2)(a^2 - 4 - (a-2)) + (a^2 - 4)\sqrt{a^2 - 1}}{(a+2)(a^2 - 4 + (a+2)) + (a^2 - 4)\sqrt{a^2 - 1}} = \\ & = \frac{(a+1)(a-2)^2 + (a^2 - 4)\sqrt{a^2 - 1}}{(a-1)(a+2)^2 + (a^2 - 4)\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{(a+1)(a-2)^2 + (a-2)(a+2)\sqrt{a^2 - 1}}{(a-1)(a+2)^2 + (a-2)(a+2)\sqrt{a^2 - 1}} = \\ & = \frac{\sqrt{(a+1)^2 \cdot (a-2)^2 + (a-2)(a+2)\sqrt{(a-1)(a+1)}}}{\sqrt{(a-1)^2 \cdot (a+2)^2 + (a-2)(a+2)\sqrt{(a-1)(a+1)}}} = \\ & = \frac{(a-2)\sqrt{a+1}(\sqrt{a+1}(a-2) + (a+2)\sqrt{a-1})}{(a+2)\sqrt{a-1}(\sqrt{a+1}(a-2) + (a+2)\sqrt{a-1})} = \frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{(a+2)\sqrt{a-1}}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{(a+2)\sqrt{a-1}}$ .

2.162.  $\frac{a^2 + 4}{a\sqrt{\left(\frac{a^2 - 4}{2a}\right)^2 + 4}}$

Решение.

ОДЗ:  $a \neq 0$ .

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + 4}{a\sqrt{\left(\frac{a^2 - 4}{2a}\right)^2 + 4}} = \frac{a^2 + 4}{a\sqrt{\frac{a^4 - 8a^2 + 16}{4a^2} + 4}} = \frac{a^2 + 4}{a\sqrt{\frac{a^4 - 8a^2 + 16 + 16a^2}{4a^2}}} = \\ & = \frac{a^2 + 4}{a\sqrt{\frac{a^4 + 8a^2 + 16}{4a^2}}} = \frac{a^2 + 4}{a\sqrt{\left(\frac{a^2 + 4}{2a}\right)^2}} = \frac{a^2 + 4}{\frac{a(a^2 + 4)}{2 \cdot |a|}} = \frac{2 \cdot |a|}{a} = \begin{cases} -2, & \text{если } a < 0, \\ 2, & \text{если } a > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:  $-2$  при  $a \in (-\infty; 0)$ ;  $2$  при  $a \in (0; \infty)$ .



$$2.164. \frac{x^2 + 2x - 3 + (x+1)\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2x - 3 + (x-1)\sqrt{x^2 - 9}}; x > 3.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x - 3 + (x+1)\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2x - 3 + (x-1)\sqrt{x^2 - 9}} &= \frac{(x^2 - 1) + 2(x-1) + (x+1)\sqrt{x^2 - 9}}{(x^2 - 1) - 2(x+1) + (x-1)\sqrt{x^2 - 9}} = \\ &= \frac{(x+3)(x-1) + (x+1)\sqrt{(x-3)(x+3)}}{(x-3)(x+1) + (x-1)\sqrt{(x-3)(x+3)}} = \\ &= \frac{\sqrt{x+3} \cdot ((x-1)\sqrt{x+3} + (x+1)\sqrt{x-3})}{\sqrt{x-3} \cdot ((x+1)\sqrt{x-3} + (x-1)\sqrt{x+3})} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$ .

$$2.165. \frac{t^2 - t - 6 - (t+3)\sqrt{t^2 - 4}}{t^2 + t - 6 - (t-3)\sqrt{t^2 - 4}}; t > 2.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{t^2 - t - 6 - (t+3)\sqrt{t^2 - 4}}{t^2 + t - 6 - (t-3)\sqrt{t^2 - 4}} &= \frac{(t^2 - 4) - (t+2) - (t+3)\sqrt{t^2 - 4}}{(t^2 - 4) + (t-2) - (t-3)\sqrt{t^2 - 4}} = \\ &= \frac{(t-3)(t+2) - (t+3)\sqrt{(t-2)(t+2)}}{(t+3)(t-2) - (t-3)\sqrt{(t-2)(t+2)}} = \frac{\sqrt{t+2} \cdot ((t-3)\sqrt{t+2} - (t+3)\sqrt{t-2})}{\sqrt{t-2} \cdot ((t+3)\sqrt{t-2} - (t-3)\sqrt{t+2})} = \\ &= -\frac{\sqrt{t+2} \cdot ((t+3)\sqrt{t-2} - (t-3)\sqrt{t+2})}{\sqrt{t-2} \cdot ((t+3)\sqrt{t-2} - (t-3)\sqrt{t+2})} = -\frac{\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}} = -\sqrt{\frac{t+2}{t-2}}. \end{aligned}$$

Ответ:  $-\sqrt{\frac{t+2}{t-2}}$ .

$$2.166. \frac{\frac{|b-1|}{b} + b \cdot |b-1| + 2 - \frac{2}{b}}{\sqrt{b-2 + \frac{1}{b}}}$$

Решение.

ОДЗ:  $b > 0, b \neq 1$ .

$$\frac{\frac{|b-1|}{b} + b \cdot |b-1| + 2 - \frac{2}{b}}{\sqrt{b-2 + \frac{1}{b}}} = \frac{\frac{|b-1| + b^2 \cdot |b-1| + 2b - 2}{b}}{\sqrt{\frac{b^2 - 2b + 1}{b}}} =$$

$$= \frac{|b-1| \cdot (b^2 + 1) + 2(b-1)}{b \sqrt{\frac{(b-1)^2}{b}}} = \frac{|b-1| \cdot (b^2 + 1) + 2(b-1)}{|b-1| \sqrt{b}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-(b-1)(b^2 + 1) + 2(b-1)}{-(b-1)\sqrt{b}} = \frac{-(b-1)(b^2 + 1 - 2)}{-(b-1)\sqrt{b}} = \frac{b^2 - 1}{\sqrt{b}}, & \text{если } 0 < b < 1; \\ \frac{(b-1)(b^2 + 1) + 2(b-1)}{(b-1)\sqrt{b}} = \frac{(b-1)(b^2 + 1 + 2)}{(b-1)\sqrt{b}} = \frac{b^2 + 3}{\sqrt{b}}, & \text{если } b > 1. \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{b^2 - 1}{\sqrt{b}}$  при  $b \in (0; 1)$ ;  $\frac{b^2 + 3}{\sqrt{b}}$  при  $b \in (1; \infty)$ .

$$2.167. \frac{m^5 + m^4 \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4m^9}}{|m^3 - 1| - 1}$$

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} m \neq \sqrt[3]{2}, \\ m \neq 0. \end{cases}$

$$\frac{m^5 + m^4 \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4m^9}}{|m^3 - 1| - 1} = \frac{m^5 + \sqrt[3]{2} \cdot m^4 + \sqrt[3]{2^2} \cdot m^3}{|m^3 - 1| - 1} = \frac{m^3(m^2 + \sqrt[3]{2} \cdot m + \sqrt[3]{2^2})}{|m^3 - 1| - 1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{m^3 \left( m^2 + \sqrt[3]{2} \cdot m + \sqrt[3]{2^2} \right)}{-(m^2 - 1) - 1} = \frac{m^2 \left( m^2 + \sqrt[3]{2^2} \right)}{-m^3} = \\ = -m^2 - \sqrt[3]{2m} - \sqrt[3]{2^2}, \text{ если } 0 \neq m < 1 \\ \frac{m^3 \left( m^2 + \sqrt[3]{2} \cdot m + \sqrt[3]{2^2} \right)}{m^3 - 1 - 1} = \frac{m^2 \left( m^2 + \sqrt[3]{2} \cdot m + \sqrt[3]{2^2} \right)}{m^3 - \sqrt[3]{2^3}} = \\ \frac{m^3 \left( m^2 + \sqrt[3]{2} \cdot m + \sqrt[3]{2^2} \right)}{(m - \sqrt[3]{2}) \left( m^2 + \sqrt[3]{2} \cdot m + \sqrt[3]{2^2} \right)} = \frac{m^2}{m - \sqrt[3]{2}}, \text{ если } 1 \leq m \neq \sqrt[3]{2}. \end{cases}$$

Ответ:  $-\left(m^2 + \sqrt[3]{2} \cdot m + \sqrt[3]{2^2}\right)$  при  $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$ ;  $\frac{m^3}{m - \sqrt[3]{2}}$

при  $m \in [1; \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}; \infty)$ .

2.168.  $\frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} \cdot |x - 3|.$

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 3. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} \cdot |x - 3| &= \frac{(x-1)^2(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2(x-3)} \cdot |x - 3| = \\ &= \frac{(x^2 + x + 1) \cdot |x - 3|}{x - 3} = \begin{cases} \frac{(x^2 + x + 1)(x - 3)}{x - 3} = -(x^2 + x + 1), \text{ если } 1 \neq x < 3; \\ \frac{(x^2 + x + 1)(x - 3)}{x - 3} = x^2 + x + 1, \text{ если } x > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:  $-(x^2 + x + 1)$  при  $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 3)$ ;  $x^2 + x + 1$  при  $x \in (3; \infty)$ .

$$2.169. \left( \sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2 \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{m^4} - n^3 + n^2\sqrt[3]{m} - mn}{mn^{-1} + n - n^4m^{-1} - n^2}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} m \neq 0, \\ n \neq 0, \\ m \neq n^3, \\ n^2 \neq -m. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{m} + n^2 \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{m^4} - n^3 + n^2\sqrt[3]{m} - mn}{mn^{-1} + n - n^4m^{-1} - n^2} = \\ & = \left( m^{2/3} + nm^{1/3} + n^2 \right) \cdot \frac{m^{4/3} - n^3 + n^2m^{1/3} - mn}{\frac{m}{n} + n - \frac{n^4}{m} - n^2} = \\ & = \left( m^{2/3} + nm^{1/3} + n^2 \right) \cdot \frac{\left( m^{4/3} + n^2m^{1/3} \right) - (mn + n^3)}{\frac{m^2 + mn^2 - n^5 - mn^3}{mn}} = \\ & = \left( m^{2/3} + nm^{1/3} + n^2 \right) \cdot \frac{m^{1/3}(m + n^2) - n(m + n^2)}{\frac{m(m + n^2) - n^3(m + n^2)}{mn}} = \\ & = \left( m^{2/3} + nm^{1/3} + n^2 \right) \cdot \frac{(m + n^2)(m^{1/3} - n)}{\frac{(m + n^2)(m - n^3)}{mn}} = \\ & = \left( m^{2/3} + nm^{1/3} + n^2 \right) \cdot \frac{(m^{1/3} - n)mn}{m - n^3} = \frac{(m - n^3)mn}{m - n^3} = mn. \end{aligned}$$

Ответ:  $mn$ .

$$2.170. \frac{a^3 + a^2 - 2a}{a|a+2| - a^2 + 4}.$$

Решение.

ОДЗ:  $a \neq -2$ .

$$\frac{a^3 + a^2 - 2a}{a|a+2| - a^2 + 4} = \frac{a(a^2 - 1) + a(a - 1)}{a|a+2| - a^2 + 4} = \frac{a(a+2)(a-1)}{a|a+2| - (a-2)(a+2)}$$

$$= \begin{cases} \frac{a(a+2)(a-1)}{-a(a+2)-(a-2)(a+2)} = -\frac{a(a+2)(a-1)}{(a+2)(a+a-2)} = -\frac{a}{2}, & \text{если } a < -2; \\ \frac{a(a+2)(a-1)}{a(a+2)-(a-2)(a+2)} = \frac{a(a+2)(a-1)}{(a+2)(a-a+2)} = \frac{a(a-1)}{2}, & \text{если } a > -2. \end{cases}$$

Ответ:  $-\frac{a}{2}$  при  $a \in (-\infty; -2)$ ;  $\frac{a(a-1)}{2}$  при  $a \in (-2; \infty)$ .

$$2.171. \frac{\frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} \cdot \frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x \neq y. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} \cdot \frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}} = \\ & \frac{(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - (x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}} = \\ & \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x-y) + (\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}} = \\ & \frac{x\sqrt{x} + x\sqrt{y} + y\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{x} + x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}} = \\ & \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + y\sqrt{y} + x\sqrt{x} + x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}} = \\ & \frac{2\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{(x+y)(x-y)}{2(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})} \cdot \frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}} = \end{aligned}$$



$$= \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)} \cdot \frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}} = \frac{x+y}{2}.$$

Ответ:  $\frac{x+y}{2}$ .

2.172.  $\left(2 - \frac{1}{4a^{-1}} - \frac{4}{a}\right) \cdot \left( (a-4)\sqrt[3]{(a+4)^{-3}} - \frac{(a+4)^{3/2}}{\sqrt{(a^2-16)(a-4)}} \right)$

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} a \neq 0, \\ a > -4, \\ a \neq 4. \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \left(2 - \frac{1}{4a^{-1}} - \frac{4}{a}\right) \cdot \left( (a-4)\sqrt[3]{(a+4)^{-3}} - \frac{(a+4)^{3/2}}{\sqrt{(a^2-16)(a-4)}} \right) = \\ & = \left(2 - \frac{a}{4} - \frac{4}{a}\right) \cdot \left( \frac{a-4}{a+4} - \frac{\sqrt{(a+4)^3}}{\sqrt{(a+4)(a-4)^2}} \right) = \frac{8a-a^2-16}{4a} \cdot \left( \frac{a-4}{a+4} - \frac{a+4}{|a-4|} \right) = \\ & = -\frac{a^2-8a+16}{4a} \cdot \left( \frac{a-4}{a+4} - \frac{a+4}{|a-4|} \right) = \frac{(a-4)^2}{4a} \cdot \left( \frac{a+4}{|a-4|} - \frac{a-4}{a+4} \right) = \\ & = \begin{cases} -\frac{(a-4)^2}{4a} \cdot \left( \frac{a-4}{a+4} + \frac{a+4}{a-4} \right) = -\frac{(a-4)^2 \left( (a+4)^2 + (a-4)^2 \right)}{4a(a-4)(a+4)} = \\ \quad = \frac{(4-a)2(a^2+16)}{4a(a+4)} = \frac{(4-a)(a^2+16)}{2a(a+4)} \text{ при } \begin{cases} -4 < a < 4, \\ a \neq 0; \end{cases} \\ \frac{(a-4)^2}{4a} \cdot \left( \frac{a+4}{a-4} - \frac{a-4}{a+4} \right) = \frac{(a-4)^2 \left( (a+4)^2 - (a-4)^2 \right)}{4a(a-4)(a+4)} = \frac{(a-4)16a}{4a(a+4)} = \\ \quad = \frac{4a-16}{a+4} \text{ при } a > 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{(4-a)(a^2+16)}{2a(a+4)}$  при  $a \in (-4; 0) \cup (0; 4)$  и  $\frac{4a-16}{a+4}$  при

$a \in (4; \infty)$ .

$$2.173. \frac{m \cdot |m-3|}{(m^2 - m - 6) \cdot |m|}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} m \neq 0, \\ m \neq -2, \\ m \neq 3. \end{cases}$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, рассматриваем три случая:

1) при  $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0)$

$$\frac{m \cdot |m-3|}{(m^2 - m - 6) \cdot |m|} = \frac{-m(m-3)}{-(m^2 - m - 6)m} = \frac{m-3}{(m-3)(m+2)} = \frac{1}{m+2};$$

2) при  $m \in (0; 3)$

$$\frac{m \cdot |m-3|}{(m^2 - m - 6) \cdot |m|} = \frac{-m(m-3)}{(m^2 - m - 6)m} = \frac{-(m-3)}{(m-3)(m+2)} = -\frac{1}{m+2};$$

3) при  $m \in (3; \infty)$

$$\frac{m \cdot |m-3|}{(m^2 - m - 6) \cdot |m|} = \frac{m(m-3)}{(m-3)(m+2)m} = \frac{1}{m+2}.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{m+2}$  при  $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (3; \infty)$ ;  $-\frac{1}{m+2}$  при  $m \in (0; 3)$ .

$$2.174. \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{(x^3 - 4x^2 + 3x) \cdot |x-2|}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{(x^3 - 4x^2 + 3x) \cdot |x-2|} = \frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{x(x-3)(x-1) \cdot |x-2|} = \frac{x-2}{x \cdot |x-2|} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{x-2}{x(x-2)} = -\frac{1}{x} & \text{при } x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2); \\ \frac{x-2}{x(x-2)} = \frac{1}{x} & \text{при } x \in (2; 3) \cup (3; \infty). \end{cases}$$

Ответ:  $-\frac{1}{x}$  при  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$ ;  $\frac{1}{x}$  при  $x \in (2; 3) \cup (3; \infty)$ .

2.175.  $\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}$ .

Решение.

ОДЗ:  $1 \leq x \neq 2$ .

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1} + 1}}{\sqrt{x-1}-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{|\sqrt{x-1}-1|}{\sqrt{x-1}-1} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1} = -1 & \text{при } \sqrt{x-1}-1 < 0 \text{ или } 1 \leq x < 2; \\ \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1} = 1 & \text{при } \sqrt{x-1}-1 > 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

Ответ:  $-1$  при  $x \in [1; 2)$ ;  $1$  при  $x \in (2; \infty)$ .

2.176.  $\frac{a^2 - 4 - |a-2|}{a^3 + 2a^2 - 5a - 6}$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} a \neq 2, \\ a \neq -3, \\ a \neq -1. \end{cases}$

$$\frac{a^2 - 4 - |a - 2|}{a^3 + 2a^2 - 5a - 6} = \frac{(a-2)(a+2) - |a-2|}{(a-2)(a+3)(a+1)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{(a-2)(a+2) + (a-2)}{(a-2)(a+3)(a+1)} = \frac{(a-2)(a+2+1)}{(a-2)(a+3)(a+1)} = \frac{a+3}{(a+3)(a+1)} = \frac{1}{a+1} \\ \text{при } a \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1) \cup (-1; 2); \\ \frac{(a-2)(a+2) - (a-2)}{(a-2)(a+3)(a+1)} = \frac{(a-2)(a+2-1)}{(a-2)(a+3)(a+1)} = \frac{a+1}{(a+3)(a+1)} = \frac{1}{a+3} \\ \text{при } a \in (2; \infty). \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{1}{a+1}$  при  $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1) \cup (-1; 2)$ ;  $\frac{1}{a+3}$  при  $a \in (2; \infty)$ .

$$2.177. \frac{2x - x \cdot |x-1| + x \cdot |x| + 3}{|x| + x^2}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

$$\frac{2x - x \cdot |x-1| + x \cdot |x| + 3}{|x| + x^2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2x + x(x-1) - x^2 + 3}{-x + x^2} = \frac{x+3}{x^2-x} \text{ при } x \in (-\infty; 0), \\ \frac{2x + x(x-1) + x^2 + 3}{x^2 + x} = \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 + x} \text{ при } x \in (0; 1), \\ \frac{2x - x(x-1) + x^2 + 3}{x + x^2} = \frac{3(x+1)}{x(x+1)} = \frac{3}{x} \text{ при } x \in [1; \infty) \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{x+3}{x^2-x}$  при  $x \in (-\infty; 0)$ ;  $\frac{2x^2+x+3}{x^2+x}$  при  $x \in (0; 1)$ ;  $\frac{3}{x}$  при  $x \in [1; \infty)$ .

$$2.178. \frac{a^3 - 2a^2 + 5a + 26}{a^3 - 5a^2 + 17a - 13}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } a \neq 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{a^3 - 2a^2 + 5a + 26}{a^3 - 5a^2 + 17a - 13} &= \frac{(a^3 + 2a^2) - (4a^2 + 8a) + (13a + 26)}{(a^3 - a^2) - (4a^2 - 8a) + (13a - 13)} = \\ &= \frac{a^2(a+2) - 4a(a+2) + 13(a+2)}{a^2(a-1) - 4a(a-1) + 13(a-1)} = \frac{(a+2)(a^2 - 4a + 13)}{(a-1)(a^2 - 4a + 13)} = \frac{a+2}{a-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a+2}{a-1}.$$

$$2.179. \frac{2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 2}{2a^3 - a^2 + a - 2}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } a \neq 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 2}{2a^3 - a^2 + a - 2} &= \frac{(2a^4 + 2a^2) + (a^3 + a) + (2a^2 + 2)}{(2a^3 - 2a^2) + (a^2 - a) + (2a - 2)} = \\ &= \frac{2a^2(a^2 + 1) + a(a^2 + 1) + 2(a^2 + 1)}{2a^2(a-1) + a(a-1) + 2(a-1)} = \frac{(a^2 + 1)(2a^2 + a + 2)}{(a-1)(2a^2 + a + 2)} = \frac{a^2 + 1}{a-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^2 + 1}{a-1}.$$

$$2.180. \frac{|x-1| + |x| + x}{3x^2 - 4x + 1}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq \frac{1}{3}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\frac{|x-1| + |x| + x}{3x^2 - 4x + 1} = \begin{cases} \frac{-x+1-x+x}{(x-1)(3x-1)} = -\frac{x-1}{(x-1)(3x-1)} = \frac{1}{1-3x} & \text{при } x \in (-\infty; 0); \\ \frac{-x+1+x+x}{(x-1)(3x-1)} = \frac{x+1}{(x-1)(3x-1)} & \text{при } x \in \left[0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right); \\ \frac{x-1+x+x}{(x-1)(3x-1)} = \frac{3x-1}{(x-1)(3x-1)} = \frac{1}{x-1} & \text{при } x \in (1; \infty). \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{1}{1-3x}$  при  $x \in (-\infty; 0)$ ;  $\frac{x+1}{(x-1)(3x-1)}$  при  $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ ;

$\frac{1}{x-1}$  при  $x \in (1; \infty)$ .

$$2.181. \frac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\left(\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} + 2\right)^{1/3}}$$

Решение.

ОДЗ:  $a > 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\left(\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} + 2\right)^{1/3}} &= \frac{\sqrt[3]{a-1+2\sqrt{a^2-1}+a+1}}{\left(\frac{(\sqrt{a-1})^2 + (\sqrt{a+1})^2 + 2\sqrt{(a+1)(a-1)}}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}\right)^{1/3}} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{a-1})^2 + 2\sqrt{(a-1)(a+1)} + (\sqrt{a+1})^2}}{\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1})^2}{\sqrt{a^2-1}}}} = \sqrt[3]{(\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1})^2} \times \\ &\times \frac{\sqrt[6]{a^2-1}}{\sqrt[3]{(\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1})^2}} = \sqrt[6]{a^2-1}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\sqrt[6]{a^2-1}$ .

$$2.182. \frac{(ab(x^2+y^2) + xy(a^2+b^2)) \cdot ((ax+by)^2 - 4abxy)}{ab(x^2-y^2) + xy(a^2-b^2)}$$

Решение.

ОДЗ:  $ab(x^2-y^2) + xy(a^2-b^2) \neq 0$ ,  $abx^2 + (a^2-b^2)yx - aby^2 \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-(a^2 - b^2)y \pm y\sqrt{(a^2 - b^2)^2 y^2 + 4a^2 b^2 y^2}}{2ab} = \\
&= \frac{-(a^2 - b^2)y \pm y\sqrt{a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 + 4a^2 b^2}}{2ab} = \\
&= \frac{-(a^2 - b^2)y \pm y\sqrt{a^4 + 2a^2 b^2 + b^4}}{2ab} = \\
&= \frac{-(a^2 - b^2)y \pm y\sqrt{(a^2 + b^2)^2}}{2ab} = \frac{-(a^2 - b^2)y \pm (a^2 + b^2)y}{2ab} = \\
&= \frac{(-a^2 + b^2 \pm (a^2 + b^2))y}{2ab};
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{(-a^2 + b^2 - (a^2 + b^2))y}{2ab} = \frac{-2a^2 y}{2ab} = -\frac{ay}{b}, \\ x_2 &= \frac{(-a^2 + b^2 + (a^2 + b^2))y}{2ab} = \frac{2b^2 y}{2ab} = \frac{by}{a}, \end{aligned} \right. \text{ т.е. } \left\{ \begin{aligned} x &\neq -\frac{ay}{b}, \\ x &\neq \frac{by}{a}, \\ ab &\neq 0. \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2))(ax + by)^2 - 4abxy)}{ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)} = \\
&= \frac{(abx^2 + (a^2 + b^2)yx + aby^2)(a^2 x^2 + 2abxy + b^2 y^2 - 4abxy)}{abx^2 + (a^2 - b^2)yx - aby^2} = \\
&= \frac{(abx^2 + (a^2 + b^2)yx + aby^2)(ax - by)^2}{abx^2 + (a^2 - b^2)yx - aby^2} \quad (*)
\end{aligned}$$

Разложим числитель  $abx^2 + (a^2 + b^2)yx + aby^2$  как квадрат трехчлен относительно  $x$ :

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-(a^2 + b^2)y \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 y^2 - 4a^2 b^2 y^2}}{2ab} = \\
&= \frac{-(a^2 + b^2)y \pm y\sqrt{a^4 + 2a^2 b^2 + b^4 - 4a^2 b^2}}{2ab} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{-(a^2 + b^2)y \pm y\sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}}{2ab} =$$

$$= \frac{-(a^2 + b^2)y \pm y\sqrt{(a^2 - b^2)^2}}{2ab} = \frac{-(a^2 + b^2)y \pm (a^2 - b^2)y}{2ab};$$

или  $x_1 = \frac{(-a^2 - b^2 - a^2 + b^2)y}{2ab} = \frac{-2a^2y}{2ab} = -\frac{ay}{b},$

$$x_2 = \frac{(-a^2 - b^2 + a^2 - b^2)y}{2ab} = \frac{-2b^2y}{2ab} = -\frac{by}{a};$$

тогда

$$abx^2 + (a^2 + b^2)yx + aby^2 = ab\left(x + \frac{ay}{b}\right)\left(x - \frac{by}{a}\right) = (abx + a^2y)(abx - b^2y)$$

Аналогично преобразуем знаменатель. Тогда выражение (\*) примет вид

$$\frac{(abx + a^2y)(abx + b^2y)(ax - by)^2}{(abx + a^2y)(abx - b^2y)} = \frac{(abx + b^2y)(ax - by)^2}{b(ax - by)} =$$

$$= \frac{b(ax + by)(ax - by)}{b} = a^2x^2 - b^2y^2.$$

Ответ:  $a^2x^2 - b^2y^2$ .

2.183.  $\frac{x \cdot |x - 3| + x^2 - 9}{2x^3 - 3x^2 - 9x}$ .

Решение.

ОДЗ:  $2x^3 - 3x^2 - 9x \neq 0$ ,  $x(2x^2 - 3x - 9) \neq 0$ ,  $2x\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 3) \neq 0$ ,

или  $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -\frac{3}{2}, \\ x \neq 3. \end{cases}$



$$\frac{x \cdot |x-3| + x^2 - 9}{2x^3 - 3x^2 - 9x} = \frac{x \cdot |x-3| + x^2 - 9}{x(2x^2 - 3x - 9)} =$$

$$\begin{cases} \frac{-x(x-3) + x^2 - 9}{x(2x^2 - 3x - 9)} = \frac{-x^2 + 3x + x^2 - 9}{2x\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-3)} = \frac{3(x-3)}{x(2x+3)(x-3)} = \frac{3}{x(2x+3)} \\ \text{при } x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; 0\right) \cup (0; 3), \\ \frac{x(x-3) + x^2 - 9}{x(2x^2 - 3x - 9)} = \frac{2x^2 - 3x - 9}{x(2x^2 - 3x - 9)} = \frac{1}{x} \text{ при } x \in (3; \infty) \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{3}{x(2x+3)}$ , если  $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; 0\right) \cup (0; 3)$ ;  $\frac{1}{x}$ ; если  $x \in (3; \infty)$ .

2.184.  $\frac{2 \cdot |a+5| - a + \frac{25}{a}}{3a^2 + 10a - 25}$ .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a \neq -5, \\ a \neq \frac{5}{3}, \\ a \neq 0. \end{cases}$$

$$\frac{2 \cdot |a+5| - a + \frac{25}{a}}{3a^2 + 10a - 25} = \frac{2a \cdot |a+5| - a^2 + 25}{a(3a^2 + 10a - 25)} =$$

$$\begin{cases} \frac{-2a(a+5) - a^2 + 25}{a(3a^2 + 10a - 25)} = \frac{-(3a^2 + 10a - 25)}{a(3a^2 + 10a - 25)} = -\frac{1}{a} \text{ при } a \in (-\infty; -5), \\ \frac{2a(a+5) - a^2 + 25}{a(3a^2 + 10a - 25)} = \frac{a^2 + 10a + 25}{a(a+5)(3a-5)} = \frac{(a+5)^2}{a(a+5)(3a-5)} = \frac{a+5}{a(3a-5)} \\ \text{при } a \in (-5; 0) \cup \left(0; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; \infty\right) \end{cases}$$

Ответ:  $-\frac{1}{a}$ , если  $a \in (-\infty; -5)$ ;  $\frac{a+5}{a(3a-5)}$ , если

$$a \in (-5; 0) \cup \left(0; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; \infty\right).$$

2.185.  $\frac{x^2 - 1 + |x+1|}{|x| \cdot (x-2)}$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$

$$\frac{x^2 - 1 + |x+1|}{|x| \cdot (x-2)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2 - 1 - (x+1)}{-x(x-2)} = \frac{x^2 - x - 2}{-x(x-2)} = \frac{(x-2)(x+1)}{-x(x-2)} = -\frac{x+1}{x} & \text{при } x \in (-\infty; -1); \\ \frac{x^2 - 1 + (x+1)}{-x(x-2)} = \frac{x^2 + x}{-x(x-2)} = \frac{x(x+1)}{-x(x-2)} = \frac{x+1}{2-x} & \text{при } x \in [-1; 0); \\ \frac{x^2 - 1 + (x+1)}{x(x-2)} = \frac{x^2 + x}{x(x-2)} = \frac{x(x+1)}{x(x-2)} = \frac{x+1}{x-2} & \text{при } x \in (0; 2) \cup (2; \infty). \end{cases}$$

Ответ:  $-\frac{x+1}{x}$ , если  $x \in (-\infty; -1)$ ;  $\frac{x+1}{2-x}$ , если  $x \in [-1; 0)$ ;  $\frac{x+1}{x-2}$ ,

если  $x \in (0; 2) \cup (2; \infty)$ .

2.186.  $\frac{p^3 + 4p^2 + 10p + 12}{p^3 - p^2 + 2p + 16} \cdot \frac{p^3 - 3p^2 + 8p}{p^2 + 2p + 6}$ .

Решение.

ОДЗ:  $p \neq -2$ .

Разложим на множители числитель первой дроби:

$$\begin{aligned} p^3 + 4p^2 + 10p + 12 &= (p^3 + 2p^2) + (2p^2 + 4p) + (6p + 12) = p^2(p+2) + \\ &+ 2p(p+2) + 6(p+2) = (p+2)(p^2 + 2p + 6). \end{aligned}$$

Аналогично для знаменателя находим, что

$$p^3 - p^2 + 2p + 16 = (p+2)(p^2 - 3p + 8) \text{ Тогда}$$

$$\frac{p^3 + 4p^2 + 10p + 12}{p^3 - p^2 + 2p + 16} \cdot \frac{p^3 - 3p^2 + 8p}{p^2 + 2p + 6} = \frac{(p+2)(p^2 + 2p + 6)}{(p+2)(p^2 - 3p + 8)} \times$$

$$\times \frac{p(p^2 - 3p + 8)}{p^2 + 2p + 6} = p.$$

Ответ:  $p$ .

$$2.187. \frac{1 + 2a^{1/4} - a^{1/2}}{1 - a + 4a^{3/4} - 4a^{1/2}} + \frac{a^{1/4} - 2}{(a^{1/4} - 1)^2}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a \neq 1, \\ a \geq 0, \\ a \neq 1 \pm \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\frac{1 + 2a^{1/4} - a^{1/2}}{1 - a + 4a^{3/4} - 4a^{1/2}} + \frac{a^{1/4} - 2}{(a^{1/4} - 1)^2} = \frac{-(a^{2/4} - 2a^{1/4} - 1)}{-(a^{4/4} - 1) + 4(a^{3/4} - a^{2/4})} + \frac{a^{1/4} - 2}{(a^{1/4} - 1)^2} =$$

$$= \frac{-(a^{2/4} - 2a^{1/4} - 1)}{-(a^{2/4} - 1)(a^{2/4} + 1) + 4a^{2/4}(a^{1/4} - 1)} + \frac{a^{1/4} - 2}{(a^{1/4} - 1)^2} =$$

$$= \frac{a^{2/4} - 2a^{1/4} - 1}{(a^{1/4} - 1)(a^{1/4} + 1)(a^{2/4} + 1) - 4a^{2/4}(a^{1/4} - 1)} + \frac{a^{1/4} - 2}{(a^{1/4} - 1)^2} =$$

$$= \frac{a^{2/4} - 2a^{1/4} - 1}{(a^{1/4} - 1)((a^{1/4} + 1)(a^{2/4} + 1) - 4a^{2/4})} + \frac{a^{1/4} - 2}{(a^{1/4} - 1)^2} =$$

$$= \frac{a^{2/4} - 2a^{1/4} - 1}{(a^{1/4} - 1)(a^{3/4} + a^{2/4} + a^{1/4} + 1 - 4a^{2/4})} + \frac{a^{1/4} - 2}{(a^{1/4} - 1)^2} =$$

$$= \frac{a^{2/4} - 2a^{1/4} - 1}{(a^{1/4} - 1)(a^{3/4} - 3a^{2/4} + a^{1/4} + 1)} + \frac{a^{1/4} - 2}{(a^{1/4} - 1)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^{2/4} - 2a^{1/4} - 1}{(a^{1/4} - 1)((a^{3/4} - a^{2/4}) - (2a^{2/4} - 2a^{1/4}) - (a^{1/4} - 1))} + \frac{a^{1/4} - 2}{(a^{1/4} - 1)^2} = \\
&= \frac{a^{2/4} - 2a^{1/4} - 1}{(a^{1/4} - 1)(a^{2/4}(a^{1/4} - 1) - 2a^{1/4}(a^{1/4} - 1) - (a^{1/4} - 1))} + \frac{a^{1/4} - 2}{(a^{1/4} - 1)^2} = \\
&= \frac{a^{2/4} - 2a^{1/4} - 1}{(a^{1/4} - 1)(a^{1/4} - 1)(a^{2/4} - 2a^{1/4} - 1)} + \frac{a^{1/4} - 2}{(a^{1/4} - 1)^2} = \frac{1}{(a^{1/4} - 1)^2} + \frac{a^{1/4} - 2}{(a^{1/4} - 1)^2} = \\
&= \frac{1 + a^{1/4} - 2}{(a^{1/4} - 1)^2} = \frac{a^{1/4} - 1}{(a^{1/4} - 1)^2} = \frac{1}{a^{1/4} - 1} = \frac{1}{\sqrt[4]{a} - 1}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1}{\sqrt[4]{a} - 1}$ .

2.188.  $\frac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x} \cdot |2x^2 - x - 1|}$ .

Решение.

ОДЗ:  $0 < x \neq 1$ .

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x} \cdot |2x^2 - x - 1|} = \frac{\sqrt{4x+4+\frac{1}{x}}}{\sqrt{x} \cdot |(x-1)(2x+1)|} = \frac{\sqrt{\frac{4x^2+4x+1}{x}}}{\sqrt{x} \cdot |(x-1)(2x+1)|} = \\
&= \frac{\sqrt{(2x+1)^2}}{x \cdot |(x-1)(2x+1)|} = \frac{2x+1}{x(2x+1) \cdot |x-1|} = \frac{1}{x \cdot |x-1|} = \\
&= \begin{cases} -\frac{1}{x(x-1)} & \text{при } x \in (0; 1); \\ \frac{1}{x(x-1)} & \text{при } x \in (1; \infty). \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1}{x-x^2}$ , если  $x \in (0; 1)$ ;  $\frac{1}{x^2-x}$ , если  $x \in (1; \infty)$ .

$$2.189. \frac{|r-1| \cdot |r|}{r^2 - r + 1 - |r|}.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $r \neq 1$ .

$$\frac{|r-1| \cdot |r|}{r^2 - r + 1 - |r|} = \begin{cases} \frac{-(r-1)(-r)}{r^2 - r + 1 + r} = \frac{r^2 - r}{r^2 + r} \text{ при } r \in (-\infty; 0); \\ \frac{-(r-1)r}{r^2 - r + 1 - r} = \frac{-(r-1)r}{(r-1)^2} = \frac{r}{1-r} \text{ при } r \in [0; 1); \\ \frac{(r-1)r}{r^2 - r + 1 - r} = \frac{(r-1)r}{(r-1)^2} = \frac{r}{r-1} \text{ при } r \in (1; \infty). \end{cases}$$

*Ответ:*  $\frac{r^2 - r}{r^2 + 1}$ , если  $r \in (-\infty; 0)$ ;  $\frac{r}{1-r}$ , если  $r \in [0; 1)$ ;  $\frac{r}{r-1}$ , если  $r \in (1; \infty)$ .

$$2.190. \left( \frac{z-2}{6z+(z-2)^2} + \frac{(z+4)^2 - 12}{z^3 - 8} - \frac{1}{z-2} \right) : \frac{z^3 + 2z^2 + 2z + 4}{z^3 - 2z^2 + 2z - 4}.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $z \neq \pm 2$ .

$$\begin{aligned} & \left( \frac{z-2}{6z+(z-2)^2} + \frac{(z+4)^2 - 12}{z^3 - 8} - \frac{1}{z-2} \right) : \frac{z^3 + 2z^2 + 2z + 4}{z^3 - 2z^2 + 2z - 4} = \\ & = \left( \frac{z-2}{6z+z^2-4z+4} + \frac{z^2+8z+16-12}{(z-2)(z^2+2z+4)} - \frac{1}{z-2} \right) : \frac{z^2(z+2)+2(z+2)}{z^2(z-2)+2(z-2)} = \\ & = \left( \frac{z-2}{z^2+2z+4} + \frac{z^2+8z+4}{(z-2)(z^2+2z+4)} - \frac{1}{z-2} \right) : \frac{(z+2)(z^2+2)}{(z-2)(z^2+2)} = \\ & = \frac{(z-2)^2 + z^2 + 8z + 4 - z^2 - 2z - 4}{(z-2)(z^2+2z+4)} : \frac{z+2}{z-2} = \frac{z^2+2z+4}{(z-2)(z^2+2z+4)} \times \\ & \times \frac{z-2}{z+2} = \frac{1}{z+2}. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{1}{z+2}$ .



$$\begin{aligned}
&= \frac{(a+1)a}{2a^3\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} + 1+a^2} = \\
&= \frac{(a+1)a}{2a^3\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + 1+a^2} = \frac{(a+1)a}{2a^3\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} + 1+a^2} \\
&= \frac{(a+1)a}{2a^3\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} + 1+a^2} = \frac{(a+1)a}{2a^3\sqrt{3-2} + 1+a^2} = \frac{(a+1)a}{a^2 + 2a + 1} = \\
&= \frac{(a+1)a}{(a+1)^2} = \frac{a}{a+1}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{a}{a+1}$ .

2.193. 
$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2} \cdot \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\sqrt{x}(x+27)} - 9x - 27}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}}$$

Решение.

ОДЗ: 
$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x \neq 9. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2} \cdot \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\sqrt{x}(x+27)} - 9x - 27}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}} = \\
&= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{4-4\sqrt{3}+3} + \sqrt[3]{x\sqrt{x}-9x+27\sqrt{x}-27}}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{4+4\sqrt{3}+3}} = \\
&= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{2^2-2 \cdot 2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{x}-3)^3}}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{2^2+2 \cdot 2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}} = \\
&= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{x}-3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{(2+\sqrt{3})^2}} = \\
&= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{x}-3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + \sqrt{x}-3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} + \sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2 - \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{4-3} + \sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2 - \sqrt{4-3}} = \frac{1 + \sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2 - 1} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3}$ .

2.194. 
$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{8+2\sqrt{15}} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{20}+\sqrt{12}} \cdot \sqrt[6]{8-2\sqrt{15}} - 2\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{a^2}}$$

Решение.

ОДЗ:  $a \neq 2$ .

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{8+2\sqrt{15}} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{20}+\sqrt{12}} \cdot \sqrt[6]{8-2\sqrt{15}} - 2\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{a^2}} = \\ & = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{5+2\sqrt{5}\cdot 3+3} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{5-2\sqrt{5}\cdot 3+3} - 2\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{a^2}} = \\ & = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} - 2\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{a^2}} = \\ & = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - 2\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{a^2}} = \\ & = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} - 2\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{a^2}} = \\ & = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2((\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2)} - 2\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{5-3} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2(5-3)} - 2\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{a^2}} = \\ & = \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{2^2 - 2\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{a^2}}} = \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{a}}{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{a})^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{a}}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{a}}$ .



$$2.195. \frac{a^4 - a^2 - 2a - 1}{a^3 - 2a^2 + 1} : \frac{a^4 + 2a^3 - a - 2}{1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ a \neq 0, \\ a \neq 1, \\ a \neq -2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{a^4 - a^2 - 2a - 1}{a^3 - 2a^2 + 1} : \frac{a^4 + 2a^3 - a - 2}{1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}} = \\ & = \frac{(a^2 - a - 1)(a^2 + a + 1)}{(a-1)(a^2 - a - 1)} : \frac{a^3(a+2) - (a+2)}{a^2} = \\ & = \frac{a^2 + a + 1}{a-1} : \frac{(a+2)(a^3 - 1)a^2}{(a+2)^2} = \frac{a^2 + a + 1}{a-1} : \frac{(a-1)(a^2 + a + 1)a^2}{a+2} = \\ & = \frac{a^2 + a + 1}{a-1} \cdot \frac{a+2}{(a-1)(a^2 + a + 1)a^2} = \frac{a+2}{a^2(a-1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a+2}{a^2(a-1)^2}.$$

$$2.196. \frac{|x^2 - 1| + x^2}{2x^2 - 1} - \frac{|x-1|}{x-1}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Раскрывая модули с учетом ОДЗ, рассматриваем три случая:

$$1) \begin{cases} x \in (-\infty; -1), \\ \frac{x^2 - 1 + x^2}{2x^2 - 1} + \frac{x-1}{x-1} = \frac{2x^2 - 1}{2x^2 - 1} + 1 = 1 + 1 = 2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right), \\ \frac{-(x^2 - 1) + x^2}{2x^2 - 1} + \frac{x-1}{x-1} = \frac{1}{2x^2 - 1} + 1 = \frac{1 + 2x^2}{2x^2 - 1} = \frac{2x^2}{2x^2 - 1}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x \in (1; \infty), \\ \frac{x^2 - 1 + x^2}{2x^2 - 1} - \frac{x-1}{x-1} = \frac{2x^2 - 1}{2x^2 - 1} - 1 = 1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Ответ: 2, если  $x \in (-\infty; -1)$ ;  $\frac{2x^2}{2x^2 - 1}$ , если

$$x \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right); 0, \text{ если } x \in (1; \infty).$$

2.197. 
$$\frac{\sqrt{2b + 2\sqrt{b^2 - 4}}}{\sqrt{b^2 - 4 + b + 2}}.$$

Решение.

ОДЗ:  $b \geq 2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2b + 2\sqrt{b^2 - 4}}}{\sqrt{b^2 - 4 + b + 2}} &= \frac{\sqrt{b + 2\sqrt{(b+2)(b-2)} + b}}{\sqrt{b^2 - 4 + b + 2}} = \\ &= \frac{\sqrt{b + 2 + 2\sqrt{(b+2)(b-2)} + b - 2}}{\sqrt{b^2 - 4 + b + 2}} = \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{b+2} + \sqrt{b-2})^2}}{\sqrt{(b+2)(b-2) + \sqrt{(b+2)^2}}} = \frac{\sqrt{b+2} + \sqrt{b-2}}{\sqrt{b+2} \cdot (\sqrt{b-2} + \sqrt{b+2})} = \frac{1}{\sqrt{b+2}}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1}{\sqrt{b+2}}$ .

$$2.198. \frac{b^2 - 3b - (b-1)\sqrt{b^2 - 4} + 2}{b^2 + 3b - (b+1)\sqrt{b^2 - 4} + 2} \cdot \sqrt{\frac{b+2}{b-2}}; \quad b > 2.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{b^2 - 3b - (b-1)\sqrt{b^2 - 4} + 2}{b^2 + 3b - (b+1)\sqrt{b^2 - 4} + 2} \cdot \sqrt{\frac{b+2}{b-2}} = \\ &= \frac{(b^2 - 3b + 2) - (b-1)\sqrt{(b-2)(b+2)}}{(b^2 + 3b + 2) - (b+1)\sqrt{(b-2)(b+2)}} \cdot \sqrt{\frac{b+2}{b-2}} = \\ &= \frac{(b-2)(b-1) - (b-1)\sqrt{(b-2)(b+2)}}{(b+2)(b+1) - (b+1)\sqrt{(b-2)(b+2)}} \cdot \sqrt{\frac{b+2}{b-2}} = \\ &= \frac{(b-1)\sqrt{b-2} \cdot (\sqrt{b-2} - \sqrt{b+2})}{(b+1)\sqrt{b+2} \cdot (\sqrt{b+2} - \sqrt{b-2})} \cdot \sqrt{\frac{b+2}{b-2}} = -\frac{(b-1)(\sqrt{b-2} - \sqrt{b+2})}{(b+1)(\sqrt{b-2} - \sqrt{b+2})} = \\ &= -\frac{b-1}{b+1} = \frac{1-b}{1+b}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1-b}{1+b}$ .

$$2.199. \left( \frac{\sqrt[3]{mn^2} + \sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2} + 2\sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}} - 2\sqrt[3]{n} + \frac{m-n}{\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{n^2}} \right) : (\sqrt[6]{m} + \sqrt[6]{n}).$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} m \neq n, \\ m \geq 0, \\ n \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sqrt[3]{mn^2} + \sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2} + 2\sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}} - 2\sqrt[3]{n} + \frac{m-n}{\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{n^2}} \right) : (\sqrt[6]{m} + \sqrt[6]{n}) = \\ &= \left( \frac{\sqrt[3]{mn}(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n})}{(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n})^2} - 2\sqrt[3]{n} + \frac{(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2})}{(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n})} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\sqrt[6]{m} + \sqrt[6]{n}} = \left( \frac{\sqrt[3]{mn}}{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}} - 2\sqrt[3]{n} + \frac{\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{m} + \sqrt[6]{n}} = \\
& = \frac{\sqrt[3]{mn} - 2\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}) + \sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{m} + \sqrt[6]{n}} = \\
& = \frac{\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{m} + \sqrt[6]{n}} = \frac{(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n})}{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{m} + \sqrt[6]{n}} = \\
& = \frac{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[6]{m} + \sqrt[6]{n}} = \frac{(\sqrt[6]{m})^2 - (\sqrt[6]{n})^2}{\sqrt[6]{m} + \sqrt[6]{n}} = \frac{(\sqrt[6]{m} + \sqrt[6]{n})(\sqrt[6]{m} - \sqrt[6]{n})}{\sqrt[6]{m} + \sqrt[6]{n}} = \sqrt[6]{m} - \sqrt[6]{n}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\sqrt[6]{m} - \sqrt[6]{n}$ .

2.200.  $\left( \frac{\sqrt[4]{x^3} - y}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y}} - 3\sqrt[12]{x^3y^4} \right)^{-1/2} \cdot \left( \frac{\sqrt[4]{x^3} + y}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y}} - \sqrt[3]{y^2} \right)$

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt[3]{y} \neq \pm \sqrt[4]{x}. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\sqrt[4]{x^3} - y}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y}} - 3\sqrt[12]{x^3y^4} \right)^{-1/2} \cdot \left( \frac{\sqrt[4]{x^3} + y}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y}} - \sqrt[3]{y^2} \right) = \\
& = \left( \frac{(\sqrt[4]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y}} - 3\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \right)^{-1/2} \cdot \left( \frac{(\sqrt[4]{x})^3 + (\sqrt[3]{y})^3}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y}} - \sqrt[3]{y^2} \right) = \\
& = \left( \frac{(\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y}} - 3\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \right)^{-1/2} \times \\
& \times \left( \frac{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y})(\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y}} - \sqrt[3]{y^2} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x} \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2} - 3\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \right)^{-1/2} \cdot \left( \sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{x} \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{y^2} \right) = \\
&= \left( \sqrt[4]{x^2} - 2\sqrt[4]{x} \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2} \right)^{-1/2} \cdot \left( \sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{x} \sqrt[3]{y} \right) = \\
&= \left( \left( \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y} \right)^2 \right)^{-1/2} \cdot \sqrt[4]{x} \left( \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y} \right) = \frac{\sqrt[4]{x} \left( \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y} \right)}{\sqrt{\left( \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y} \right)^2}} = \frac{\sqrt[4]{x} \left( \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y} \right)}{\left| \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y} \right|} = \\
&= \begin{cases} -\frac{\sqrt[4]{x} \left( \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y} \right)}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y}} = -\sqrt[4]{x} \text{ при } \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y} < 0; \\ \frac{\sqrt[4]{x} \left( \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y} \right)}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y}} = \sqrt[4]{x} \text{ при } \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y} > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ:  $\sqrt[4]{x}$ , если  $\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y} > 0$ ;  $-\sqrt[4]{x}$ , если  $\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y} < 0$ .

2.201.  $\sqrt{\frac{p^2 - q\sqrt{p}}{\sqrt{p} - \sqrt[3]{q}}} + p^3\sqrt[3]{q} \cdot \left( p + \sqrt[6]{p^3q^2} \right)^{-1/2}$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} p > 0, \\ \pm\sqrt{p} \neq \sqrt[3]{q}, \\ \sqrt{p} + \sqrt[3]{q} > 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{p^2 - q\sqrt{p}}{\sqrt{p} - \sqrt[3]{q}}} + p^3\sqrt[3]{q} \cdot \left( p + \sqrt[6]{p^3q^2} \right)^{-1/2} = \\
&= \sqrt{\frac{\sqrt{p} \left( \sqrt{p^3} - q \right)}{\sqrt{p} - \sqrt[3]{q}}} + p^3\sqrt[3]{q} \cdot \frac{1}{\sqrt{p + \sqrt[6]{p^3q^2}}} = \\
&= \sqrt{\frac{\sqrt{p} \left( \sqrt{p^3} - \sqrt[3]{q^3} \right)}{\sqrt{p} - \sqrt[3]{q}}} + p^3\sqrt[3]{q} \cdot \frac{1}{\sqrt{p + \sqrt{p} \sqrt[3]{q}}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\sqrt{p}(\sqrt{p}-\sqrt[3]{q})(\sqrt{p^2+\sqrt{p}\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{q^2}})}{\sqrt{p}-\sqrt[3]{q}} + p\sqrt[3]{q} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{p}(\sqrt{p}+\sqrt[3]{q})}}} = \\
&= \sqrt{\sqrt{p}(\sqrt{p^2+\sqrt{p}\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{q^2}}) + p\sqrt[3]{q} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{p}(\sqrt{p}+\sqrt[3]{q})}}} = \\
&= \frac{\sqrt{\sqrt{p}(\sqrt{p^2+\sqrt{p}\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{q^2}} + \sqrt{p}\sqrt[3]{q})}}{\sqrt{\sqrt{p}(\sqrt{p}+\sqrt[3]{q})}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{p}+\sqrt[3]{q})^2}{\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}}} = \sqrt{\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}}$ .

2.202. 
$$\frac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2} \cdot m-4\sqrt{m-4}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2} \cdot 2}$$

Решение.

ОДЗ: 
$$\begin{cases} m \geq 4, \\ m \neq 8. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2} \cdot m-4\sqrt{m-4}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2} \cdot 2} = \\
&= \frac{\sqrt[3]{m-4+4\sqrt{m-4}+4} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2} \cdot m-4\sqrt{m-4}}{\sqrt[3]{m-4-4\sqrt{m-4}+4} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2} \cdot 2} = \\
&= \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{m-4}+2)^2(\sqrt{m-4}+2)} \cdot (\sqrt{m-4}+2) \cdot m-4-4\sqrt{m-4}+4}{\sqrt[3]{(\sqrt{m-4}-2)^2(\sqrt{m-4}-2)} \cdot 2} = \\
&= \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{m-4}+2)^3} \cdot (\sqrt{m-4}+2)^2 \cdot (\sqrt{m-4}-2)^2}{\sqrt[3]{(\sqrt{m-4}-2)^3} \cdot 2} = \frac{(\sqrt{m-4}+2)(\sqrt{m-4}-2)^2}{2(\sqrt{m-4}-2)} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{(\sqrt{m-4}+2)(\sqrt{m-4}-2)}{2} = \frac{((\sqrt{m-4})^2 - 2^2)}{2} = \frac{m-4-4}{2} = \frac{m-8}{2}.$$

Ответ:  $\frac{m-8}{2}$ .

2.203. 
$$\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} - 2} \cdot (2x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}}.$$

Решение.

ОДЗ:  $x > 1$ .

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} - 2} \cdot (2x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}} = \\ &= \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} - 2} \cdot (x+1 + \sqrt{x^2 - 1} + x-1)}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \left( \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x+1)(x-1)} + \sqrt{(x-1)^2} \right)} = \\ &= \frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{x+1})^2 - 2\sqrt{(x+1)(x-1)} + (\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}} \cdot \left( (\sqrt{x+1})^2 + \sqrt{(x+1)(x-1)} + (\sqrt{x-1})^2 \right)}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \left( (\sqrt{x+1})^2 + \sqrt{(x+1)(x-1)} + (\sqrt{x-1})^2 \right)} = \\ &= \frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x^2 - 1} \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2}}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 1}}$ .

$$2.204. \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \\ & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)} = \\ & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2} = \\ & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{4-2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \\ & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \\ & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4-2-\sqrt{3}} = \\ & = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4-3} = \\ & = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

*Ответ:* 1.

$$2.205. \left( \frac{bx+4+\frac{4}{bx}}{2b+(b^2-4)x-2bx^2} + \frac{(4x^2-b^2) \cdot \frac{1}{b}}{(b+2x)^2-8bx} \right) \cdot \frac{bx}{2}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} b \neq 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq \frac{b}{2}, \\ x \neq -\frac{2}{b}. \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
& \left( \frac{bx+4+\frac{4}{bx}}{2b+(b^2-4)x-2bx^2} + \frac{(4x^2-b^2)\cdot\frac{1}{b}}{(b+2x)^2-8bx} \right) \cdot \frac{bx}{2} = \\
& = \left( \frac{\frac{b^2x^2+4bx+4}{bx}}{-(2bx^2-(b^2-4)x-2b)} + \frac{\frac{4x^2-b^2}{b}}{b^2+4bx+(2x)^2-8bx} \right) \cdot \frac{bx}{2} = \\
& = \left( \frac{\frac{(bx+2)^2}{bx}}{-2b\left(x-\frac{b}{2}\right)\left(x+\frac{2}{b}\right)} + \frac{\frac{4x^2-b^2}{b}}{b^2-4bx+(2x)^2} \right) \cdot \frac{bx}{2} = \\
& = \left( \frac{\frac{(bx+2)^2}{bx}}{-(2x-b)(bx+2)} + \frac{\frac{(2x-b)(2x+b)}{b}}{(2x-b)^2} \right) \cdot \frac{bx}{2} = \\
& = \left( -\frac{bx+2}{(2x-b)bx} + \frac{2x+b}{(2x-b)b} \right) \cdot \frac{bx}{2} = -\frac{(bx+2)bx}{2(2x-b)bx} + \frac{(2x+b)bx}{2(2x-b)b} = \\
& = -\frac{bx+2}{2(2x-b)} + \frac{(2x+b)x}{2(2x-b)} = \frac{-bx-2+2x^2+bx}{2(2x-b)} = \frac{x^2-1}{2x-b}.
\end{aligned}$$

Отсем:  $\frac{x^2-1}{2x-b}$ .

2.206. 
$$\frac{\sqrt[3]{x^9-x^6y^3}-y^2\sqrt[3]{\frac{8x^6}{y^3}-8x^3}+xy^3\sqrt[3]{y^3-\frac{y^6}{x^3}}}{\sqrt[3]{x^8(x^2-2y^2)}+\sqrt[3]{x^2y^{12}}}; \frac{\sqrt[3]{1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{x+y}$$

Решение.

ОДЗ: 
$$\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0, \\ x \neq \pm y. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt[3]{x^9 - x^6 y^3} - y^2 \sqrt[3]{\frac{8x^6}{y^3} - 8x^3} + xy \sqrt[3]{y^3 - \frac{y^6}{x^3}}}{\sqrt[3]{x^8} \cdot (x^2 - 2y^2) + \sqrt[3]{x^2 y^{12}}} : \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{x+y} = \\
& = \frac{\sqrt[3]{x^6(x^3 - y^3)} - y^2 \sqrt[3]{\frac{8x^3(x^3 - y^3)}{y^3}} + xy \sqrt[3]{\frac{y^3(x^3 - y^3)}{x^3}}}{\sqrt[3]{x^2} \cdot (\sqrt[3]{x^6} \cdot (x^2 - 2y^2) + \sqrt[3]{y^{12}})} : \\
& : \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}}}{x+y} = \frac{x^2 \sqrt[3]{x^3 - y^3} - 2xy \sqrt[3]{x^3 - y^3} + y^2 \sqrt[3]{x^3 - y^3}}{\sqrt[3]{x^2} \cdot (x^2(x^2 - 2y^2) + y^4)} \times \\
& \times \frac{x+y}{\sqrt[3]{\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}}} = \frac{\sqrt[3]{x^3 - y^3}(x^2 - 2xy + y^2)}{\sqrt[3]{x^2}(x^4 - 2x^2 y^2 + y^4)} \cdot \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2 + xy + y^2}} = \\
& = \frac{\sqrt[3]{x^3 - y^3}(x-y)^2}{(x^2 - y^2)^2} \cdot \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2 + xy + y^2}} = \\
& = \frac{\sqrt[3]{(x-y)(x^2 + xy + y^2)} \cdot (x^2 - y^2)(x-y)}{(x^2 - y^2)^2 \sqrt[3]{x^2 + xy + y^2}} = \\
& = \frac{\sqrt[3]{x-y}(x-y)}{x^2 - y^2} = \frac{\sqrt[3]{x-y}(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{\sqrt[3]{x-y}}{x+y}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt[3]{x-y}}{x+y}$ .

2.207.  $\frac{(x^2 - 3x + 2)^{-1/2} - (x^2 + 3x + 2)^{-1/2}}{(x^2 - 3x + 2)^{-1/2} + (x^2 + 3x + 2)^{-1/2}} - 1 + \frac{(x^4 - 5x^2 + 4)^{1/2}}{3x}$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} x \neq 0, \\ x > 2, \\ x < -2. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
& \frac{(x^2-3x+2)^{-1/2} - (x^2+3x+2)^{-1/2}}{(x^2-3x+2)^{-1/2} + (x^2+3x+2)^{-1/2}} - 1 + \frac{(x^4-5x^2+4)^{1/2}}{3x} = \\
& = \frac{(x^2-3x+2)^{-1/2} - (x^2+3x+2)^{-1/2} - (x^2-3x+2)^{-1/2} - (x^2+3x+2)^{-1/2}}{(x^2-3x+2)^{-1/2} + (x^2+3x+2)^{-1/2}} + \\
& + \frac{(x^4-5x^2+4)^{1/2}}{3x} = \frac{-2(x^2+3x+2)^{-1/2}}{(x^2-3x+2)^{-1/2} + (x^2+3x+2)^{-1/2}} + \frac{(x^4-5x^2+4)^{1/2}}{3x} = \\
& = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}} + \frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}}{3x} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{2}{\sqrt{x^2+3x+2}} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}} \right) + \frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}}{3x} = \\
& = \frac{2}{\sqrt{x^2+3x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{(x^2-3x+2)(x^2+3x+2)}} + \frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}}{3x} = \\
& = \frac{2}{\sqrt{x^2+3x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x^4-5x^2+4}} + \frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}}{3x} = \\
& = \frac{2}{\sqrt{x^2+3x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}}{\sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2-3x+2}} + \frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}}{3x} =
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{x^4-5x^2+4} \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{x^2+3x+2}(\sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2-3x+2})} + \frac{1}{3x} \right) = \sqrt{x^4-5x^2+4} \times$$

$$\times \left( \frac{2(\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-3x+2})}{\sqrt{x^2+3x+2}(\sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2-3x+2})(\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-3x+2})} + \frac{1}{3x} \right) =$$

$$= \sqrt{x^4-5x^2+4} \cdot \left( \frac{2(\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-3x+2})}{\sqrt{x^2+3x+2} \cdot \left( (\sqrt{x^2+3x+2})^2 - (\sqrt{x^2-3x+2})^2 \right)} + \frac{1}{3x} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{x^4 - 5x^2 + 4} \cdot \left( -\frac{2(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 2})}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}(x^2 + 3x + 2 - x^2 + 3x - 2)} + \frac{1}{3x} \right) = \\
&= \sqrt{x^4 - 5x^2 + 4} \cdot \left( -\frac{2(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 2})}{6x\sqrt{x^2 + 3x + 2}} + \frac{1}{3x} \right) = \\
&= \sqrt{x^4 - 5x^2 + 4} \cdot \left( \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{3x\sqrt{x^2 + 3x + 2}} + \frac{1}{3x} \right) = \\
&= \sqrt{x^4 - 5x^2 + 4} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{3x\sqrt{x^2 + 3x + 2}} = \\
&= \frac{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 4} \cdot \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{3x\sqrt{x^2 + 3x + 2}} = \\
&= \frac{\sqrt{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2)} \cdot \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{3x\sqrt{x^2 + 3x + 2}} = \\
&= \frac{\sqrt{(x^2 - 3x + 2)^2}}{3x} = \frac{x^2 - 3x + 2}{3x}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{x^2 - 3x + 2}{3x}$ .

2.208. 
$$\frac{\left( (\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n})^2 - (\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})^2 \right)^2 - (16m + 4n)}{4m - n} + \frac{10\sqrt{m} - 3\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 2\sqrt{m}}.$$

Решение.

ОДЗ: 
$$\begin{cases} n \neq 4m, \\ m > 0, \\ n > 0. \end{cases}$$

$$\frac{\left( (\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n})^2 - (\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})^2 \right)^2 - (16m + 4n)}{4m - n} + \frac{10\sqrt{m} - 3\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 2\sqrt{m}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{m} + 2\sqrt[4]{mn} + \sqrt{n} - \sqrt{m} + 2\sqrt[4]{mn} - \sqrt{n})^2 - (16m + 4n)}{4m - n} + \frac{10\sqrt{m} - 3\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 2\sqrt{m}} = \\
&= \frac{(4\sqrt[4]{mn})^2 - (16m + 4n)}{4m - n} + \frac{10\sqrt{m} - 3\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 2\sqrt{m}} = \frac{16\sqrt{mn} - (16m + 4n)}{4m - n} + \\
&+ \frac{10\sqrt{m} - 3\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 2\sqrt{m}} = \frac{-4(4m - 4\sqrt{mn} + n)}{4m - n} + \frac{10\sqrt{m} - 3\sqrt{n}}{2\sqrt{m} + \sqrt{n}} = \\
&= \frac{-4\left((2\sqrt{m})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{mn} + (\sqrt{n})^2\right)}{(2\sqrt{m})^2 - (\sqrt{n})^2} + \frac{10\sqrt{m} - 3\sqrt{n}}{2\sqrt{m} + \sqrt{n}} = \\
&= \frac{-4(2\sqrt{m} - \sqrt{n})^2}{(2\sqrt{m} - \sqrt{n})(2\sqrt{m} + \sqrt{n})} + \frac{10\sqrt{m} - 3\sqrt{n}}{2\sqrt{m} + \sqrt{n}} = \frac{-4(2\sqrt{m} - \sqrt{n})}{2\sqrt{m} + \sqrt{n}} + \\
&+ \frac{10\sqrt{m} - 3\sqrt{n}}{2\sqrt{m} + \sqrt{n}} = \frac{-8\sqrt{m} + 4\sqrt{n} + 10\sqrt{m} - 3\sqrt{n}}{2\sqrt{m} + \sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{m} + \sqrt{n}}{2\sqrt{m} + \sqrt{n}} = 1.
\end{aligned}$$

Ответ: 1.

2.209.  $\left(\frac{x-9}{x+3x^{1/2}+9} : \frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{0,5} - x^{0,5}.$

Решение.

ОДЗ:  $0 \leq x \neq 9.$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x-9}{x+3x^{1/2}+9} : \frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{0,5} - x^{0,5} &= \left(\frac{x-9}{(\sqrt{x})^2+3\sqrt{x}+9} : \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x})^3-3^3}\right)^{0,5} - \\
-\sqrt{x} &= \sqrt{\frac{(\sqrt{x})^2-3^2}{(\sqrt{x})^2+3\sqrt{x}+9} \cdot \frac{(\sqrt{x})^3-3^3}{\sqrt{x}+3}} - \sqrt{x} = \\
&= \sqrt{\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x})^2+3\sqrt{x}+9} \cdot \frac{(\sqrt{x}-3)((\sqrt{x})^2+3\sqrt{x}+9)}{\sqrt{x}+3}} - \sqrt{x} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(\sqrt{x}-3)^2} - \sqrt{x} = |\sqrt{x}-3| - \sqrt{x} = \\
&= \begin{cases} -\sqrt{x}+3-\sqrt{x}=3-2\sqrt{x} & \text{при } x \in [0; 9) \\ \sqrt{x}-3-\sqrt{x}=-3 & \text{при } x \in (9; \infty) \end{cases}
\end{aligned}$$

**Ответ:**  $3-2\sqrt{x}$ , если  $x \in [0; 9)$ ;  $-3$ , если  $x \in (9; \infty)$ .

$$2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2}-1$$

**2.210.**

$$\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2}-1-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2}-1}$$

**Решение.**

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2}-1}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2}-1-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)} = \frac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1+a}{\sqrt{a}}\right)^2}-1}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1+a}{\sqrt{a}}\right)^2}-1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-a}{\sqrt{a}}\right)} = \\
&= \frac{2\sqrt{\frac{1+2a+a^2}{4a}}-1}{2\sqrt{\frac{1+2a+a^2}{4a}}-1-\frac{1-a}{2\sqrt{a}}} = \frac{2\sqrt{\frac{1+2a+a^2-4a}{4a}}}{2\sqrt{\frac{1+2a+a^2-4a}{4a}}-\frac{1-a}{2\sqrt{a}}} = \\
&= \frac{2\sqrt{\frac{1-2a+a^2}{4a}}}{2\sqrt{\frac{1-2a+a^2}{4a}}-\frac{1-a}{2\sqrt{a}}} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{(1-a)^2}}{2\sqrt{a}}}{\frac{|1-a|}{\sqrt{a}}-\frac{1-a}{2\sqrt{a}}} = \frac{|1-a|}{\sqrt{a}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{|1-a|}{\sqrt{a}}}{\frac{2 \cdot |1-a| - (1-a)}{2\sqrt{a}}} = \frac{|1-a|}{\sqrt{a}} \cdot \frac{2\sqrt{a}}{2 \cdot |1-a| - (1-a)} = \frac{2 \cdot |1-a|}{2 \cdot |1-a| - (1-a)} = \\
&= \begin{cases} \frac{2(1-a)}{2(1-a) - (1-a)} = \frac{2(1-a)}{1-a} = 2, \text{ если } a \in (0; 1); \\ \frac{-2(1-a)}{-2(1-a) - (1-a)} = \frac{-2(1-a)}{-3(1-a)} = \frac{2}{3}, \text{ если } a \in (1; \infty). \end{cases}
\end{aligned}$$

*Ответ:* 2, если  $a \in (0; 1)$ ;  $\frac{2}{3}$ , если  $a \in (1; \infty)$ .

**2.211.**  $(z^2 - z + 1) : \left( \left( z^2 + \frac{1}{z^2} \right)^2 + 2 \cdot \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 - 3 \right)^{1/2}$ .

*Решение.*

*ОДЗ:*  $z \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
&(z^2 - z + 1) : \left( \left( z^2 + \frac{1}{z^2} \right)^2 + 2 \cdot \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 - 3 \right)^{1/2} = \\
&= (z^2 - z + 1) : \left( \left( \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 - 2 \right)^2 + 2 \cdot \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 - 3 \right)^{1/2} = \\
&= (z^2 - z + 1) : \left( \left( z + \frac{1}{z} \right)^4 - 4 \cdot \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 + 4 + 2 \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 - 3 \right)^{1/2} = \\
&= (z^2 - z + 1) : \left( \left( z + \frac{1}{z} \right)^4 - 2 \cdot \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 + 1 \right)^{1/2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (z^2 - z + 1) \cdot \sqrt{\left( \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 - 1 \right)^2} = \frac{z^2 - z + 1}{\left( z + \frac{1}{z} \right)^2 - 1} = \\
 &= \frac{z^2 - z + 1}{\left( z + \frac{1}{z} - 1 \right) \left( z + \frac{1}{z} + 1 \right)} = \frac{z^2 - z + 1}{\frac{(z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1)}{z^2}} = \frac{z^2}{z^2 + z + 1}.
 \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{z^2}{z^2 + z + 1}$ .

**2.212.**  $(x^4 - 7x^2 + 1)^{-2} \cdot \left[ \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 - 14 \cdot \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 + 77 \right]; \quad x = \frac{\sqrt[4]{125}}{5}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 &(x^4 - 7x^2 + 1)^{-2} \cdot \left[ \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 - 14 \cdot \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 + 77 \right] = \\
 &= \frac{1}{(x^4 - 7x^2 + 1)^2} \cdot \left[ \left( \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \right)^2 - 14 \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 + 77 \right] = \\
 &= \frac{1}{(x^4 - 7x^2 + 1)^2} \cdot \left[ \left( x + \frac{1}{x} \right)^4 - 4 \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 + 4 - 14 \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 + 77 \right] = \\
 &= \frac{1}{(x^4 - 7x^2 + 1)^2} \cdot \left[ \left( x + \frac{1}{x} \right)^4 - 18 \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 + 81 \right] = \\
 &= \frac{1}{(x^4 - 7x^2 + 1)^2} \cdot \left[ \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 - 9 \right]^2 = \frac{1}{(x^4 - 7x^2 + 1)^2} \cdot \left[ \left( \frac{x^2 + 1}{x} \right)^2 - 9 \right]^2 =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(x^4 - 7x^2 + 1)^2} \cdot \left( \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2} - 9 \right)^2 = \\
&= \frac{1}{(x^4 - 7x^2 + 1)^2} \cdot \left( \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - 9x^2}{x^2} \right)^2 = \\
&= \frac{1}{(x^4 - 7x^2 + 1)^2} \cdot \frac{(x^4 - 7x^2 + 1)^2}{x^4} = \frac{1}{x^4} = \frac{1}{\left( \frac{\sqrt[4]{125}}{5} \right)^4} = 5.
\end{aligned}$$

Ответ: 5.

$$2.213. \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{x^2 - 1}{2x} \right)^2}}{(x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x}}.$$

Решение.

ОДЗ:  $x \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{1 + \left( \frac{x^2 - 1}{2x} \right)^2}}{(x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2}}}{\frac{x^2 + 1}{x}} = \frac{\sqrt{\frac{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2}}}{\frac{x^2 + 1}{x}} = \\
&= \frac{\sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2}}}{\frac{x^2 + 1}{x}} = \frac{\sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{4x^2}}}{\frac{x^2 + 1}{x}} = \frac{\frac{x^2 + 1}{2 \cdot |x|}}{\frac{x^2 + 1}{x}} = \frac{x}{2 \cdot |x|} = \\
&= \begin{cases} -\frac{x}{2x} = -\frac{1}{2}, & \text{если } x \in (-\infty; 0); \\ \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}, & \text{если } x \in (0; \infty). \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ:  $-\frac{1}{2}$ , если  $x \in (-\infty; 0)$ ;  $\frac{1}{2}$ , если  $x \in (0; \infty)$ .

$$2.214. \frac{x^2 + 4}{x \sqrt{4 + \left(\frac{x^2 - 4}{2x}\right)^2}}$$

Решение.

ОДЗ:  $x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 4}{x \sqrt{4 + \left(\frac{x^2 - 4}{2x}\right)^2}} &= \frac{x^2 + 4}{x \sqrt{4 + \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{4x^2}}} = \frac{x^2 + 4}{x \sqrt{\frac{16x^2 + x^4 - 8x^2 + 16}{4x^2}}} = \\ &= \frac{x^2 + 4}{x \sqrt{\frac{x^4 + 8x^2 + 16}{4x^2}}} = \frac{x^2 + 4}{x \sqrt{\frac{(x^2 + 4)^2}{4x^2}}} = \frac{x^2 + 4}{\frac{x(x^2 + 4)}{2 \cdot |x|}} = \\ &= \begin{cases} -\frac{2x}{x} = -2, & \text{если } x \in (-\infty; 0); \\ \frac{2x}{x} = 2, & \text{если } x \in (0; \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:  $-2$ , если  $x \in (-\infty; 0)$ ;  $2$ , если  $x \in (0; \infty)$ .

$$2.215. \left( (z-3)(z+3)^{-1} - \frac{(z+3)^{3/2}}{\sqrt{(z^2-9)(z-3)}} \right) \cdot \frac{\frac{1}{3} - \frac{z}{18} - \frac{1}{2z}}{(z+3)^{-1}}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} z \neq 0, \\ z > -3, \\ z \neq 3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left( (z-3)(z+3)^{-1} - \frac{(z+3)^{3/2}}{\sqrt{(z^2-9)(z-3)}} \right) \cdot \frac{1}{3} - \frac{z}{18} - \frac{1}{2z} = \\ & = \left( \frac{z-3}{z+3} - \frac{\sqrt{(z+3)^3}}{\sqrt{(z-3)^2(z+3)}} \right) \cdot \frac{6z-z^2-9}{18z} = \left( \frac{z-3}{z+3} - \frac{\sqrt{(z+3)^2}}{\sqrt{(z-3)^2}} \right) \times \\ & \times \frac{-(z^2-6z+9)}{18z} : \frac{1}{z+3} = \left( \frac{z-3}{z+3} - \frac{z+3}{|z-3|} \right) \cdot \frac{-(z-3)^2(z+3)}{18z}. \end{aligned}$$

Раскрывая модуль с учетом ОДЗ, получаем два случая:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} z \in (-3; 0) \cup (0; 3), \\ \left( \frac{z-3}{z+3} + \frac{z+3}{z-3} \right) \cdot \frac{-(z-3)^2(z+3)}{18z} = \frac{(z-3)^2 + (z+3)^2}{(z+3)(z-3)} \cdot \frac{-(z-3)^2(z+3)}{18z} = \\ = -\frac{2(z^2+9)(z-3)}{18z} = -\frac{(z^2+9)(z-3)}{9z} = \frac{(z^2+9)(3-z)}{9z}, \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} z \in (3; \infty), \\ \left( \frac{z-3}{z+3} - \frac{z+3}{z-3} \right) \cdot \frac{-(z-3)^2(z+3)}{18z} = \frac{(z-3)^2 - (z+3)^2}{(z+3)(z-3)} \cdot \frac{-(z-3)^2(z+3)}{18z} = \\ = \frac{12z(z-3)}{18z} = \frac{2(z-3)}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{(z^2+9)(3-z)}{9z}$ , если  $z \in (-3; 0) \cup (0; 3)$ ;  $\frac{2(z-3)}{3}$ , если

$z \in (3; \infty)$ .

$$2.216. \frac{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} + \sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} - \sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} m > 2, \\ m < -2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} + \sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} - \sqrt{\frac{m-2}{m+2}}} = \frac{\left(\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} + \sqrt{\frac{m-2}{m+2}}\right) \left(\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} + \sqrt{\frac{m-2}{m+2}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} - \sqrt{\frac{m-2}{m+2}}\right) \left(\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} + \sqrt{\frac{m-2}{m+2}}\right)} = \\
& = \frac{\left(\sqrt{\frac{m+2}{m-2}} + \sqrt{\frac{m-2}{m+2}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}\right)^2} = \frac{\frac{m+2}{m-2} + 2 + \frac{m-2}{m+2}}{\frac{m+2}{m-2} - \frac{m-2}{m+2}} = \\
& = \frac{(m+2)^2 + 2(m+2)(m-2) + (m-2)^2}{(m-2)(m+2)} = \frac{(m+2+m-2)^2}{(m+2)^2 - (m-2)^2} = \frac{4m^2}{4m+4m} = \frac{4m^2}{8m} = \frac{m}{2}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{m}{2}$ .

$$2.217. \frac{b^{-1/6} \cdot \sqrt{a^3 b} \cdot \sqrt[3]{a^3 b} - \sqrt{a^3 b^2} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{(2a^2 - b^2 - ab) \cdot \sqrt[6]{a^9 b^4}} : \left( \frac{3a^3}{2a^2 - ab - b^2} - \frac{ab}{a-b} \right)$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} b \neq 0, \\ ab > 0, \\ a \neq b, \\ a \neq -\frac{b}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{b^{-1/6} \cdot \sqrt{a^3 b} \cdot \sqrt[3]{a^3 b} - \sqrt{a^3 b^2} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{(2a^2 - b^2 - ab) \cdot \sqrt[6]{a^9 b^4}} : \left( \frac{3a^3}{2a^2 - ab - b^2} - \frac{ab}{a-b} \right) = \\
& = \frac{\sqrt[6]{b^{-1}} \cdot \sqrt[6]{a^9 b^3} \cdot \sqrt[6]{a^6 b^2} - \sqrt[6]{a^9 b^6} \cdot \sqrt[6]{b^4}}{(a-b)(2a+b) \sqrt[6]{a^9 b^4}} : \left( \frac{3a^3}{(a-b)(2a+b)} - \frac{ab}{a-b} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt[6]{a^{15}b^5} - \sqrt[6]{a^9b^{10}}}{(a-b)(2a+b)\sqrt[6]{a^9b^4}} \cdot \frac{3a^3 - ab(2a+b)}{(a-b)(2a+b)} = \frac{\sqrt[6]{a^9b^4(a-b)}}{(a-b)(2a+b)\sqrt[6]{a^9b^4}}; \\
&\cdot \frac{3a^3 - 2a^2b - ab^2}{(a-b)(2a+b)} = \frac{1}{2a+b} \cdot \frac{(a-b)2a+b}{3a^3 - 2a^2b - ab^2} = \frac{a-b}{(2a^3 - 2a^2b) + (a^3 - ab^2)} = \\
&= \frac{a-b}{2a^2(a-b) + a(a^2 - b^2)} = \frac{a-b}{2a^2(a-b) + a(a-b)(a+b)} = \\
&= \frac{a-b}{(a-b)(2a^2 + a(a+b))} = \frac{1}{3a^2 + ab} = \frac{1}{a(3a+b)}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1}{a(3a+b)}$ .

2.218.  $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$ .

Решение.

ОДЗ:  $x \geq 2$ .

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}} = \\
&= \sqrt{x-2+2\sqrt{2(x-2)}+2} + \sqrt{x-2-2\sqrt{2(x-2)}+2} = \\
&= \sqrt{(\sqrt{x-2})^2 + 2\sqrt{2(x-2)} + (\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{x-2})^2 - 2\sqrt{2(x-2)} + (\sqrt{2})^2} = \\
&= \sqrt{(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{x-2} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{x-2} + \sqrt{2} + |\sqrt{x-2} - \sqrt{2}| = \\
&= \begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{2} - \sqrt{x-2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} & \text{при } \sqrt{x-2} - \sqrt{2} < 0 \text{ или } 2 \leq x < 4; \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{2} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{x-2} & \text{при } \sqrt{x-2} - \sqrt{2} \geq 0 \text{ или } x \geq 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ:  $2\sqrt{2}$ , если  $x \in [2; 4)$ ;  $2\sqrt{x-2}$ , если  $x \in [4; \infty)$ .

2.219.  $\left( \frac{9}{a+8} - \frac{a^{1/3} + 2}{a^{2/3} - 2a^{1/3} + 4} \right) \cdot \frac{a^{4/3} + 8a^{1/3}}{1 - a^{2/3}} + \frac{5 - a^{2/3}}{1 + a^{1/3}}$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} a \neq -8, \\ a \neq \pm 1. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{9}{a+8} - \frac{a^{1/3}+2}{a^{2/3}-2a^{1/3}+4} \right) \cdot \frac{a^{4/3}+8a^{1/3}}{1-a^{2/3}} + \frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}} = \\
& = \left( \frac{9}{(a^{1/3}+2)(a^{2/3}-2a^{1/3}+4)} - \frac{a^{1/3}+2}{a^{2/3}-2a^{1/3}+4} \right) \cdot \frac{a^{1/3}(a+8)}{(1-a^{1/3})(1+a^{1/3})} + \\
& + \frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}} = \frac{3^2 - (a^{1/3}+2)^2}{(a^{1/3}+2)(a^{2/3}-2a^{1/3}+4)} \cdot \frac{a^{1/3}(a+8)}{(1-a^{1/3})(1+a^{1/3})} + \frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}} = \\
& = \frac{(3-a^{1/3}-2)(3+a^{1/3}+2)}{a+8} \cdot \frac{a^{1/3}(a+8)}{(1-a^{1/3})(1+a^{1/3})} + \frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}} = \\
& = \frac{(5+a^{1/3})a^{1/3}}{1+a^{1/3}} + \frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}} = \frac{5a^{1/3}+a^{2/3}+5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}} = \frac{5a^{1/3}+5}{1+a^{1/3}} = \\
& = \frac{5(a^{1/3}+1)}{1+a^{1/3}} = 5.
\end{aligned}$$

Ответ: 5.

2.220. 
$$\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}}$$

Решение.

ОДЗ:  $a \geq b$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a+b+2\sqrt{(a+b)(a-b)}}+a-b-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b-2\sqrt{(a+b)(a-b)}}+a-b+\sqrt{a-b}} = \\
& = \frac{\sqrt{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})^2}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2}+\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}-\sqrt{a-b}}{|\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}|+\sqrt{a-b}} = \\
& = \frac{\sqrt{a+b}}{|\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}|+\sqrt{a-b}} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{a+b}}{-\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} + \sqrt{a-b}} - \frac{\sqrt{a+b}}{2\sqrt{a-b} - \sqrt{a+b}} \text{ при } \sqrt{a+b} < \sqrt{a-b}, \\ \text{или } 0 < -b \leq a; \\ \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} + \sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}} = 1 \text{ при } \sqrt{a+b} \geq \sqrt{a-b}, \\ \text{или } 0 \leq b \leq a. \end{cases}$$

Ответ: 1 при  $0 \leq b \leq a$ ,  $a \neq 0$ ,  $\frac{\sqrt{a+b}}{2\sqrt{a-b} - \sqrt{a+b}}$  при  $0 < -b \leq a$ .

$$2.221. \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3})}{2 + \sqrt{1-x^2}}.$$

Решение.

ОДЗ:  $-1 \leq x \leq 1$ .

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3})}{2 + \sqrt{1-x^2}} = \\ & = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(1+x + \sqrt{(1+x)(1-x)} + 1-x)}{2 + \sqrt{1-x^2}} = \\ & = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(2 + \sqrt{1-x^2})}{2 + \sqrt{1-x^2}} = \\ & = \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = \\ & = \sqrt{\frac{1+x+2\sqrt{1-x^2}+1-x}{2}} \cdot (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}{2}} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = \\
 &= \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{2}} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = \frac{1+x-1-x}{\sqrt{2}} = \frac{2x}{\sqrt{2}} = x\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $x\sqrt{2}$ .

2.222.  $\left(\frac{2-n}{n-1} + 4 \cdot \frac{m-1}{m-2}\right) : \left(n^2 \cdot \frac{m-1}{n-1} + m^2 \cdot \frac{2-n}{m-2}\right); m = \sqrt[4]{400}, n = \sqrt{5}$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{2-n}{n-1} + 4 \cdot \frac{m-1}{m-2}\right) : \left(n^2 \cdot \frac{m-1}{n-1} + m^2 \cdot \frac{2-n}{m-2}\right) = \\
 &= \frac{(2-n)(m-2) + 4(m-1)(n-1)}{(n-1)(m-2)} : \frac{n^2(m-1)(m-2) + m^2(2-n)(n-1)}{(n-1)(m-2)} = \\
 &= \frac{3mn - 2(m+n)}{(n-1)(m-2)} : \frac{(m-n)(3mn - 2(m+n))}{(n-1)(m-2)} = \\
 &= \frac{3mn - 2(m+n)}{(n-1)(m-2)} \cdot \frac{(n-1)(m-2)}{(m-n)(3mn - 2(m+n))} = \frac{1}{m-n} = \frac{1}{\sqrt[4]{400} - \sqrt{5}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{20} - \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5} - \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

2.223.  $\frac{\sqrt{\frac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}} + \sqrt{\frac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}{\sqrt{\frac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}} - \sqrt{\frac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} a > 2, \\ a \neq 3. \end{cases}$



$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\frac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}} + \sqrt{\frac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}{\sqrt{\frac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}} - \sqrt{\frac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}} = \\
& \frac{\sqrt{\frac{1}{a-2+2\sqrt{a-2}+1}} + \sqrt{\frac{1}{a-2-2\sqrt{a-2}+1}}}{\sqrt{\frac{1}{a-2+2\sqrt{a-2}+1}} - \sqrt{\frac{1}{a-2-2\sqrt{a-2}+1}}} = \\
& \frac{\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{a-2})^2+2\sqrt{a-2}+1}} + \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{a-2})^2-2\sqrt{a-2}+1}}}{\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{a-2})^2+2\sqrt{a-2}+1}} - \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{a-2})^2-2\sqrt{a-2}+1}}} = \\
& \frac{\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{a-2}+1)^2}} + \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{a-2}-1)^2}}}{\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{a-2}+1)^2}} - \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{a-2}-1)^2}}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{1}{\sqrt{a-2}+1} + \frac{1}{|\sqrt{a-2}-1|}}{\frac{1}{\sqrt{a-2}+1} - \frac{1}{|\sqrt{a-2}-1|}} = \frac{\frac{|\sqrt{a-2}-1| + \sqrt{a-2}+1}{(\sqrt{a-2}+1) \cdot |\sqrt{a-2}-1|}}{\frac{|\sqrt{a-2}-1| - \sqrt{a-2}-1}{(\sqrt{a-2}+1) \cdot |\sqrt{a-2}-1|}} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{|\sqrt{a-2}-1| + \sqrt{a-2}+1}{|\sqrt{a-2}-1| - \sqrt{a-2}-1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-\sqrt{a-2}+1+\sqrt{a-2}+1}{-\sqrt{a-2}+1-\sqrt{a-2}-1} = \frac{2}{-2\sqrt{a-2}} = -\frac{1}{\sqrt{a-2}} & \text{при } \sqrt{a-2}-1 < 0 \\ & \text{или } 2 < a < 3; \\ \frac{\sqrt{a-2}-1+\sqrt{a-2}+1}{\sqrt{a-2}-1-\sqrt{a-2}-1} = \frac{2\sqrt{a-2}}{-2} = -\sqrt{a-2} & \text{при } \sqrt{a-2}-1 > 0 \\ & \text{или } a > 3. \end{cases}$$

Ответ:  $-\frac{1}{\sqrt{a-2}}$ , если  $a \in (2; 3)$ ;  $-\sqrt{a-2}$ , если  $a \in (3; \infty)$ .

$$2.224. \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} + |x - 2|.$$

Решение.

ОДЗ:  $x \neq -2$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} + |x - 2| &= \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2}} + |x - 2| = \frac{1}{|x+2|} + |x - 2| = \\ &= \frac{1 + |x+2| \cdot |x-2|}{|x+2|} = \frac{1 + |(x+2)(x-2)|}{|x+2|} = \frac{1 + |x^2 - 4|}{|x+2|} = \\ &= \begin{cases} \frac{1 + x^2 - 4}{-(x+2)} = \frac{x^2 - 3}{-(x+2)} = \frac{3 - x^2}{x+2} & \text{при } x < -2; \\ \frac{1 - (x^2 - 4)}{x+2} = \frac{5 - x^2}{x+2} & \text{при } -2 < x < 2; \\ \frac{1 + x^2 - 4}{x+2} = \frac{x^2 - 3}{x+2} & \text{при } x \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{3-x^2}{x+2}$ , если  $x \in (-\infty; -2)$ ;  $\frac{5-x^2}{x+2}$ , если  $x \in (-2; 2)$ ;

$\frac{x^2 - 3}{x+2}$ , если  $x \in [2; \infty)$ .

$$2.225. \left( x^2 - 6x + 1 + \left( \frac{\frac{x-3}{1+3x} - \frac{x-5}{1+5x}}{1 + \frac{(x-5)(x-3)}{(1+5x)(1+3x)}} \right)^{-1} \right)^{1/2}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq -\frac{1}{3}, \\ x \neq -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \left( x^2 - 6x + 1 + \left( \frac{x-3}{1+3x} - \frac{x-5}{(x-5)(x-3)} \right)^{-1} \right)^{1/2} = \\
& = \left( x^2 - 6x + 1 + \left( \frac{(x-3)(1+5x) - (x-5)(1+3x)}{(1+3x)(1+5x)} \right)^{-1} \right)^{1/2} = \\
& = \left( x^2 - 6x + 1 + \left( \frac{(x-3)(1+5x) - (x-5)(1+3x)}{(1+5x)(1+3x) + (x-5)(x-3)} \right)^{-1} \right)^{1/2} = \\
& = \left( x^2 - 6x + 1 + \left( \frac{2x^2 + 2}{16x^2 + 16} \right)^{-1} \right)^{1/2} = \left( x^2 - 6x + 1 + \left( \frac{2(x^2 + 1)}{16(x^2 + 1)} \right)^{-1} \right)^{1/2} = \\
& = \left( x^2 - 6x + 1 + \left( \frac{1}{8} \right)^{-1} \right)^{1/2} = (x^2 - 6x + 1 + 8)^{1/2} = (x^2 - 6x + 9)^{1/2} = \\
& = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = \\
& = \begin{cases} -x+3 = 3-x, & \text{если } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}; 3\right) \\ x-3, & \text{если } x \in [3; \infty). \end{cases}
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $-(x-3)$ , если  $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}; 3\right)$ ;

$x-3$ , если  $x \in [3; \infty)$ .

**2.226.**  $\left( \frac{1}{(x+3)^2} \cdot \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{9} \right) + \frac{2}{(x+3)^3} \cdot \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \right) \right)^{-1/2}$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{(x+3)^2} \cdot \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{9} \right) + \frac{2}{(x+3)^3} \cdot \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \right) \right)^{-1/2} = \\
& = \left( \frac{1}{(x+3)^2} \cdot \frac{x^2+9}{9x^2} + \frac{2}{(x+3)^3} \cdot \frac{x+3}{3x} \right)^{-1/2} = \\
& = \left( \frac{x^2+9}{9x^2(x+3)^2} + \frac{2}{3x(x+3)^2} \right)^{-1/2} = \left( \frac{x^2+9+6x}{9x^2(x+3)^2} \right)^{-1/2} = \\
& = \left( \frac{(x+3)^2}{9x^2(x+3)^2} \right)^{-1/2} = \left( \frac{1}{9x^2} \right)^{-1/2} = \sqrt{9x^2} = 3 \cdot |x| = \\
& = \begin{cases} -3x, & \text{если } x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0); \\ 3x, & \text{если } x \in (0; \infty) \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ:  $-3x$ , если  $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0)$ ;  $3x$ , если  $x \in (0; \infty)$ .

2.227.  $\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}}$ .

Решение.

ОДЗ:  $a \geq 3$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}} = \frac{\sqrt{a+3+2\sqrt{(a+3)(a-3)}+a-3}}{\sqrt{a+3-2\sqrt{(a+3)(a-3)}+a-3}} = \\
& = \frac{\sqrt{(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})^2}}{\sqrt{(\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3})^2}} = \frac{\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3}} = \\
& = \frac{(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})}{(\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3})(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})} = \frac{(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})^2}{(\sqrt{a+3})^2 - (\sqrt{a-3})^2} = \\
& = \frac{a+3+2\sqrt{(a+3)(a-3)}+a-3}{a+3-a+3} = \frac{2a+2\sqrt{a^2-9}}{6} = \frac{a+\sqrt{a^2-9}}{3}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{a+\sqrt{a^2-9}}{3}$ .

$$2.228. \sqrt{\left(y^2 + \frac{4}{y^2}\right)^2 - 8 \cdot \left(y + \frac{2}{y}\right)^2} + 48.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $y \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(y^2 + \frac{4}{y^2}\right)^2 - 8 \left(y + \frac{2}{y}\right)^2} + 48 &= \sqrt{\left(\left(y + \frac{2}{y}\right)^2 - 4\right)^2 - 8 \left(y + \frac{2}{y}\right)^2} + 48 = \\ &= \sqrt{\left(y + \frac{2}{y}\right)^4 - 8 \left(y + \frac{2}{y}\right)^2 + 16 - 8 \left(y + \frac{2}{y}\right)^2} + 48 = \\ &= \sqrt{\left(y + \frac{2}{y}\right)^4 - 16 \left(y + \frac{2}{y}\right)^2 + 64} = \sqrt{\left(\left(y + \frac{2}{y}\right)^2 - 8\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(y^2 + 4 + \frac{4}{y^2} - 8\right)^2} = \sqrt{\left(y^2 - 4 + \frac{4}{y^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\left(y - \frac{2}{y}\right)^2\right)^2} = \left(y - \frac{2}{y}\right)^2. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\left(y - \frac{2}{y}\right)^2$ .

$$2.229. \frac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{3}}} + \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{3}}}; \quad x = 2.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{3}}} + \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{3}}} &= \frac{(x + \sqrt{3})(\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{3}})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{3}})(\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{3}})} + \\ &+ \frac{(x - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{3}})}{(\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{3}})(\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{3}})} = \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{x + \sqrt{3}} + \sqrt{3x} - \sqrt{3(x + \sqrt{3})}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x + \sqrt{3}})^2} + \\ &+ \frac{x\sqrt{x} + x\sqrt{x - \sqrt{3}} - \sqrt{3x} - \sqrt{3(x - \sqrt{3})}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x - \sqrt{3}})^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{x+\sqrt{3}} + \sqrt{3}x - \sqrt{3(x+\sqrt{3})}}{x-x-\sqrt{3}} + \\
&+ \frac{x\sqrt{x} + x\sqrt{x-\sqrt{3}} - \sqrt{3}x - \sqrt{3(x-\sqrt{3})}}{x-x+\sqrt{3}} = \\
&= \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{x+\sqrt{3}} + \sqrt{3}x - \sqrt{3(x+\sqrt{3})}}{-\sqrt{3}} + \frac{x\sqrt{x} + x\sqrt{x-\sqrt{3}} - \sqrt{3}x - \sqrt{3(x-\sqrt{3})}}{\sqrt{3}} = \\
&= \frac{-x\sqrt{x} + x\sqrt{x+\sqrt{3}} - \sqrt{3}x + \sqrt{3(x+\sqrt{3})} + x\sqrt{x} + x\sqrt{x-\sqrt{3}} - \sqrt{3}x - \sqrt{3(x-\sqrt{3})}}{\sqrt{3}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(x\sqrt{x+\sqrt{3}} + \sqrt{3(x+\sqrt{3})}\right) + \left(x\sqrt{x-\sqrt{3}} - \sqrt{3(x-\sqrt{3})}\right) - 2\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} = \\
&= \frac{\sqrt{x+\sqrt{3}}(x+\sqrt{3}) + \sqrt{x-\sqrt{3}}(x-\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} = \\
&= \frac{\sqrt{(x+\sqrt{3})^3} + \sqrt{(x-\sqrt{3})^3} - 2\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} = \\
&= \frac{\sqrt{(x+\sqrt{3})^3} + \sqrt{(x-\sqrt{3})^3}}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{x} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{3}} + \sqrt{x-\sqrt{3}}\right)\left(x+\sqrt{3} - \sqrt{x^2-3} + x-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{x} = \\
&= \frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right) \cdot 3}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2} = \sqrt{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{2} = \\
&= \sqrt{2+\sqrt{3}+2+2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{2} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\sqrt{2}$ .

$$2.230. \frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}} - \frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}}; \quad x=3.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}} - \frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}} = \frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2}} - \frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}} - \sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}} = \\ & = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}} - \sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-8}} = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{9-8}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \\ & = \sqrt{\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2} = \\ & = \sqrt{3+2\sqrt{2} - 2\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} + 3-2\sqrt{2}} = \sqrt{6-2\sqrt{9-8}} = \\ & = \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2. \end{aligned}$$

*Ответ:* 2.

$$2.231. \frac{1+z}{1+\sqrt{1+z}} - \frac{1-z}{1-\sqrt{1-z}}; \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{1+z}{1+\sqrt{1+z}} - \frac{1-z}{1-\sqrt{1-z}} = \frac{(1+z)(1-\sqrt{1+z})}{(1+\sqrt{1+z})(1-\sqrt{1+z})} - \frac{(1-z)(1+\sqrt{1-z})}{(1-\sqrt{1-z})(1+\sqrt{1-z})} = \\ & = \frac{1-\sqrt{1+z}+z-z\sqrt{1+z}}{1-1-z} - \frac{1+\sqrt{1-z}-z-z\sqrt{1-z}}{1-1+z} = \\ & = \frac{1+z-\sqrt{1+z}(1+z)}{-z} - \frac{1-z+\sqrt{1-z}(1-z)}{z} = \\ & = \frac{-1-z+\sqrt{1+z} \cdot (1+z) - 1+z-\sqrt{1-z} \cdot (1-z)}{z} = \\ & = \frac{\sqrt{1+z} \cdot (1+z) - \sqrt{1-z} \cdot (1-z) - 2}{z} = \frac{\sqrt{(1+z)^3} - \sqrt{(1-z)^3} - 2}{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{1+z})^3 - (\sqrt{1-z})^3}{z} \cdot \frac{2}{z} = \frac{(\sqrt{1+z} - \sqrt{1-z}) \left(1+z + \sqrt{1+z^2} + 1-z\right)}{z} \cdot \frac{2}{z} = \\
&= \frac{\sqrt{1+z} - 2\sqrt{1-z^2} + 1-z}{z} \cdot \left(2 + \sqrt{1-z^2}\right) \cdot \frac{2}{z} = \\
&= \frac{\sqrt{2-2\sqrt{1-z^2}} \cdot \left(2 + \sqrt{1-z^2}\right)}{z} \cdot \frac{2}{z} = \frac{\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{3}{4}}} \cdot \left(2 + \sqrt{\frac{1}{4}}\right) - 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\
&= \frac{1 \cdot \frac{5}{2} - 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

2.232.  $\frac{a^2 - 3}{\sqrt{\left(\frac{a^2 + 3}{2a}\right)^2 - 3}}$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq \pm\sqrt{3}. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2 - 3}{\sqrt{\left(\frac{a^2 + 3}{2a}\right)^2 - 3}} = \frac{a^2 - 3}{\sqrt{\frac{a^4 + 6a^2 + 9}{4a^2} - 3}} = \frac{a^2 - 3}{\sqrt{\frac{a^4 + 6a^2 + 9 - 12a^2}{4a^2}}} = \\
&= \frac{a^2 - 3}{\sqrt{\frac{a^4 - 6a^2 + 9}{4a^2}}} = \frac{a^2 - 3}{\sqrt{\left(\frac{a^2 - 3}{2a}\right)^2}} = \frac{a^2 - 3}{\left|\frac{a^2 - 3}{2a}\right|} = \frac{2(a^2 - 3) \cdot |a|}{|a^2 - 3|} =
\end{aligned}$$



$$= \begin{cases} \frac{-2(a^2-3)a}{a^2-3} = -2a, \text{ если } a < -\sqrt{3}; \\ \frac{-2(a^2-3)a}{-(a^2-3)} = 2a, \text{ если } -\sqrt{3} < a < 0; \\ \frac{2(a^2-3)a}{-(a^2-3)} = -2a, \text{ если } 0 < a < \sqrt{3}; \\ \frac{2(a^2-3)a}{a^2-3} = 2a, \text{ если } a > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Ответ:  $-2a$ , если  $a \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$ ;  $2a$ , если  $a \in (-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; \infty)$ .

$$2.233. \frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}} - \sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}} - \frac{1}{\sqrt{a-1}}} : \frac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1} - (a+1)\sqrt{a-1}} - (1-a^2).$$

Решение.

ОДЗ:  $a > 1$ .

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}} - \sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}} - \frac{1}{\sqrt{a-1}}} : \frac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1} - (a+1)\sqrt{a-1}} - (1-a^2) = \\ & = \frac{1 - \sqrt{(a-1)(a+1)}}{\sqrt{a-1}} : \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{(a-1)(a+1)} \cdot (\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1})} - (1-a^2) = \\ & = \frac{1 - \sqrt{(a-1)(a+1)}}{\sqrt{a-1}} \cdot \frac{\sqrt{(a-1)(a+1)}}{\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1}} \cdot \frac{\sqrt{(a-1)(a+1)} \cdot (\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1})}{\sqrt{a+1}} - \\ & - (1-a^2) = (1 - \sqrt{(a-1)(a+1)}) \cdot \sqrt{(a-1)(a+1)} - (1-a^2) = \\ & = (1 - \sqrt{a^2-1})\sqrt{a^2-1} - 1 + a^2 = \sqrt{a^2-1} - a^2 + 1 - 1 + a^2 = \sqrt{a^2-1}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\sqrt{a^2-1}$ .

$$2.234. \frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1} + \frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1}; \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1} + \frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1} &= \frac{x+x\sqrt{1+x}-1-\sqrt{1+x}+x+x\sqrt{1-x}+1+\sqrt{1-x}}{x^2-1} \\ &= \frac{2x-(1-x)\sqrt{1+x}+(1+x)\sqrt{1-x}}{x^2-1} = \\ &= \frac{\sqrt{3}-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\frac{3}{4}-1} = \\ &= (-4) \cdot \left( \sqrt{3} - \frac{2-\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} + \frac{2+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} \right) = \\ &= -4\sqrt{3} + (2-\sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - (2+\sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \\ &= -4\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 + 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3 = -4\sqrt{3} - 2. \end{aligned}$$

Ответ:  $-2-4\sqrt{3}$ .

$$2.235. \frac{(x+1)^{-1/2}}{(x-1)^{-1/2} - (x+1)^{-1/2}}; \quad x = \frac{a^2+1}{2a}.$$

Решение.

ОДЗ:  $0 < a \neq 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)^{-1/2}}{(x-1)^{-1/2} - (x+1)^{-1/2}} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \\ &= \frac{\sqrt{x-1} \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x-1} \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{x-1} \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{x+1-x-1} = \frac{\sqrt{x-1} \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\frac{a^2+1}{2a}} - 1 \left( \sqrt{\frac{a^2+1}{2a}} + 1 + \sqrt{\frac{a^2+1}{2a}} - 1 \right)}{2} = \\
&= \frac{\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{2a}} \left( \sqrt{\frac{a^2+2a+1}{2a}} + \sqrt{\frac{a^2-2a+1}{2a}} \right)}{2} = \\
&= \frac{\sqrt{\frac{(a-1)^2}{2a}} \left( \sqrt{\frac{(a+1)^2}{2a}} + \sqrt{\frac{(a-1)^2}{2a}} \right)}{2} = \frac{|a-1| \left( \frac{a+1}{\sqrt{2a}} + \frac{|a-1|}{\sqrt{2a}} \right)}{2} = \\
&= \frac{|a-1| \cdot (a+1+|a-1|)}{2a} = \frac{|a-1| \cdot (a+1) + (a-1)^2}{4a} = \\
&= \begin{cases} \frac{-(a-1)(a+1) + (a-1)^2}{4a} = \frac{1-a}{2a}, & \text{если } 0 < x < 1; \\ \frac{(a-1)(a+1) + (a-1)^2}{4a} = \frac{a-1}{2}, & \text{если } x > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1-a}{2a}$ , если  $a \in (0; 1)$ ;  $\frac{a-1}{2}$ , если  $a \in (1; \infty)$ .

2.236.  $\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}-z}$ ;  $z = \frac{1}{2} \left( \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} \right)$

Решение.

ОДЗ:  $m > 0$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}-z} &= \frac{\sqrt{z^2-1} \cdot (\sqrt{z^2-1}+z)}{(\sqrt{z^2-1}-z)(\sqrt{z^2-1}+z)} = \frac{\sqrt{z^2-1} \cdot (\sqrt{z^2-1}+z)}{(\sqrt{z^2-1})^2 - z^2} = \\
&= \frac{z^2-1+z\sqrt{z^2-1}}{z^2-1-z^2} = -\left( z^2 + z\sqrt{z^2-1} - 1 \right) = 1 - z^2 - z\sqrt{z^2-1} = \\
&= 1 - \left( \frac{1}{2} \left( \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \sqrt{\left( \frac{1}{2} \left( \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right)^2 - 1} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \left(\frac{m+1}{2\sqrt{m}}\right)^2 - \frac{m+1}{2\sqrt{m}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m+1}{2\sqrt{m}}\right)^2 - 1} = \\
&= 1 - \frac{m^2 + 2m + 1}{4m} - \frac{m+1}{2\sqrt{m}} \cdot \sqrt{\frac{m^2 + 2m + 1}{4m} - 1} = \\
&= \frac{4m - m^2 - 2m - 1}{4m} - \frac{m+1}{2\sqrt{m}} \cdot \sqrt{\frac{m^2 + 2m + 1 - 4m}{4m}} = \\
&= -\frac{(m^2 - 2m + 1)}{4m} - \frac{m+1}{2\sqrt{m}} \sqrt{\frac{m^2 - 2m + 1}{4m}} = -\frac{(m-1)^2}{4m} - \frac{m+1}{2\sqrt{m}} \sqrt{\left(\frac{m-1}{2\sqrt{m}}\right)^2} = \\
&= -\frac{(m-1)^2}{4m} - \frac{m+1}{2\sqrt{m}} \cdot \frac{|m-1|}{2\sqrt{m}} = -\frac{(m-1)^2}{4m} - \frac{(m+1) \cdot |m-1|}{4m} = \\
&= \frac{-(m-1)^2 - (m+1) \cdot |m-1|}{4m} = \\
&= \begin{cases} \frac{-(m-1)^2 + (m+1)(m-1)}{4m} = \frac{-(m-1)^2 + m^2 - 1}{4m} = \frac{m-1}{2m}, & \text{если } m-1 < 0, \\ & \text{или } 0 < m < 1; \\ \frac{-(m-1)^2 - (m+1)(m-1)}{4m} = \frac{-(m-1)^2 - (m^2 - 1)}{4m} = \frac{1-m}{2}, & \text{если } m \geq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{m-1}{2m}$ , если  $m \in (0; 1)$ ;  $\frac{1-m}{2}$ , если  $m \in [1; \infty)$ .

$$2.237. \left( \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} - 2 \right)^{1/2}; \quad x = \frac{a^3 + 1}{a^3 - 1}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a \neq 1, \\ a > 0. \end{cases}$$

$$\left( \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} - 2 \right)^{1/2} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}} - 2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2 - 2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + 1}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}} = \frac{\left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right|}{\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}} =$$

$$= \left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right| \cdot \sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt[3]{\frac{a^3+1}{a^3-1}} - 1 \cdot \sqrt[6]{\frac{a^3+1}{a^3-1}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{a^3+1+a^3-1}{a^3-1}} - 1 \cdot \sqrt[6]{\frac{a^3+1-a^3+1}{a^3-1}} = \sqrt[3]{\frac{2a^3}{2}} - 1 \cdot \sqrt[6]{\frac{2}{2a^3}} =$$

$$= |a-1| \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = \begin{cases} \frac{-(a-1)}{\sqrt{a}} = \frac{1-a}{\sqrt{a}}, & \text{если } 0 < a < 1; \\ \frac{a-1}{\sqrt{a}}, & \text{если } a > 1. \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{1-a}{\sqrt{a}}$ , если  $a \in (0; 1)$ ;  $\frac{a-1}{\sqrt{a}}$ , если  $a \in (1; \infty)$ .

2.238. 
$$\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{2})^2 - \sqrt{2x}}{x^2 + x - \sqrt{2x} + 2}$$

Решение.

ОДЗ:  $x \geq 0$ .

$$\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{2})^2 - \sqrt{2x}}{x^2 + x - \sqrt{2x} + 2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2\sqrt{2x} + 2 - \sqrt{2x}}{(x^2 + x\sqrt{2x} + 2x) - (x\sqrt{2x} + \sqrt{2x}\sqrt{2x} + 2\sqrt{2x}) + (x + \sqrt{2x} + 2)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x + \sqrt{2x} + 2}{x(x + \sqrt{2x} + 2) - \sqrt{2x}(x + \sqrt{2x} + 2) + (x + \sqrt{2x} + 2)} = \\
 &= \frac{x + \sqrt{2x} + 2}{(x + \sqrt{2x} + 2)(x - \sqrt{2x} + 1)} = \frac{1}{x - \sqrt{2x} + 1}.
 \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{1}{x - \sqrt{2x} + 1}$ .

2.239.  $\left( \frac{\sqrt[4]{8} + 2}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{4} \right) : \left( \frac{\sqrt[4]{8} - 2}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}} - 3\sqrt[12]{128} \right)^{1/2}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{\sqrt[4]{8} + 2}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{4} = \frac{\sqrt[12]{2^9} + \sqrt[12]{2^{12}}}{\sqrt[12]{2^3} + \sqrt[12]{2^4}} - \sqrt[12]{2^8} = \frac{\sqrt[12]{(2^3)^3} + \sqrt[12]{(2^4)^3}}{\sqrt[12]{2^3} + \sqrt[12]{2^4}} - \sqrt[12]{2^8} = \\
 &= \frac{(\sqrt[12]{2^3} + \sqrt[12]{2^4}) (\sqrt[12]{2^6} - \sqrt[12]{2^3} \cdot 2^4 + \sqrt[12]{2^8})}{\sqrt[12]{2^3} + \sqrt[12]{2^4}} - \sqrt[12]{2^8} = \sqrt[12]{2^6} - \sqrt[12]{2^7} = \\
 &= \sqrt[12]{2^6} (1 - \sqrt[12]{2}) = \sqrt{2} (1 - \sqrt[12]{2}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y &= \sqrt{\frac{\sqrt[4]{8} - 2}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}} - 3\sqrt[12]{128}} = \sqrt{\frac{\sqrt[12]{2^9} - \sqrt[12]{2^{12}}}{\sqrt[12]{2^3} - \sqrt[12]{2^4}} - 3\sqrt[12]{2^7}} = \\
 &= \sqrt{\frac{(\sqrt[12]{2^3} - \sqrt[12]{2^4}) (\sqrt[12]{2^6} + \sqrt[12]{2^7} + \sqrt[12]{2^8})}{\sqrt[12]{2^3} - \sqrt[12]{2^4}} - 3\sqrt[12]{2^7}} = \\
 &= \sqrt{(\sqrt[12]{2^4} - \sqrt[12]{2^3})^2} = \sqrt[12]{2^3} \cdot (\sqrt[12]{2} - 1) = 4\sqrt{2} \cdot (\sqrt[12]{2} - 1)
 \end{aligned}$$

Тогда  $\frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{2} \cdot (1 - \sqrt[12]{2})}{4\sqrt{2} \cdot (\sqrt[12]{2} - 1)} = -\sqrt[4]{2}$ .

*Ответ:*  $-\sqrt[4]{2}$ .

$$2.240. \frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}}$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{3^2-\sqrt{2^2}\cdot 3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3^3}\cdot 2\right)\cdot\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{27\cdot 4}} = \\ & = \frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt[6]{3^{12}}-\sqrt[6]{2^6}\cdot 3^3}{\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^2}}+\sqrt[6]{3^6}\cdot 2^2\right)\cdot\sqrt[6]{3^3}}}{\sqrt[6]{3^6}+\sqrt[6]{3^3}\cdot 2^2} = \\ & = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt[6]{3^{12}}-\sqrt[6]{2^6}\cdot 3^3+\sqrt[6]{3^9}\cdot 2^2-\sqrt[6]{3^6}\cdot 2^4}{\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^2}}\cdot\sqrt[6]{3^3}}}{\sqrt[6]{3^6}+\sqrt[6]{3^3}\cdot 2^2} = \\ & = \frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt[6]{3^9}-\sqrt[6]{2^6}+\sqrt[6]{3^6}\cdot 2^2-\sqrt[6]{3^3}\cdot 2^4}{\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^2}}\right)\cdot\sqrt[6]{3^3}}}{\sqrt[6]{3^3}\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)} = \\ & = \frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt[6]{3^9}-\sqrt[6]{3^3}\cdot 2^4}{\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^2}}\right)+\left(\frac{\sqrt[6]{3^6}\cdot 2^2-\sqrt[6]{2^6}}{\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^2}}\right)\cdot\sqrt[6]{3^6}}}{\sqrt[6]{3^3}\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)} = \\ & = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt[6]{3^3}\left(\sqrt[6]{3^6}-\sqrt[6]{2^4}\right)+\sqrt[6]{2^2}\left(\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^4}\right)}{\sqrt[6]{3^6}-\sqrt[6]{2^2}}\cdot\sqrt[6]{3^6}}}{\sqrt[6]{3^3}\left(\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{2^2}\right)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\frac{(\sqrt[6]{3^6} - \sqrt[6]{2^4})(\sqrt[6]{3^3} + \sqrt[6]{2^2})}{\sqrt[6]{3^3} - \sqrt[6]{2^2}} \cdot \sqrt[6]{3^6}}}{\sqrt[6]{3^3}(\sqrt[6]{3^3} + \sqrt[6]{2^2})} = \\
&= \frac{\sqrt{\frac{(\sqrt[6]{3^3} - \sqrt[6]{2^2})(\sqrt[6]{3^3} + \sqrt[6]{2^2})(\sqrt[6]{3^3} + \sqrt[6]{2^2})}{\sqrt[6]{3^3} - \sqrt[6]{2^2}} \cdot \sqrt[6]{3^6}}}{\sqrt[6]{3^3}(\sqrt[6]{3^3} + \sqrt[6]{2^2})} = \\
&= \frac{\sqrt{\left((\sqrt[6]{3^3} + \sqrt[6]{2^2}) \cdot \sqrt[6]{3^3}\right)^2}}{\sqrt[6]{3^3}(\sqrt[6]{3^3} + \sqrt[6]{2^2})} = \frac{(\sqrt[6]{3^3} + \sqrt[6]{2^2}) \cdot \sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{3^3}(\sqrt[6]{3^3} + \sqrt[6]{2^2})} = 1.
\end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$2.241. \left( \frac{4-2x+x^2}{4-2x} + \frac{6x^2+8+12x}{4-x^2} - \frac{x^2+2x+4}{2x+4} \right)^{-1/3} \cdot (x+2).$$

Решение.

ОДЗ:  $x \neq \pm 2$ .

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{4-2x+x^2}{4-2x} + \frac{6x^2+8+12x}{4-x^2} - \frac{x^2+2x+4}{2x+4} \right)^{-1/3} \cdot (x+2) = \\
&= \left( -\frac{x^2-2x+4}{2(x-2)} - \frac{6x^2+12x+8}{(x-2)(x+2)} - \frac{x^2+2x+4}{2(x+2)} \right)^{-1/3} \cdot (x+2) = \\
&= -\left( \frac{(x^2-2x+4)(x+2) + 2(6x^2+12x+8) + (x^2+2x+4)(x-2)}{2(x-2)(x+2)} \right)^{-1/3} \times \\
&\times (x+2) = -\left( \frac{2(x^3+6x^2+12x+8)}{2(x-2)(x+2)} \right)^{-1/3} \cdot (x+2) = -\left( \frac{(x+2)^3}{(x-2)(x+2)} \right)^{-1/3} \times \\
&\times (x+2) = -\left( \frac{(x+2)^2}{x-2} \right)^{-1/3} \cdot (x+2) = -\sqrt[3]{\frac{x-2}{(x+2)^2}} \cdot (x+2) =
\end{aligned}$$



$$= -\sqrt[3]{\frac{(x-2)(x+2)^3}{(x+2)^2}} = -\sqrt[3]{(x-2)(x+2)} = -\sqrt[3]{x^2-4} = \sqrt[3]{4-x^2}.$$

Ответ:  $\sqrt[3]{4-x^2}$ .

$$2.242. \left( \frac{\sqrt{(z+2)^2-8z}}{z+2} + \frac{(z-1)^2+3}{z^3+8} \right) : \frac{z^2-3z+2}{z^3-2z^2-4z+8}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} z \neq \pm 2, \\ z \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sqrt{(z+2)^2-8z}}{z+2} + \frac{(z-1)^2+3}{z^3+8} \right) : \frac{z^2-3z+2}{z^3-2z^2-4z+8} = \\ & = \left( \frac{\sqrt{z^2+4z+4-8z}}{z+2} + \frac{z^2-2z+1+3}{(z+2)(z^2-2z+4)} \right) : \frac{(z-2)(z-1)}{(z+2)(z-2)^2} = \\ & = \left( \frac{\sqrt{(z-2)^2}}{z+2} + \frac{1}{z+2} \right) \cdot \frac{(z+2)(z-2)}{z-1} = \left( \frac{|z-2|}{z+2} + \frac{1}{z+2} \right) \cdot \frac{(z+2)(z-2)}{z-1} = \\ & = \frac{|z-2|+1}{z+2} \cdot \frac{(z+2)(z-2)}{z-1} = \frac{(|z-2|+1)(z-2)}{z-1} = \\ & = \begin{cases} \frac{(-z+2+1)(z-2)}{z-1} = \frac{(-z+3)(z-2)}{z-1} = \frac{z^2-5z+6}{1-z}, \\ \text{если } z \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; 2); \\ \frac{(z-2+1)(z-2)}{z-1} = \frac{(z-1)(z-2)}{z-1} = z-2, \text{ если } z \in (2; \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{z^2-5z+6}{1-z}$ , если  $z \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; 2)$ ;  $z-2$ ,

если  $z \in (2; \infty)$ .

$$2.243. \left( \frac{x^4 + 5x^3 + 15x - 9}{x^6 + 3x^4} + \frac{9}{x^4} \right) : \frac{x^3 - 4x + 3x^2 - 12}{x^5}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq \pm 2, \\ x \neq 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{x^4 + 5x^3 + 15x - 9}{x^6 + 3x^4} + \frac{9}{x^4} \right) : \frac{x^3 - 4x + 3x^2 - 12}{x^5} = \\ & = \left( \frac{x^4 + 5x^3 + 15x - 9}{x^4(x^2 + 3)} + \frac{9}{x^4} \right) : \frac{x(x^2 - 4) + 3(x^2 - 4)}{x^5} = \\ & = \frac{x^4 + 5x^3 + 15x - 9 + 9(x^2 + 3)}{x^4(x^2 + 3)} : \frac{(x^2 - 4)(x + 3)}{x^5} = \\ & = \frac{(x^2 - 3)(x^2 + 3) + 5x(x^2 + 3) + 9(x^2 + 3)}{x^4(x^2 + 3)} : \frac{(x - 2)(x + 2)(x + 3)}{x^5} = \\ & = \frac{(x + 3)(x + 2)(x^2 + 3)}{x^4(x^2 + 3)} \cdot \frac{x^5}{(x - 2)(x + 2)(x + 3)} = \frac{x}{x - 2}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{x}{x - 2}$ .

$$2.244. \frac{a(a - 2) - b(b + 2) + \sqrt{ab}(b - a + 2)}{a + b - \sqrt{ab}} : \left( 1 + 2 \cdot \frac{a^2 + b^2 + ab}{b^3 - a^3} \right)$$

Решение.

ОДЗ:  $a \neq b$ ,  $a \neq b + 2$ .

$$\begin{aligned} & \frac{a(a - 2) - b(b + 2) + \sqrt{ab}(b - a + 2)}{a + b - \sqrt{ab}} : \left( 1 + 2 \cdot \frac{a^2 + b^2 + ab}{b^3 - a^3} \right) = \\ & = \frac{a^2 - 2a - b^2 - 2b - \sqrt{ab}(a - b - 2)}{a + b - \sqrt{ab}} : \left( 1 - 2 \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a^3 - b^3} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a^2 - b^2) - (2a + 2b) - \sqrt{ab}(a - b - 2)}{a + b - \sqrt{ab}} : \left( 1 - 2 \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{(a - b)(a^2 + ab + b^2)} \right) = \\
&= \frac{(a - b)(a + b) - 2(a + b) - \sqrt{ab}(a - b - 2)}{a + b - \sqrt{ab}} : \left( 1 - \frac{2}{a - b} \right) = \\
&= \frac{(a + b)(a - b - 2) - \sqrt{ab}(a - b - 2)}{a + b - \sqrt{ab}} : \frac{a - b - 2}{a - b} = \\
&= \frac{(a - b - 2)(a + b - \sqrt{ab})}{a + b - \sqrt{ab}} \cdot \frac{a - b}{a - b - 2} = a - b.
\end{aligned}$$

Ответ:  $a - b$ .

$$2.245. \frac{\left( (x+2)^{-1/2} + (x-2)^{-1/2} \right)^{-1} + \left( (x+2)^{-1/2} - (x-2)^{-1/2} \right)^{-1}}{\left( (x+2)^{-1/2} + (x-2)^{-1/2} \right)^{-1} - \left( (x+2)^{-1/2} - (x-2)^{-1/2} \right)^{-1}}.$$

Решение.

ОДЗ:  $x > 2$ .

$$\begin{aligned}
&\frac{\left( (x+2)^{-1/2} + (x-2)^{-1/2} \right)^{-1} + \left( (x+2)^{-1/2} - (x-2)^{-1/2} \right)^{-1}}{\left( (x+2)^{-1/2} + (x-2)^{-1/2} \right)^{-1} - \left( (x+2)^{-1/2} - (x-2)^{-1/2} \right)^{-1}} = \\
&= \frac{\left( \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right)^{-1} + \left( \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right)^{-1}}{\left( \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right)^{-1} - \left( \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right)^{-1}} = \\
&= \frac{\left( \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2 - 4}} \right)^{-1} + \left( \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2 - 4}} \right)^{-1}}{\left( \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2 - 4}} \right)^{-1} - \left( \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2 - 4}} \right)^{-1}} = \\
&= \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}}}{\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x^2-4} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}} \right)}{\sqrt{x^2-4} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}} \right)} = \\
&= \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2})} = \frac{2\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-2})^2 - (\sqrt{x+2})^2} = \\
&= \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2})} = \frac{-2\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2})^2 - (\sqrt{x+2})^2} = \\
&= -\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = -\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ .

2.246. 
$$\frac{(x^4\sqrt{x} - \sqrt{xy}(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) - y^4\sqrt{y})(x+y+\sqrt{xy})}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})\left((\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})^2 + \sqrt[4]{xy}\right)}$$

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
&\frac{(x^4\sqrt{x} - \sqrt{xy}(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) - y^4\sqrt{y})(x+y+\sqrt{xy})}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})\left((\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})^2 + \sqrt[4]{xy}\right)} = \\
&= \frac{\left(\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[4]{x^2y^2}(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}) - \sqrt[4]{y^5}\right)\left(\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{x^2y^2} + \sqrt[4]{y^4}\right)}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})\left(\sqrt[4]{x^2} - 2\sqrt[4]{xy} + \sqrt[4]{y^2} + \sqrt[4]{xy}\right)} = \\
&= \frac{\left(\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[4]{x^3y^2} - \sqrt[4]{x^2y^3} - \sqrt[4]{y^5}\right)\left(\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{x^2y^2} + \sqrt[4]{y^4}\right)}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})\left(\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{xy} + \sqrt[4]{y^2}\right)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\sqrt[4]{x^3} \left(\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{y^2}\right) + \sqrt[4]{y^3} \left(\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{y^2}\right)\right) \left(\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{x^2 y^2} + \sqrt[4]{y^4}\right)}{\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\right) \left(\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{xy} + \sqrt[4]{y^2}\right)} = \\
&= \frac{\left(\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{y^2}\right) \left(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{y^3}\right) \left(\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{x^2 y^2} + \sqrt[4]{y^4}\right)}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{y^3}} = \\
&= \left(\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{y^2}\right) \left(\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{x^2 y^2} + \sqrt[4]{y^4}\right) = (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left(\sqrt{x^2} + \sqrt{xy} + \sqrt{y^2}\right) = \\
&= \sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}$ .

$$2.247. \frac{ab^{2/3} - \sqrt[3]{b^2} - a + 1}{(1 - \sqrt[3]{a}) \left(\sqrt[3]{a} + 1\right)^2 - \sqrt[3]{a}} \left(b^{1/3} + 1\right) + \sqrt[3]{ab} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} + b^{-1/3}\right)$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a \neq \pm 1, \\ a \neq 0, \\ b \neq -1, \\ b \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{ab^{2/3} - \sqrt[3]{b^2} - a + 1}{(1 - \sqrt[3]{a}) \left(\sqrt[3]{a} + 1\right)^2 - \sqrt[3]{a}} \left(b^{1/3} + 1\right) + \sqrt[3]{ab} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} + b^{-1/3}\right) = \\
&= \frac{a\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{b^2} - a + 1}{(1 - \sqrt[3]{a}) \left(\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[3]{a} + 1 - \sqrt[3]{a}\right) \left(\sqrt[3]{b} + 1\right)} + \sqrt[3]{ab} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right) = \\
&= \frac{\sqrt[3]{b^2} (a - 1) - (a - 1)}{-(\sqrt[3]{a} - 1) \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1\right) \left(\sqrt[3]{b} + 1\right)} + \frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}} + \frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{b}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(a-1)\left(\sqrt[3]{b^2}-1\right)}{-(a-1)\left(\sqrt[3]{b}+1\right)} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a} = \frac{(\sqrt[3]{b}+1)(\sqrt[3]{b}-1)}{-(\sqrt[3]{b}+1)} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a} = \\
 &= -\sqrt[3]{b} + 1 + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a} = 1 + \sqrt[3]{a}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $1 + \sqrt[3]{a}$ .

2.248.  $\frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}} = \\
 &= \frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\right)^2} = \\
 &= \frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{5+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}} \cdot \sqrt{4^2 - \left(\sqrt{5+\sqrt{3}}\right)^2} = \\
 &= \frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}} \cdot \sqrt{16-5-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}} \cdot \sqrt{11-\sqrt{3}} = \\
 &= \frac{\sqrt{(11+\sqrt{3})(11-\sqrt{3})}}{\sqrt{59}} = \frac{\sqrt{11^2 - (\sqrt{3})^2}}{\sqrt{59}} = \frac{\sqrt{118}}{\sqrt{59}} = \sqrt{\frac{118}{59}} = \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\sqrt{2}$ .

2.249.  $\sqrt[4]{\frac{x}{32}} \cdot \frac{(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{2})^2 + (\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{2})^2}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{2x}} : \frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[8]{2x})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[8]{2x})}{2-\sqrt[4]{2x^3}}$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
& \sqrt[4]{\frac{x}{32}} \cdot \frac{(\sqrt[8]{x-8\sqrt{2}})^2 + (\sqrt[8]{x+8\sqrt{2}})^2}{\sqrt{x-4\sqrt{2}x}} : \frac{(\sqrt[4]{x+4\sqrt{2}-\sqrt[8]{2x}})(\sqrt[4]{x+4\sqrt{2}+\sqrt[8]{2x}})}{2-\sqrt[4]{2x^3}} = \\
& = \sqrt[8]{\frac{x^2}{2^{10}}} \cdot \frac{\sqrt[8]{x^2-2\sqrt[8]{2x}} + \sqrt[8]{2^2} + \sqrt[8]{x^2} + 2\sqrt[8]{2x} + \sqrt[8]{2^2}}{\sqrt[8]{x^4-\sqrt[8]{2^2x^2}}} : \\
& : \frac{(\sqrt[8]{x^2+\sqrt[8]{2^2}-\sqrt[8]{2x}})(\sqrt[8]{x^2+\sqrt[8]{2^2}+\sqrt[8]{2x}})}{\sqrt[8]{2^8-\sqrt[8]{2^2x^6}}} = \\
& = \sqrt[8]{\frac{x^2}{2^{10}}} \cdot \frac{2\sqrt[8]{x^2} + 2\sqrt[8]{2^2}}{\sqrt[8]{x^2}(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2})} : \frac{(\sqrt[8]{x^2+\sqrt[8]{2^2}})^2 - (\sqrt[8]{2x})^2}{-\sqrt[8]{2^2}(\sqrt[8]{x^6}-\sqrt[8]{2^6})} = \\
& = \sqrt[8]{\frac{x^2}{2^{10}}} \cdot \frac{2(\sqrt[8]{x^2} + \sqrt[8]{2^2})}{\sqrt[8]{x^2}(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2})} : \frac{\sqrt[8]{x^4} + 2\sqrt[8]{2^2x^2} + \sqrt[8]{2^4} - \sqrt[8]{2^2x^2}}{-\sqrt[8]{2^2}(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2})(\sqrt[8]{x^4} + \sqrt[8]{2^2x^2} + \sqrt[8]{2^4})} = \\
& = \sqrt[8]{\frac{x^2}{2^{10}}} \cdot \frac{2(\sqrt[8]{x^2} + \sqrt[8]{2^2})}{\sqrt[8]{x^2}(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2})} : \frac{\sqrt[8]{x^4} + \sqrt[8]{2^2x^2} + \sqrt[8]{2^4}}{-\sqrt[8]{2^2}(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2})(\sqrt[8]{x^4} + \sqrt[8]{2^2x^2} + \sqrt[8]{2^4})} = \\
& = \sqrt[8]{\frac{x^2}{2^{10}}} \cdot \frac{2(\sqrt[8]{x^2} + \sqrt[8]{2^2})}{\sqrt[8]{x^2}(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2})} : \frac{1}{-\sqrt[8]{2^2}(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2})} = \\
& = \frac{\sqrt[8]{x^2} \cdot \sqrt[8]{2^2}(\sqrt[8]{x^2} + \sqrt[8]{2^2}) \cdot (-\sqrt[8]{2^2})(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2})}{\sqrt[8]{2^{10}} \cdot \sqrt[8]{x^2}(\sqrt[8]{x^2}-\sqrt[8]{2^2})} = -(\sqrt[8]{x^2} + \sqrt[8]{2^2}) = \\
& = -(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2}).
\end{aligned}$$

Ответ:  $-(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2})$ .

2.250.  $\left( \frac{2(a+1) + 2\sqrt{a^2+2a}}{3a+1-2\sqrt{a^2+2a}} \right)^{1/2} - (\sqrt{2a+1} - \sqrt{a})^{-1} \cdot \sqrt{a+2}$ .

Решение.

ОДЗ:  $a \geq 0$ .

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{2(a+1)+2\sqrt{a^2+2a}}{3a+1-2\sqrt{a^2+2a}} \right)^{1/2} - (\sqrt{2a+1}-\sqrt{a})^{-1} \cdot \sqrt{a+2} = \\
& = \sqrt{\frac{2a+2+2\sqrt{a^2+2a}}{3a+1-2\sqrt{a^2+2a}}} - \frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{a+2+2\sqrt{a(a+2)}+a}{2a+1-2\sqrt{a(2a+1)}+a}} - \\
& - \frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{a+2}+\sqrt{a})^2}{(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a})^2}} - \frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}} - \\
& - \frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a}-\sqrt{a+2}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}}$ .

2.251.  $\frac{(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y})^2 + (\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{y})^2}{x-\sqrt{xy}} : \frac{(4\sqrt{x}+\sqrt[8]{xy}+4\sqrt{y})(4\sqrt{x}-\sqrt[8]{xy}+4\sqrt{y})}{\sqrt[4]{x^3y}-y}$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} x > 0, \\ y \geq 0, \\ x \neq y. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y})^2 + (\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{y})^2}{x-\sqrt{xy}} : \frac{(4\sqrt{x}+\sqrt[8]{xy}+4\sqrt{y})(4\sqrt{x}-\sqrt[8]{xy}+4\sqrt{y})}{\sqrt[4]{x^3y}-y} = \\
& = \frac{\sqrt[8]{x^2} + 2\sqrt[8]{xy} + \sqrt[8]{y^2} + \sqrt[8]{x^2} - 2\sqrt[8]{xy} + \sqrt[8]{y^2}}{\sqrt[8]{x^8} - \sqrt[8]{x^4y^4}} : \\
& : \frac{(\sqrt[8]{x^2} + \sqrt[8]{y^2} + \sqrt[8]{xy})(\sqrt[8]{x^2} + \sqrt[8]{y^2} - \sqrt[8]{xy})}{\sqrt[8]{x^6y^2} - \sqrt[8]{y^8}} = \\
& = \frac{2\sqrt[8]{x^2} + 2\sqrt[8]{y^2}}{\sqrt[8]{x^4} \cdot (\sqrt[8]{x^4} - \sqrt[8]{y^4})} : \frac{(\sqrt[8]{x^2} + \sqrt[8]{y^2})^2 - (\sqrt[8]{xy})^2}{\sqrt[8]{y^2} \cdot (\sqrt[8]{x^6} - \sqrt[8]{y^6})} =
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2\left(\sqrt[8]{x^2} + \sqrt[8]{y^2}\right)}{\sqrt[8]{x^4} \cdot \left(\sqrt[8]{x^2} + \sqrt[8]{y^2}\right) \left(\sqrt[8]{x^2} - \sqrt[8]{y^2}\right)} : \\
&= \frac{\sqrt[8]{x^4} + 2\sqrt[8]{x^2 y^2} + \sqrt[8]{y^4} - \sqrt[8]{x^2 y^2}}{\sqrt[8]{y^2} \cdot \left(\sqrt[8]{x^2} - \sqrt[8]{y^2}\right) \left(\sqrt[8]{x^4} + \sqrt[8]{x^2 y^2} + \sqrt[8]{y^4}\right)} = \\
&= \frac{2}{\sqrt[8]{x^4} \cdot \left(\sqrt[8]{x^2} - \sqrt[8]{y^2}\right)} : \frac{\sqrt[8]{x^4} + \sqrt[8]{x^2 y^2} + \sqrt[8]{y^4}}{\sqrt[8]{y^2} \cdot \left(\sqrt[8]{x^2} - \sqrt[8]{y^2}\right) \left(\sqrt[8]{x^4} + \sqrt[8]{x^2 y^2} + \sqrt[8]{y^4}\right)} = \\
&= \frac{2}{\sqrt[8]{x^4} \cdot \left(\sqrt[8]{x^2} - \sqrt[8]{y^2}\right)} : \frac{1}{\sqrt[8]{y^2} \cdot \left(\sqrt[8]{x^2} - \sqrt[8]{y^2}\right)} = \frac{2\sqrt[8]{y^2} \cdot \left(\sqrt[8]{x^2} - \sqrt[8]{y^2}\right)}{\sqrt[8]{x^4} \cdot \left(\sqrt[8]{x^2} - \sqrt[8]{y^2}\right)} = \\
&= \frac{2\sqrt[8]{y^2}}{\sqrt[8]{x^4}} = 2^4 \sqrt{\frac{y}{x^2}}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $2^4 \sqrt{\frac{y}{x^2}}$ .

2.252.  $\frac{\sqrt{a^2 - b + \sqrt{c}} \cdot \sqrt{a - \sqrt{b + \sqrt{c}}} \cdot \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}}}{\sqrt{\frac{a^3}{b} - 2a + \frac{b}{a} - \frac{c}{ab}}}$ ;  $a = 4,8$ ;  $b = 1,2$ .

Решение.

ОДЗ:  $c \geq 0$ .

$$\frac{\sqrt{a^2 - b + \sqrt{c}} \cdot \sqrt{a - \sqrt{b + \sqrt{c}}} \cdot \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}}}{\sqrt{\frac{a^3}{b} - 2a + \frac{b}{a} - \frac{c}{ab}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - b + \sqrt{c}} \cdot \sqrt{(a - \sqrt{b + \sqrt{c}})(a + \sqrt{b + \sqrt{c}})}}{\sqrt{\frac{a^4 - 2a^2b + b^2 - c}{ab}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - b + \sqrt{c}} \cdot \sqrt{a^2 - (\sqrt{b + \sqrt{c}})^2}}{\sqrt{\frac{(a^2 - b)^2 - c}{ab}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - b + \sqrt{c}} \cdot \sqrt{a^2 - b - \sqrt{c}}}{\sqrt{\frac{(a^2 - b - \sqrt{c})(a^2 - b + \sqrt{c})}{ab}}} = \frac{\sqrt{(a^2 - b + \sqrt{c})(a^2 - b - \sqrt{c})}}{\sqrt{\frac{(a^2 - b - \sqrt{c})(a^2 - b + \sqrt{c})}{ab}}} = \sqrt{ab} =$$

$$= \sqrt{4,8 \cdot 1,2} = \sqrt{5,76} = 2,4.$$

Ответ: 2,4.

$$2.253. (4x-1) \cdot \left( \frac{1}{8x} \cdot (\sqrt{8x-1} + 4x)^{-1} - (\sqrt{8x-1} - 4x)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x \geq \frac{1}{8}, x \neq \frac{1}{4}.$$

$$(4x-1) \cdot \left( \frac{1}{8x} \cdot (\sqrt{8x-1} + 4x)^{-1} - (\sqrt{8x-1} - 4x)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (4x-1) \cdot \sqrt{\frac{1}{8x} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{8x-1} + 4x} - \frac{1}{\sqrt{8x-1} - 4x} \right)} =$$

$$= (4x-1) \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{8x-1} - 4x - \sqrt{8x-1} - 4x}{8x(\sqrt{8x-1} + 4x)(\sqrt{8x-1} - 4x)}} =$$

$$\begin{aligned}
&= (4x-1) \cdot \sqrt{\frac{-8x}{8x\left((\sqrt{8x-1})^2 - (4x)^2\right)}} = (4x-1) \cdot \sqrt{\frac{-1}{8x-1-16x^2}} = \\
&= (4x-1) \cdot \sqrt{\frac{1}{16x^2-8x+1}} = (4x-1) \cdot \sqrt{\frac{1}{(4x-1)^2}} = (4x-1) \cdot \frac{1}{|4x-1|} = \\
&= \frac{4x-1}{|4x-1|} = \begin{cases} \frac{4x-1}{-(4x-1)} = -1, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right); \\ \frac{4x-1}{4x-1} = 1, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{4}; \infty\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $-1$ , если  $x \in \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right)$ ;  $1$ , если  $x \in \left(\frac{1}{4}; \infty\right)$

$$2.254. \left( \frac{x+2y}{8y^3(x^2+2xy+2y^2)} - \frac{(x-2y) \cdot 8y^2}{x^2-2xy+2y^2} \right) + \left( \frac{y^{-2}}{4x^2-8y^2} - \frac{1}{4x^2y^2+8y^4} \right)$$

$$x = \sqrt[4]{6}, \quad y = \sqrt[8]{2}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{x+2y}{8y^3(x^2+2xy+2y^2)} - \frac{(x-2y) \cdot 8y^2}{x^2-2xy+2y^2} \right) + \left( \frac{y^{-2}}{4x^2-8y^2} - \frac{1}{4x^2y^2+8y^4} \right) = \\
&= \left( \frac{x+2y}{8y^3(x^2+2xy+2y^2)} - \frac{x-2y}{8y^3(x^2-2xy+2y^2)} \right) + \\
&+ \left( \frac{1}{4y^2(x^2-2y^2)} - \frac{1}{4y^2(x^2+2y^2)} \right) = \\
&= \frac{(x+2y)(x^2+2y^2-2xy) - (x-2y)(x^2+2y^2+2xy)}{8y^3(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)} + \\
&+ \frac{x^2+2y^2-x^2+2y^2}{4y^2(x^2-2y^2)(x^2+2y^2)} = \frac{8y^3}{8y^3\left((x^2+2y^2)^2 - (2xy)^2\right)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4y^2}{4y^2 \left( (x^2)^2 - (2y^2)^2 \right)} = \frac{1}{x^4 + 4y^4} + \frac{1}{x^4 - 4y^4} = \\
& = \frac{x^4 - 4y^4 + x^4 + 4y^4}{(x^4 + 4y^4)(x^4 - 4y^4)} = \frac{2x^4}{x^8 - 16y^8} = \frac{2(\sqrt[4]{6})^4}{(\sqrt[4]{6})^8 - 16(\sqrt[4]{2})^8} = \\
& = \frac{2 \cdot 6}{36 - 16 \cdot 2} = \frac{12}{36 - 32} = \frac{12}{4} = 3.
\end{aligned}$$

Ответ: 3.

2.255.

$$\frac{2(a+(a+1)+(a+2)+\dots+2a)}{a^2+3a+2} + \frac{6(a^{1/2}+b^{1/2})}{(a-b)^{0,6}(a+2)} : \left( (a^{1/2}-b^{1/2})(a-b)^{-2/5} \right)^{-1}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0, \\ a \neq b. \end{cases}$$

Выражение  $a+(a+1)+(a+2)+\dots+2a$  является суммой  $S_n$  членов арифметической прогрессии, у которой первый член  $a_1 = a$ , разность  $d = a+1 - a = 1$ ,  $n$ -й член  $a_n = 2a$ , количество членов

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{2a - a}{1} + 1 = a + 1.$$

Применив формулу суммы членов

$$\text{арифметической прогрессии, найдем } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a + 2a}{2} \cdot (a + 1) =$$

$$= \frac{3a(a+1)}{2}.$$

Подставив это значение  $S_n$  в условие, получим

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \cdot \frac{3a(a+1)}{2}}{a^2+3a+2} + \frac{6(a^{1/2}+b^{1/2})}{(a-b)^{0,6}(a+2)} : \left( (a^{1/2}-b^{1/2})(a-b)^{-2/5} \right)^{-1} = \\
& = \frac{3a(a+1)}{(a+2)(a+1)} + \frac{6(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt[5]{(a-b)^3} \cdot (a+2)} : \frac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \cdot \sqrt[5]{(a-b)^{-2}}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3a}{a+2} + \frac{6(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt[5]{(a-b)^3} \cdot (a+2)} \cdot \frac{\sqrt[5]{(a-b)^2}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \\
&= \frac{3a}{a+2} + \frac{6(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt[5]{(a-b)^3} \cdot (a+2) \cdot \sqrt[5]{(a-b)^2}} = \\
&= \frac{3a}{a+2} + \frac{6(a-b)}{(a+2) \cdot \sqrt[5]{(a-b)^5}} = \frac{3a}{a+2} + \frac{6}{a+2} = \frac{3a+6}{a+2} = 3.
\end{aligned}$$

Ответ: 3.

$$2.256. \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{ax} + x + x\sqrt{x})^2 (1 - \sqrt{x})^2}{(x + x^{-1} - 2)a^{-1/4}} - \frac{(x\sqrt{a})^{3/2}}{(ax^{-1} + 4\sqrt{a} + 4x)^{-1/2}}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ a > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{ax} + x + x\sqrt{x})^2 (1 - \sqrt{x})^2}{(x + x^{-1} - 2)a^{-1/4}} - \frac{(x\sqrt{a})^{3/2}}{(ax^{-1} + 4\sqrt{a} + 4x)^{-1/2}} = \\
&= \frac{(\sqrt{a}(1 + \sqrt{x}) + x(1 + \sqrt{x}))^2 (1 - \sqrt{x})^2}{\left(x + \frac{1}{x} - 2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{a}}} - \frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\left(\frac{a}{x} + 4\sqrt{a} + 4x\right)^{-1/2}} = \\
&= \frac{((1 + \sqrt{x})(\sqrt{a} + x))^2 (1 - \sqrt{x})^2}{\frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 \sqrt{a}}} - \frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\left(\frac{a + 4\sqrt{ax} + 4x^2}{x}\right)^{-1/2}} = \\
&= \frac{((1 + \sqrt{x})(\sqrt{a} + x))^2 (1 - \sqrt{x})^2 \cdot x^4 \sqrt{a}}{(x-1)^2} - \frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{\frac{x}{(\sqrt{a} + 2x)^2}}} = \\
&= \frac{(1-x)^2 (\sqrt{a} + x)^2 \cdot x^4 \sqrt{a}}{(x-1)^2} - \frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot (\sqrt{a} + 2x)}{\sqrt{x}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\sqrt{a} + x)^2 \cdot x^4 \sqrt{a} - x^4 \sqrt{a^3} \cdot (\sqrt{a} + 2x) = \\
&= x^4 \sqrt{a} \cdot \left( (\sqrt{a} + x)^2 - \sqrt{a^2} \cdot (\sqrt{a} + 2x) \right) = \\
&= x^4 \sqrt{a} \cdot (a + 2\sqrt{a} \cdot x + x^2 - a - 2\sqrt{a} \cdot x) = x^4 \sqrt{a} \cdot (x^2) = x^3 \cdot \sqrt[4]{a}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $x^3 \cdot \sqrt[4]{a}$ .

$$2.257. \left( (a - 3\sqrt[6]{a^5} + 9\sqrt[3]{a^2}) \left( \sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[12]{a^5} \right)^{-1} + 3\sqrt[12]{a^5} \right)^{-1}.$$

Решение.

ОДЗ:  $a > 0$ .

$$\begin{aligned}
&\left( (a - 3\sqrt[6]{a^5} + 9\sqrt[3]{a^2}) \left( \sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[12]{a^5} \right)^{-1} + 3\sqrt[12]{a^5} \right)^{-1} = \\
&= \left( \frac{12\sqrt[12]{a^{12}} - 3\sqrt[12]{a^{10}} + 9\sqrt[12]{a^8}}{12\sqrt[12]{a^6} + 3\sqrt[12]{a^4} + 3\sqrt[12]{a^5}} + 3\sqrt[12]{a^5} \right)^{-1} = \\
&= \left( \frac{12\sqrt[12]{a^8} \left( \sqrt[12]{a^4} - 3\sqrt[12]{a^2} + 9 \right)}{12\sqrt[12]{a^4} \left( \sqrt[12]{a^2} + 3 + 3\sqrt[12]{a} \right)} + 3\sqrt[12]{a^5} \right)^{-1} = \\
&= \left( \frac{12\sqrt[12]{a^4} \left( \sqrt[12]{a^4} - 3\sqrt[12]{a^2} + 9 \right)}{12\sqrt[12]{a^2} + 3\sqrt[12]{a} + 3} + 3\sqrt[12]{a^5} \right)^{-1} = \\
&= \left( \frac{12\sqrt[12]{a^4} \left( \sqrt[12]{a^4} - 3\sqrt[12]{a^2} + 9 \right) + 3\sqrt[12]{a^5} \left( 12\sqrt[12]{a^2} + 3\sqrt[12]{a} + 3 \right)}{12\sqrt[12]{a^2} + 3\sqrt[12]{a} + 3} \right)^{-1} = \\
&= \left( \frac{12\sqrt[12]{a^4} \left( \sqrt[12]{a^4} - 3\sqrt[12]{a^2} + 9 + 3\sqrt[12]{a^3} + 9\sqrt[12]{a^2} + 9\sqrt[12]{a} \right)}{12\sqrt[12]{a^2} + 3\sqrt[12]{a} + 3} \right)^{-1} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\sqrt[12]{a^4} \left( \sqrt[12]{a^4} + 3\sqrt[12]{a^3} + 6\sqrt[12]{a^2} + 9\sqrt[12]{a} + 9 \right)}{\sqrt[12]{a^2} + 3\sqrt[12]{a} + 3} \right)^{-1} = \\
&= \left( \frac{\sqrt[12]{a^4} \left( \sqrt[12]{a^2} + 3\sqrt[12]{a} + 3 \right) \left( \sqrt[12]{a^2} + 3 \right)}{\sqrt[12]{a^2} + 3\sqrt[12]{a} + 3} \right)^{-1} = \left( \sqrt[12]{a^4} \left( \sqrt[12]{a^2} + 3 \right) \right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{\sqrt[12]{a^4} \left( \sqrt[12]{a^2} + 3 \right)} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^6} + 3\sqrt[12]{a^4}} = \frac{1}{\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a}}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1}{\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a}}$ .

2.258.  $\frac{(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} - \sqrt[8]{ab})(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{a} + \sqrt[8]{ab})}{\sqrt[4]{a^3b} - b} \cdot \frac{(\sqrt[8]{a} + \sqrt[8]{b})^2 + (\sqrt[8]{a} - \sqrt[8]{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})b^{-1/4}}$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} a \geq 0, \\ b > 0, \\ a \neq b. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
&\frac{(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} - \sqrt[8]{ab})(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{a} + \sqrt[8]{ab})}{\sqrt[4]{a^3b} - b} \cdot \frac{(\sqrt[8]{a} + \sqrt[8]{b})^2 + (\sqrt[8]{a} - \sqrt[8]{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})b^{-1/4}} = \\
&= \frac{(\sqrt[8]{a^2} + \sqrt[8]{b^2} - \sqrt[8]{ab})(\sqrt[8]{a^2} + \sqrt[8]{b^2} + \sqrt[8]{ab})}{\sqrt[8]{a^6b^2} - \sqrt[8]{b^8}} \cdot \frac{(\sqrt[8]{a^2} + \sqrt[8]{b^2})^2 - (\sqrt[8]{ab})^2}{(\sqrt[8]{a^4} - \sqrt[8]{b^4}) \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{b^2}}} = \frac{(\sqrt[8]{a^2} + \sqrt[8]{b^2})^2 - (\sqrt[8]{ab})^2}{\sqrt[8]{b^2}(\sqrt[8]{a^6} - \sqrt[8]{b^6})}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(2\sqrt[8]{a^2} + 2\sqrt[8]{b^2}\right)\sqrt[8]{b^2}}{\sqrt[8]{a^4} - \sqrt[8]{b^4}} = \frac{\sqrt[8]{a^4} + 2\sqrt[8]{a^2b^2} + \sqrt[8]{b^4} - \sqrt[8]{a^2b^2}}{\sqrt[8]{b^2} \left(\sqrt[8]{a^2} - \sqrt[8]{b^2}\right) \left(\sqrt[8]{a^4} + \sqrt[8]{a^2b^2} + \sqrt[8]{b^4}\right)}; \\
& \frac{2\left(\sqrt[8]{a^2} + 2\sqrt[8]{b^2}\right)\sqrt[8]{b^2}}{\left(\sqrt[8]{a^2} + \sqrt[8]{b^2}\right) \left(\sqrt[8]{a^2} - \sqrt[8]{b^2}\right)} = \frac{\sqrt[8]{a^4} + \sqrt[8]{a^2b^2} + \sqrt[8]{b^4}}{\sqrt[8]{b^2} \left(\sqrt[8]{a^2} - \sqrt[8]{b^2}\right) \left(\sqrt[8]{a^4} + \sqrt[8]{a^2b^2} + \sqrt[8]{b^4}\right)}; \\
& \frac{2\sqrt[8]{b^2}}{\sqrt[8]{a^2} - \sqrt[8]{b^2}} = \frac{1}{\sqrt[8]{b^2} \left(\sqrt[8]{a^2} - \sqrt[8]{b^2}\right)} \cdot \frac{\sqrt[8]{a^2} - \sqrt[8]{b^2}}{2\sqrt[8]{b^2}} = \frac{1}{2\sqrt[8]{b^4}} = \frac{1}{2\sqrt{b}}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1}{2\sqrt{b}}$ .

$$2.259. \left( \sqrt[3]{\frac{8z^3 + 24z^2 + 18z}{2z-3}} - \sqrt[3]{\frac{8z^2 - 24z^2 + 18z}{2z+3}} \right) - \left( \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{2z}{27} - \frac{1}{6z}} \right)^{-1}$$

Решение.

ОДЗ:  $z \neq \pm \frac{3}{2}, z \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
& \left( \sqrt[3]{\frac{8z^3 + 24z^2 + 18z}{2z-3}} - \sqrt[3]{\frac{8z^2 - 24z^2 + 18z}{2z+3}} \right) - \left( \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{2z}{27} - \frac{1}{6z}} \right)^{-1} = \\
& = \sqrt[3]{\frac{2z(4z^2 + 12z + 9)}{2z-3}} - \sqrt[3]{\frac{2z(4z^2 - 12z + 9)}{2z+3}} - \left( \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{4z^2 - 9}{54z}} \right)^{-1} = \\
& = \sqrt[3]{\frac{2z(2z+3)^2}{2z-3}} - \sqrt[3]{\frac{2z(2z-3)^2}{2z+3}} - 2\sqrt[3]{\frac{54z}{4z^2 - 9}} = \\
& = \frac{\sqrt[3]{2z(2z+3)^2}}{\sqrt[3]{2z-3}} - \frac{\sqrt[3]{2z(2z-3)^2}}{\sqrt[3]{2z+3}} - \frac{2\sqrt[3]{54z}}{\sqrt[3]{(2z-3)(2z+3)}} =
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt[3]{2z(2z+3)^3} - \sqrt[3]{2z(2z-3)^3} - 2\sqrt[3]{54z}}{\sqrt[3]{(2z-3)(2z+3)}} = \\
 &= \frac{\sqrt[3]{2z}(2z+3-2z+3-6)}{\sqrt[3]{4z^2-9}} = \frac{\sqrt[3]{2z} \cdot 0}{\sqrt[3]{4z^2-9}} = 0.
 \end{aligned}$$

Ответ: 0.

$$\text{2.260. } \frac{\sqrt{\left(\frac{p^4+q^4}{p^4-p^2q^2} + \frac{2q^2}{p^2-q^2}\right) \cdot (p^3-pq^2) - 2q\sqrt{p}}}{\sqrt{\frac{p}{p-q} - \frac{q}{p+q} - \frac{2pq}{p^2-q^2} \cdot (p-q)}}$$

Решение.

ОДЗ:  $p > q > 0$ .

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sqrt{\left(\frac{p^4+q^4}{p^4-p^2q^2} + \frac{2q^2}{p^2-q^2}\right) \cdot (p^3-pq^2) - 2q\sqrt{p}}}{\sqrt{\frac{p}{p-q} - \frac{q}{p+q} - \frac{2pq}{p^2-q^2} \cdot (p-q)}} = \\
 &= \frac{\sqrt{\left(\frac{p^4+q^4}{p^2(p^2-q^2)} + \frac{2p^2}{p^2-q^2}\right) \cdot p(p^2-q^2) - 2q\sqrt{p}}}{\sqrt{\frac{p(p+q)-q(p-q)-2pq}{(p+q)(p-q)} \cdot (p-q)}} = \\
 &= \frac{\sqrt{\frac{(p^4+q^4+2p^2q^2)p(p^2-q^2)}{p^2(p^2-q^2)} - 2q\sqrt{p}}}{\sqrt{\frac{p^2+pq-pq+q^2-2pq}{(p+q)(p-q)} \cdot (p-q)}} = \frac{\sqrt{\frac{(p^2+q^2)^2}{p} - 2q\sqrt{p}}}{\sqrt{\frac{p^2-2pq+q^2}{(p+q)(p-q)} \cdot (p-q)}} = \\
 &= \frac{\frac{p^2+q^2}{\sqrt{p}} - 2q\sqrt{p}}{\sqrt{p}} \cdot \frac{p^2-2pq+q^2}{\sqrt{p}} \cdot \frac{(p-q)^2}{\sqrt{p}} = \\
 &= \frac{\sqrt{\frac{(p-q)^2}{(p+q)(p-q)} \cdot (p-q)}}{\sqrt{\frac{p-q}{p+q} \cdot (p-q)}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{p-q}{p+q} \cdot (p-q)}}{\sqrt{\frac{p-q}{p+q} \cdot (p-q)}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{p-q}{\sqrt{p}} \cdot \sqrt{\frac{p+q}{p-q}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \sqrt{\frac{(p-q)^2(p+q)}{p-q}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \sqrt{(p-q)(p+q)} = \\
 &= \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{\sqrt{p}}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{\sqrt{p}}$ .

2.261.  $\sqrt[3]{\frac{2x^2}{9+18x+9x^2}} \cdot \sqrt{\frac{(x+1)\sqrt{1-x}}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}}}$ .

Решение.

ОДЗ:  $0 < x \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
 &\sqrt[3]{\frac{2x^2}{9+18x+9x^2}} \cdot \sqrt{\frac{(x+1)\sqrt{1-x}}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}}} = \\
 &= \sqrt[6]{\frac{4x^4}{81(1+2x+x^2)^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{(1+x)^3(1-x)}{x^3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{9(1-x^2)}{4x^3}} = \\
 &= \sqrt[6]{\frac{4x^4}{81(1+x)^4} \cdot \frac{(1+x)^3(1-x)}{x^3} \cdot \frac{9(1-x^2)}{4x^3}} = \sqrt[6]{\frac{36x^4(1+x)^4(1-x)^2}{324x^6(1+x)^4}} = \\
 &= \sqrt[6]{\frac{(1-x)^2}{9x^2}} = \sqrt[3]{\frac{1-x}{3x}}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\sqrt[3]{\frac{1-x}{3x}}$ , если  $x \in (0; 1]$ .

2.262.  $\frac{4 - \sqrt[3]{a^2}}{(2 + \sqrt[3]{ab})^2 - (\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{b})^2}$ ;  $a = \sqrt[7]{3}$ ,  $b = \sqrt{0,008}$ .

Решение.

$$\frac{4 - \sqrt[3]{a^2}}{(2 + \sqrt[3]{ab})^2 - (\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{b})^2} = \frac{4 - \sqrt[3]{a^2}}{4 + 4\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{a^2b^2} - \sqrt[3]{a^2} - 4\sqrt[3]{ab} - 4\sqrt[3]{b^2}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4 - \sqrt[3]{a^2}}{\left(4 - \sqrt[3]{a^2}\right) - \sqrt[3]{b^2} \cdot \left(4 - \sqrt[3]{a^2}\right)} = \frac{4 - \sqrt[3]{a^2}}{\left(4 - \sqrt[3]{a^2}\right)\left(1 - \sqrt[3]{b^2}\right)} = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{b^2}} = \\
 &= \frac{1}{1 - \sqrt[3]{0,008}} = \frac{1}{1 - 0,2} = \frac{1}{0,8} = \frac{5}{4}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{5}{4}$ .

2.263.  $\frac{x^4 + x^2 + x\sqrt{2} + 2}{x^2 - x\sqrt{2} + 2} - x\sqrt{2}$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
 \frac{x^4 + x^2 + x\sqrt{2} + 2}{x^2 - x\sqrt{2} + 2} - x\sqrt{2} &= \frac{x^4 + x^2 + x\sqrt{2} + 2 - x^3\sqrt{2} + 2x^2 - 2x\sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 2} = \\
 &= \frac{x^4 - \sqrt{2}x^3 + 3x^2 - \sqrt{2}x + 2}{x^2 - x\sqrt{2} + 2} = \frac{(x^2 - \sqrt{2}x + 2)(x^2 + 1)}{x^2 - x\sqrt{2} + 2} = x^2 + 1.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $x^2 + 1$ .

2.264.  $\frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq -3. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + x^2 - 5x + 3} &= \frac{(x^3 + 2x^2 - 3x) + (3x^2 + 6x - 9)}{(x^3 + 2x^2 - 3x) - (x^2 + 2x - 3)} = \\
 &= \frac{x(x^2 + 2x - 3) + 3(x^2 + 2x - 3)}{x(x^2 + 2x - 3) - (x^2 + 2x - 3)} = \frac{(x^2 + 2x - 3)(x + 3)}{(x^2 + 2x - 3)(x - 1)} = \frac{x + 3}{x - 1}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{x + 3}{x - 1}$ .

$$2.265. \frac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}} \cdot \sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}}}{\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{b}}{a}}}; \quad a = 1,21.$$

Решение.

ОДЗ:  $b \geq 0$ .

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}} \cdot \sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}}}{\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{b}}{a}}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b})}}{\sqrt{1+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{b}{a}-\frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{b}}{a}}} = \\ & = \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b})}}{\sqrt{\frac{a+2\sqrt{ab}+b-4\sqrt{ab}-\sqrt{b}}{a}}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b})}}{\sqrt{\frac{a-2\sqrt{ab}+b-\sqrt{b}}{a}}} = \\ & = \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 - \sqrt{b}}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} = \sqrt{1,21} = 1,1. \end{aligned}$$

Ответ: 1,1.

$$2.266. \frac{\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4b+1}{a}} \cdot \left(\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}}\right)^{-1/2}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}}}}; \quad a = 2,25.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4b+1}{a}} \cdot \left(\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}}\right)^{-1/2}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}}}} = \\ & = \frac{\sqrt{1+\frac{2b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{4b+1}{a}}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}}}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab - a}{a^2}}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}} \cdot \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}})(\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}})}} = \\
&= \frac{\sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2 - a}{a^2}}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}} \cdot \sqrt{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b+\sqrt{a}})^2}} = \frac{\sqrt{\frac{(a-b)^2 - a}{a^2}}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a-b-\sqrt{a}}} = \\
&= \frac{\sqrt{(a-b)^2 - a}}{a} = \frac{\sqrt{(a-b)^2 - a}}{a\sqrt{(a-b)^2 - a}} = \frac{1}{a} = \frac{1}{2,25} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{4}{9}$ .

$$2.267. \frac{\sqrt{x^2 y^{-2} - xy^{-1} + \frac{1}{4}} \cdot (xy^{-2} + y^{-3/2})}{2x^2 - y^{3/2} - xy + 2xy^{1/2}}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0, \\ y \neq 2x, \\ \sqrt{y} \neq -x. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{x^2 y^{-2} - xy^{-1} + \frac{1}{4}} \cdot (xy^{-2} + y^{-3/2})}{2x^2 - y^{3/2} - xy + 2xy^{1/2}} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + \frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{y^3}}\right)}{(2x^2 + 2x\sqrt{y}) - (xy + \sqrt{y^3})} = \\
&= \frac{\sqrt{\frac{4x^2 - 4xy + y^2}{4y^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{y}}{y^2}}{\frac{\sqrt{(2x-y)^2}}{2y} \cdot \frac{x + \sqrt{y}}{y^2}} = \frac{|2x-y|}{2y^3(2x-y)} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{-(2x-y)}{2y^3(2x-y)} = -\frac{1}{2y^3} & \text{при } y > 2x; \\ \frac{2x-y}{2y^3(2x-y)} = \frac{1}{2y^3} & \text{при } 0 < y < 2x. \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{1}{2y^3}$  при  $0 < y < 2x$ ;  $-\frac{1}{2y^3}$  при  $y > 2x$ .

2.268.  $\frac{x + \sqrt{x} - \sqrt[4]{12x} + 3 + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3} - \sqrt[4]{12x}} - (\sqrt{3} + \sqrt[4]{12x}).$

Решение.

ОДЗ:  $x \geq 0$ .

$$\begin{aligned} & \frac{x + \sqrt{x} - \sqrt[4]{12x} + 3 + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3} - \sqrt[4]{12x}} - (\sqrt{3} + \sqrt[4]{12x}) = \\ & = \frac{\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{3^4} + \sqrt[4]{3^2}}{\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{3^2} - \sqrt[4]{12x}} - (\sqrt[4]{3^2} + \sqrt[4]{12x}) = \\ & = \frac{(\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{3^2}) + (\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{3^4})}{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{3^2}} - (\sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{3^2}) = \\ & = \frac{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{3^2}}{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{3^2}} + \frac{\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{3^2}} - (\sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{3^2}) = \\ & = 1 + \frac{\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{3^4} - (\sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{3^2})(\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{3^2})}{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{3^2}} = \\ & = 1 + \frac{\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{81} - \sqrt[4]{12x^3} + \sqrt[4]{144x^2} - \sqrt[4]{108x} - \sqrt[4]{9x^2} + \sqrt[4]{108x} - \sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{3^2}} = \\ & = 1 + \frac{\sqrt[4]{x^4} - \sqrt[4]{12x^3} + \sqrt[4]{144x^2} - \sqrt[4]{9x^2}}{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{9}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{\sqrt[4]{x^4} - \sqrt[4]{12x^3} + 2\sqrt[4]{9x^2} - \sqrt[4]{9x^2}}{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{9}} = 1 + \frac{\sqrt[4]{x^4} - \sqrt[4]{12x^3} + \sqrt[4]{9x^2}}{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{9}} = \\
&= 1 + \frac{\sqrt[4]{x^2} \left( \sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{9} \right)}{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{12x} + \sqrt[4]{9}} = 1 + \sqrt[4]{x^2} = 1 + \sqrt{x}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $1 + \sqrt{x}$ .

$$2.269. \frac{a^{3/2} + a^{3/4} - \left( \sqrt{a^3 + 2a^2} + \sqrt[4]{a(a+2)^2} \right)}{\sqrt{2(a+1-\sqrt{a^2+2a})} \cdot (a^2 - a^{5/4} + a^{1/2})^{-1}}.$$

Решение.

ОДЗ:  $a > 0$ .

$$\begin{aligned}
&\frac{a^{3/2} + a^{3/4} - \left( \sqrt{a^3 + 2a^2} + \sqrt[4]{a(a+2)^2} \right)}{\sqrt{2(a+1-\sqrt{a^2+2a})} \cdot (a^2 - a^{5/4} + a^{1/2})^{-1}} = \\
&= \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt[4]{a^3} - \left( \sqrt{a^2(a+2)} + \sqrt[4]{a(a+2)^2} \right)}{\sqrt{2(a+1-\sqrt{a(a+2)})} \cdot \frac{1}{a^2 - \sqrt[4]{a^5} + \sqrt{a}}} = \\
&= \frac{\sqrt[4]{a^6} + \sqrt[4]{a^3} - \left( \sqrt[4]{a^4(a+2)^2} + \sqrt[4]{a(a+2)^2} \right)}{\sqrt[4]{(2(a+1-\sqrt{a(a+2)}))^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{a^8} - \sqrt[4]{a^5} + \sqrt[4]{a^2}}} = \\
&= \frac{\sqrt[4]{a^3} \left( \sqrt[4]{a^3} + 1 \right) - \sqrt[4]{a(a+2)^2} \left( \sqrt[4]{a^3} + 1 \right)}{\sqrt[4]{(2a+2-2\sqrt{a(a+2)})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{a^2} \left( \sqrt[4]{a^6} - \sqrt[4]{a^3} + 1 \right)}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt[4]{a} \left( \sqrt[4]{a^3} + 1 \right) \left( \sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{(a+2)^2} \right) \sqrt[4]{a^2} \left( \sqrt[4]{a^6} - \sqrt[4]{a^3} + 1 \right)}{\sqrt[4]{(a+2 - 2\sqrt{a(a+2)} + a)^2}} \\
&= \frac{\sqrt[4]{a^3} \left( \sqrt[4]{a^3} + 1 \right) \left( \sqrt[4]{a^6} - \sqrt[4]{a^3} + 1 \right) \left( \sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{(a+2)^2} \right)}{\sqrt[4]{\left( (\sqrt{a+2} - \sqrt{a})^2 \right)^2}} \\
&= \frac{\sqrt[4]{a^3} \left( \sqrt[4]{a^9} + 1 \right) (\sqrt{a} - \sqrt{a+2}) - \left( \sqrt[4]{a^{12}} + \sqrt[4]{a^3} \right) (\sqrt{a+2} - \sqrt{a})}{\sqrt[4]{(\sqrt{a+2} - \sqrt{a})^4}} = \frac{\sqrt{a+2} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+2} - \sqrt{a}} \\
&= - \left( a^3 + \sqrt[4]{a^3} \right)
\end{aligned}$$

Ответ:  $-\left( a^3 + \sqrt[4]{a^3} \right)$ .

2.270. 
$$\frac{\sqrt{x-4}\sqrt{x-4}+2}{\sqrt{x+4}\sqrt{x-4}-2}$$

Решение.

ОДЗ:  $x > 4$ .

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{x-4}\sqrt{x-4}+2}{\sqrt{x+4}\sqrt{x-4}-2} = \frac{\sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4}+2}{\sqrt{x-4+4\sqrt{x-4}+4}-2} = \\
&= \frac{\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}+2}{\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2}-2} = \frac{|\sqrt{x-4}-2|+2}{\sqrt{x-4}+2-2} = \frac{|\sqrt{x-4}-2|+2}{\sqrt{x-4}} = \\
&= \begin{cases} \frac{-\sqrt{x-4}+4}{\sqrt{x-4}} = \frac{4}{\sqrt{x-4}} - 1, & \text{если } x \in (4; 8); \\ \frac{\sqrt{x-4}-2+2}{\sqrt{x-4}} = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}} = 1, & \text{если } x \in [8; \infty). \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{4}{\sqrt{x-4}} - 1$ , если  $x \in (4; 8)$ ; 1, если  $x \in [8; \infty)$ .



$$2.271. \left( \frac{3^{3/2} + \frac{1}{8} \cdot z^{3/5}}{3 + \sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{z} + \frac{1}{4} \sqrt[5]{z^2}} + \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z}} \right)^{-1} : \frac{1}{2\sqrt{12} + \sqrt[5]{32z}}.$$

Решение.

СДЗ:  $z \neq -288\sqrt{3}$ .

$$\begin{aligned} & \left( \frac{3^{3/2} + \frac{1}{8} \cdot z^{3/5}}{3 + \sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{z} + \frac{1}{4} \sqrt[5]{z^2}} + \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z}} \right)^{-1} : \frac{1}{2\sqrt{12} + \sqrt[5]{32z}} = \\ & = \left( \frac{8 \left( \sqrt{3^3} + \frac{1}{8} \sqrt[5]{z^3} \right)}{8 \left( 3 + \sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{z} + \frac{1}{4} \sqrt[5]{z^2} \right)} + \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z}} \right)^{-1} : \frac{1}{4\sqrt{3} + 2\sqrt[5]{z}} = \\ & = \left( \frac{24\sqrt{3} + \sqrt[5]{z^3}}{24 + 8\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{z} + 2\sqrt[5]{z^2}} + \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z}} \right)^{-1} : \frac{1}{2(2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z})} = \\ & = \left( \frac{(2\sqrt{3})^3 + (\sqrt[5]{z})^3}{2(2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z})^2} + \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z}} \right)^{-1} \cdot 2(2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z}) = \\ & = \left( \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z}) \left( (2\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{z} + (\sqrt[5]{z})^2 \right)}{2(2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z})^2} + \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z}} \right)^{-1} \cdot 2(2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z}) = \\ & = \left( \frac{(2\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{z} + (\sqrt[5]{z})^2 + 6\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{z}}{2(2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z})} \right)^{-1} \cdot 2(2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z}) = \\ & = \left( \frac{(2\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{z} + (\sqrt[5]{z})^2}{2(2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z})} \right)^{-1} \cdot 2(2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z}) = \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z})^2}{2(2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z})} \right)^{-1} \cdot 2(2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z}) = \frac{2}{2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z}} \cdot 2(2\sqrt{3} + \sqrt[5]{z}) = 4.$$

Ответ: 4.

$$2.272. \frac{(\sqrt{p^3} : \sqrt{p+p})^{1/4} : \sqrt[8]{(p-q)^3}}{\left( \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} + 1 \right)^{1/4}}$$

Решение.

ОДЗ:  $p > q > 0$ .

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{p^3} : \sqrt{p+p})^{1/4} : \sqrt[8]{(p-q)^3}}{\left( \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} + 1 \right)^{1/4}} = \frac{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{p^3}}{\sqrt{p}} + p} : \sqrt[8]{(p-q)^3}}{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} + 1}} = \\ & = \frac{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{q^3} + \sqrt{p^3}}{\sqrt{p}}} : \sqrt[8]{(p-q)^3}}{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{q^3} + \sqrt{p^3}}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{(p-q)^3}}}} = \\ & = \frac{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{pq} - \sqrt{pq} + q + p - \sqrt{pq}}{\sqrt{p}(\sqrt{p}-\sqrt{q})}}}{\sqrt[4]{\frac{p - \sqrt{pq} + q}{\sqrt{p}(\sqrt{p}-\sqrt{q})}}} = \\ & = \frac{\sqrt[8]{\left( \frac{\sqrt{q^3} + \sqrt{p^3}}{\sqrt{p}} \right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{(p-q)^3}}}{\sqrt[8]{\frac{(\sqrt{q^3} + \sqrt{p^3})^2}{p(p-q)^3}}} = \\ & = \frac{\sqrt[8]{\left( \frac{p - \sqrt{pq} + q}{\sqrt{p}(\sqrt{p}-\sqrt{q})} \right)^2}}{\sqrt[8]{\frac{(p - \sqrt{pq} + q)^2}{p(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt[8]{\frac{(\sqrt{q^3} + \sqrt{p^3})^2}{p(p-q)^3} \cdot \frac{p(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2}{(p - \sqrt{pq} + q)^2}} = \\
&= \sqrt[8]{\frac{((\sqrt{p} + \sqrt{q})(p - \sqrt{pq} + q))^2 (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2}{(p-q)^3 (p - \sqrt{pq} + q)^2}} = \\
&= \sqrt[8]{\frac{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2}{(p-q)^3}} = \sqrt[8]{\frac{(p-q)^2}{(p-q)^3}} = \sqrt[8]{\frac{1}{p-q}} = \frac{1}{\sqrt[8]{p-q}}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1}{\sqrt[8]{p-q}}$ .

2.273.  $\frac{\sqrt{(3x+2)^2 - 24x}}{3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}$ .

Решение.

ОДЗ:  $0 < x \neq \frac{2}{3}$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(3x+2)^2 - 24x}}{3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}} &= \frac{\sqrt{9x^2 + 12x + 4 - 24x}}{\frac{3x-2}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{9x^2 - 12x + 4} \cdot \sqrt{x}}{3x-2} = \\
&= \frac{\sqrt{(3x-2)^2} \cdot \sqrt{x}}{3x-2} = \frac{|3x-2| \cdot \sqrt{x}}{3x-2} = \begin{cases} \frac{-(3x-2) \cdot \sqrt{x}}{3x-2} = -\sqrt{x}, & \text{если } x \in \left(0; \frac{2}{3}\right) \\ \frac{(3x-2) \cdot \sqrt{x}}{3x-2} = \sqrt{x}, & \text{если } x \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ:  $-\sqrt{x}$ , если  $x \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$ ;  $\sqrt{x}$ , если  $x \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$ .

$$2.274. \frac{8-m}{\sqrt[3]{m+2}} : \left( 2 + \frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m+2}} \right) + \left( \sqrt[3]{m} + \frac{2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m-2}} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{m^2}-4}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{m}}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} m \neq 0, \\ m \neq \pm 8. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{8-m}{\sqrt[3]{m+2}} : \left( 2 + \frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m+2}} \right) + \left( \sqrt[3]{m} + \frac{2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m-2}} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{m^2}-4}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{m}} = \\ & = \frac{(2-\sqrt[3]{m})(4+2\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m^2})}{\sqrt[3]{m+2}} : \frac{4+2\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m+2}} + \frac{\sqrt[3]{m^2}-2\sqrt[3]{m}+2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m-2}} \times \\ & \times \frac{(\sqrt[3]{m}-2)(\sqrt[3]{m}+2)}{\sqrt[3]{m}(\sqrt[3]{m}+2)} = \frac{(2-\sqrt[3]{m})(4+2\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m^2})}{\sqrt[3]{m+2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{m}+2}{4+2\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m^2}} + \sqrt[3]{m} = \\ & = 2 - \sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{m} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

$$2.275. x \sqrt[3]{2x\sqrt{xy} - x\sqrt{3xy}} \cdot \sqrt[6]{x^2 y (7+4\sqrt{3})}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } xy \geq 0.$$

$$\begin{aligned} & x \sqrt[3]{2x\sqrt{xy} - x\sqrt{3xy}} \cdot \sqrt[6]{x^2 y (7+4\sqrt{3})} = \\ & = x \sqrt[3]{x\sqrt{xy}(2-\sqrt{3})} \cdot \sqrt[6]{x^3 y (7+4\sqrt{3})} = \\ & = x \sqrt[3]{x\sqrt{xy}(2-\sqrt{3})} \cdot \sqrt[6]{x^3 y (2+\sqrt{3})^2} = \\ & = x \sqrt[3]{x\sqrt{xy}(2-\sqrt{3})} \cdot \sqrt[3]{|x|\sqrt{xy}(2+\sqrt{3})} = \\ & = x \sqrt[3]{x|x||xy|(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \\ & = x \sqrt[3]{x|x||x||y|} = x \sqrt[3]{x^3|y|} = x \cdot x \cdot \sqrt[3]{|y|} = x^2 \sqrt[3]{|y|}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } x^2 \sqrt[3]{|y|}.$$

$$2.276. \left( \left( \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}} \right)^{1/2} - \sqrt{a-1} \cdot (\sqrt{a+1})^{-1} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{a^{2/3} + a^{1/3} + 1}.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $a > 1$ .

$$\begin{aligned} & \left( \left( \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}} \right)^{1/2} - \sqrt{a-1} \cdot (\sqrt{a+1})^{-1} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{a^{2/3} + a^{1/3} + 1} = \\ & = \left( \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}} - \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{a^{2/3} + a^{1/3} + 1} = \\ & = \left( \sqrt{\left( \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}} - \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}}} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{a^{2/3} + a^{1/3} + 1} = \\ & = \left( \sqrt{\left( \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}} - \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{a^{2/3} + a^{1/3} + 1} = \\ & = \left( \sqrt{\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} - \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1} = \\ & = \left( \frac{\sqrt{\sqrt{a+1}} - \sqrt{(\sqrt{a-1})(\sqrt{a+1})}}{\sqrt{\sqrt{a-1}} \cdot \sqrt{(\sqrt{a+1})^2}} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1} = \\ & = \left( \frac{\sqrt{\sqrt{a+1}} - \sqrt{\sqrt{a-1}}}{\sqrt{\sqrt{a-1}} \cdot \sqrt{\sqrt{a+1}}} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{a}-1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{a}-1)}(\sqrt{a}+1)} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2 + \sqrt[3]{a} + 1}} = \\
&= \left( \frac{\sqrt{a}+1 - \sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2 + \sqrt[3]{a} + 1}} = \left( \frac{2}{\sqrt{a}-1} \right)^{-2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2 + \sqrt[3]{a} + 1}} = \\
&= \frac{a-1}{4(\sqrt[3]{a^2 + \sqrt[3]{a} + 1})} = \frac{(\sqrt[3]{a}-1)(\sqrt[3]{a^2 + \sqrt[3]{a} + 1})}{4(\sqrt[3]{a^2 + \sqrt[3]{a} + 1})} = \frac{\sqrt[3]{a}-1}{4}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt[3]{a}-1}{4}$ .

2.277.

$$\left( \frac{a + a^{3/4}b^{1/2} + a^{1/4}b^{3/2} + b^2}{a^{1/2} + 2a^{1/4}b^{1/2} + b} \cdot (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}) + \frac{3\sqrt{b}(a^{1/2} - b)}{a^{-1/4}(a^{1/4} - \sqrt{b})} \right)^{-1/3} : (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b})^1.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a \neq b^2, \\ a > 0, \\ b > 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{a + a^{3/4}b^{1/2} + a^{1/4}b^{3/2} + b^2}{a^{1/2} + 2a^{1/4}b^{1/2} + b} \cdot (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}) + \frac{3\sqrt{b}(a^{1/2} - b)}{a^{-1/4}(a^{1/4} - \sqrt{b})} \right)^{-1/3} : (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b})^1 = \\
&= \left( \frac{\sqrt[4]{a^4} + \sqrt[4]{a^3}\sqrt{b} + \sqrt[4]{a}\sqrt{b^3} + \sqrt{b^4}}{\sqrt[4]{a^2} + 2\sqrt[4]{a}\sqrt{b} + \sqrt{b^2}} \cdot (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}) + \frac{3\sqrt{b}(\sqrt[4]{a^2} - \sqrt{b^2})}{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a} - \sqrt{b})} \right)^{-1/3} \cdot (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}) = \\
&= \left( \frac{(\sqrt[4]{a^4} + \sqrt[4]{a}\sqrt{b^3}) + (\sqrt[4]{a^3}\sqrt{b} + \sqrt{b^4})}{(\sqrt[4]{a} + \sqrt{b})^2} \cdot (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}) + \frac{3\sqrt[4]{a}\sqrt{b}(\sqrt[4]{a} - \sqrt{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt{b})}{\sqrt[4]{a} - \sqrt{b}} \right)^{-1/3} \times \\
&\times (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}) = \left( \frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt{b^3}) + \sqrt{b}(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt{b^3})}{\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}} + 3\sqrt[4]{a}\sqrt{b}(\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}) \right)^{-1/3} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}) &= \left( \frac{(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt{b^3})(\sqrt[4]{a} + \sqrt{b})}{\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}} + 3\sqrt[4]{a^2} \sqrt{b} + 3\sqrt[4]{a} \sqrt{b^2} \right)^{-1/3} \times \\ \times (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}) &= \left( \sqrt[4]{a^3} + 3\sqrt[4]{a^2} \sqrt{b} + 3\sqrt[4]{a} \sqrt{b^2} + \sqrt{b^3} \right)^{-1/3} \cdot (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}) = \\ &= \left( (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b})^3 \right)^{-1/3} \cdot (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b})^{-1} \cdot (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}) = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$2.278. \left( \sqrt{\frac{(1-n)\sqrt[3]{1+n}}{n}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3n^2}{4-8n+4n^2}} \right)^{-1} : \sqrt[3]{\left( \frac{3n\sqrt{n}}{2\sqrt{1-n^2}} \right)^{-1}}$$

Решение.

ОДЗ:  $0 < n < 1$ .

$$\begin{aligned} &\left( \sqrt{\frac{(1-n)\sqrt[3]{1+n}}{n}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3n^2}{4-8n+4n^2}} \right)^{-1} : \sqrt[3]{\left( \frac{3n\sqrt{n}}{2\sqrt{1-n^2}} \right)^{-1}} = \\ &= \left( \sqrt{\left( \frac{(1-n)\sqrt[3]{1+n}}{n^3} \right)^3} \cdot \sqrt{\left( \frac{3n^2}{4(1-2n+n^2)} \right)^2} \right)^{-1} \cdot \sqrt[6]{\left( \frac{3n\sqrt{n}}{2\sqrt{1-n^2}} \right)^2} = \\ &= \left( \sqrt{\frac{(1-n)^3(1+n)}{n^3}} \cdot \sqrt{\frac{9n^4}{16(1-n)^4}} \right)^{-1} \cdot \sqrt[6]{\frac{9n^3}{4(1-n)(1+n)}} = \\ &= \left( \sqrt{\frac{(1-n)^3(1+n) \cdot 9n^4}{n^3 \cdot 16(1-n)^4}} \right)^{-1} \cdot \sqrt[6]{\frac{9n^3}{4(1-n)(1+n)}} = \\ &= \left( \sqrt{\frac{9n(1+n)}{16(1-n)}} \right)^{-1} \cdot \sqrt[6]{\frac{9n^3}{4(1-n)(1+n)}} = \sqrt[6]{\frac{16(1-n) \cdot 9n^3}{9n(1+n) \cdot 4(1-n)(1+n)}} = \\ &= \sqrt[6]{\frac{4n^2}{(1+n)^2}} = \sqrt[3]{\frac{2n}{1+n}}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\sqrt[3]{\frac{2n}{1+n}}$ .

$$2.279. \frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} \cdot \left( \frac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2}-1}} + \frac{4ab\sqrt{a}+9ab\sqrt{b}-9b^2\sqrt{a}}{\frac{3}{2}\sqrt{b}-2\sqrt{a}} \right)$$

$$a > b > 0.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} \cdot \left( \frac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2}-1}} + \frac{4ab\sqrt{a}+9ab\sqrt{b}-9b^2\sqrt{a}}{\frac{3}{2}\sqrt{b}-2\sqrt{a}} \right) = \\ & = \frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} \cdot \left( \frac{(3ab-3b^2)+(a\sqrt{ab}-b\sqrt{ab})}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^2}-1}} + \frac{\sqrt{ab}(4a+9\sqrt{a}\sqrt{b}-9b)}{-\frac{1}{2}(4\sqrt{a}-3\sqrt{b})} \right) = \\ & = \frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} \cdot \left( \frac{3b(a-b)+\sqrt{ab}(a-b)}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{4a^2b^2}}-1}} - \frac{2\sqrt{ab}(\sqrt{a}+3\sqrt{b})(4\sqrt{a}-3\sqrt{b})}{4\sqrt{a}-3\sqrt{b}} \right) = \\ & = \frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} \cdot \left( \frac{(a-b)(3b+\sqrt{ab})}{\frac{1}{4ab}\sqrt{(a^2-b^2)^2}} - 2\sqrt{ab}(\sqrt{a}+3\sqrt{b}) \right) = \\ & = \frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} \cdot \left( \frac{4ab(a-b)(3b+\sqrt{ab})}{a^2-b^2} - 2\sqrt{ab}(\sqrt{a}+3\sqrt{b}) \right) = \\ & = \frac{a+b}{a-2\sqrt{ab}+b} \cdot 2\sqrt{ab} \left( \frac{2\sqrt{a}(3b+\sqrt{ab})}{a+b} - (\sqrt{a}+3\sqrt{b}) \right) = \\ & = \frac{2\sqrt{ab}(a+b)}{a-2\sqrt{ab}+b} \cdot \frac{6\sqrt{ab}+2a\sqrt{b}-a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}-\sqrt{ab}-3b\sqrt{b}}{a+b} = \end{aligned}$$



$$\text{Omeem: } \sqrt{\frac{a+4b}{a}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{a(a+4b)}}{\sqrt{a(a+4b)}} = \sqrt{\frac{a+4b}{a}} = \sqrt{\frac{a+4b}{a}} \\
 &= \frac{4b\sqrt{a^2+4ab}}{4b\sqrt{a^2+4ab}} = \frac{a^2+8ab+16b^2-a^2-4ab}{4b\sqrt{a^2+4ab}} = \frac{4b(a+4b)}{4b\sqrt{a^2+4ab}} \\
 &= \frac{(a+4b)^2 - (\sqrt{a^2+4ab})^2}{a^2+4ab - a\sqrt{a^2+4ab} + a\sqrt{a^2+4ab} + 4b\sqrt{a^2+4ab} - a^2 - 4ab} \\
 &= \frac{a+4b+\sqrt{a^2+4ab}}{a+\sqrt{a^2+4ab}} = \frac{(a+4b+\sqrt{a^2+4ab})(a+4b-\sqrt{a^2+4ab})}{(a+\sqrt{a^2+4ab})(a+4b-\sqrt{a^2+4ab})} \\
 &= \frac{(a+\sqrt{a^2+4ab})(a+4b+\sqrt{a^2+4ab})}{(a+\sqrt{a^2+4ab})(a+4b-\sqrt{a^2+4ab})} \\
 &= \frac{(a+\sqrt{a^2+4ab})(a+4b+\sqrt{a^2+4ab})}{2a(a+2b+\sqrt{a^2+4ab})} \\
 &= \frac{(a+\sqrt{a^2+4ab})(a+4b+\sqrt{a^2+4ab})}{2a(a+2b+\sqrt{a^2+4ab})}
 \end{aligned}$$

$$\text{O13: } \begin{cases} a^2+4ab \geq 0, \\ \sqrt{a^2+4ab} \neq -a, \\ \sqrt{a^2+4ab} \neq -a-4b. \end{cases}$$

Pewenne.

$$2.280. \frac{(a+\sqrt{a^2+4ab})(a+4b+\sqrt{a^2+4ab})}{2a(a+2b+\sqrt{a^2+4ab})}$$

$$\text{Omeem: } -2b(a+3\sqrt{ab})$$

$$= -2\sqrt{ab}(\sqrt{a+3\sqrt{b}}) = -2b(a+3\sqrt{ab}).$$

$$= \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-2\sqrt{ab}+b} = \frac{-2\sqrt{ab}(\sqrt{a-5\sqrt{ab}+a\sqrt{b}+3b\sqrt{b}}) - 2\sqrt{ab}(a-2\sqrt{ab}+b)}{a-2\sqrt{ab}+b} = \frac{-2\sqrt{ab}(\sqrt{a+3\sqrt{b}})}{a-2\sqrt{ab}+b}$$

$$2.281. \left( \frac{(1+a^{-1/2})^{1/6}}{(a^{1/2}+1)^{-1/3}} - \frac{(a^{1/2}-1)^{1/3}}{(1-a^{-1/2})^{-1/6}} \right)^{-2} \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot a^{1/12}}{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}}.$$

Решение.

ОДЗ:  $a > 1$ .

$$\begin{aligned} & \left( \frac{(1+a^{-1/2})^{1/6}}{(a^{1/2}+1)^{-1/3}} - \frac{(a^{1/2}-1)^{1/3}}{(1-a^{-1/2})^{-1/6}} \right)^{-2} \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot a^{1/12}}{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}} = \\ & = \left( \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{1/6} \cdot (\sqrt{a}+1)^{1/3} - (\sqrt{a}-1)^{1/3} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{1/6} \right)^{-2} \cdot \frac{\sqrt[12]{a}}{3(\sqrt{a} + \sqrt{a-1})} = \\ & = \left( \sqrt[6]{\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}} \cdot \sqrt[6]{(\sqrt{a}+1)^2} - \sqrt[6]{(\sqrt{a}-1)^2} \cdot \sqrt[6]{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}} \right)^{-2} \times \\ & \times \frac{\sqrt[12]{a}}{3(\sqrt{a} + \sqrt{a-1})} = \left( \sqrt[6]{\frac{(\sqrt{a}+1)^3}{\sqrt{a}}} - \sqrt[6]{\frac{(\sqrt{a}-1)^3}{\sqrt{a}}} \right)^{-2} \cdot \frac{\sqrt[12]{a}}{3(\sqrt{a} + \sqrt{a-1})} = \\ & = \left( \frac{\sqrt{\sqrt{a}+1} - \sqrt{\sqrt{a}-1}}{\sqrt[12]{a}} \right)^{-2} \cdot \frac{\sqrt[12]{a}}{3(\sqrt{a} + \sqrt{a-1})} = \\ & = \left( \frac{\sqrt{a}+1 - 2\sqrt{a-1} + \sqrt{a}-1}{\sqrt[6]{a}} \right)^{-1} \cdot \frac{\sqrt[12]{a}}{3(\sqrt{a} + \sqrt{a-1})} = \\ & = \frac{\sqrt[6]{a}}{2(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})} \cdot \frac{\sqrt[12]{a}}{3(\sqrt{a} + \sqrt{a-1})} = \frac{\sqrt[12]{a^3}}{6\left((\sqrt{a})^2 - (\sqrt{a-1})^2\right)} = \\ & = \frac{\sqrt[4]{a}}{6(a-a+1)} = \frac{\sqrt[4]{a}}{6}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt[4]{a}}{6}$ .

$$2.282. \left( \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x} \right) \cdot \left( \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{1}{x} \right) \quad 0 < x < 1.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x} \right) \cdot \left( \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{1}{x} \right) = \\ & = \left( \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{(1-x)^2}}{\sqrt{(1-x)(1+x)}-\sqrt{(1-x)^2}} \right) \cdot \left( \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} - \frac{1}{x} \right) = \\ & = \left( \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{(1-x)^2}}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{1}{x} \right) = \\ & = \left( \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} \right) = \\ & = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \\ & = \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \\ & = \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \frac{1+x+2\sqrt{1-x^2}+1-x}{1+x-1+x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \\ & = \frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1-x^2}+1)(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2} = \frac{(\sqrt{1-x^2})^2-1}{x^2} = \\ & = \frac{1-x^2-1}{x^2} = -\frac{x^2}{x^2} = -1. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $-1$ .

$$2.283. \frac{(pq^{-1} + 1)^2}{pq^{-1} - p^{-1}q} \cdot \frac{p^3q^{-3} - 1}{p^2q^{-2} + pq^{-1} + 1} : \frac{p^3q^{-3} + 1}{pq^{-1} + p^{-1}q - 1}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} p \neq 0, \\ q \neq 0, \\ p \neq \pm q. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(pq^{-1} + 1)^2}{pq^{-1} - p^{-1}q} \cdot \frac{p^3q^{-3} - 1}{p^2q^{-2} + pq^{-1} + 1} : \frac{p^3q^{-3} + 1}{pq^{-1} + p^{-1}q - 1} = \\ & = \left(\frac{p}{q} + 1\right)^2 \cdot \frac{\frac{p^3}{q^3} - 1}{\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} + 1} : \frac{\frac{p^3}{q^3} + 1}{\frac{p}{q} + \frac{q}{p} - 1} = \\ & = \frac{\left(\frac{p+q}{q}\right)^2}{\frac{p^2 - q^2}{pq}} \cdot \frac{\frac{p^3 - q^3}{q^3}}{q^2} : \frac{\frac{p^3 + q^3}{q^3}}{pq} = \\ & = \frac{(p+q)^2}{q^2} \cdot \frac{pq}{p^2 - q^2} \cdot \frac{p^3 - q^3}{q^3} \cdot \frac{q^2}{p^2 + pq + q^2} : \left(\frac{p^3 + q^3}{q^3} \cdot \frac{pq}{p^2 - pq + q^2}\right) = \\ & = \frac{(p+q)^2 p}{q(p+q)(p-q)} \cdot \frac{(p-q)(p^2 + pq + q^2)}{q(p^2 + pq + q^2)} : \left(\frac{(p+q)(p^2 - pq + q^2)p}{q^2(p^2 - pq + q^2)}\right) = \\ & = \frac{p(p+q)}{q^2} : \frac{p(p+q)}{q^2} = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$2.284. \sqrt{\frac{\sqrt{(a-y)(y-b)} + \sqrt{(a+y)(y+b)}}{\sqrt{(a+y)(y+b)} - \sqrt{(a-y)(y-b)}}}; y = \sqrt{ab}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } ab > 0.$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{\sqrt{(a-y)(y-b)} + \sqrt{(a+y)(y+b)}}{\sqrt{(a+y)(y+b)} - \sqrt{(a-y)(y-b)}}} = \\
& = \sqrt{\frac{(\sqrt{(a-y)(y-b)} + \sqrt{(a+y)(y+b)}) (\sqrt{(a+y)(y+b)} + \sqrt{(a-y)(y-b)})}{(\sqrt{(a+y)(y+b)} - \sqrt{(a-y)(y-b)}) (\sqrt{(a+y)(y+b)} + \sqrt{(a-y)(y-b)})}} = \\
& = \sqrt{\frac{(\sqrt{(a-y)(y-b)} + \sqrt{(a+y)(y+b)})^2}{(\sqrt{(a+y)(y+b)})^2 - (\sqrt{(a-y)(y-b)})^2}} = \\
& = \sqrt{\frac{(a-y)(y-b) + 2\sqrt{(a^2 - y^2)}(y^2 - b^2) + (a+y)(y+b)}{(a+y)(y+b) - (a-y)(y-b)}} = \\
& = \sqrt{\frac{-y^2 + (a+b)y - ab + 2\sqrt{-y^4 + (a^2 + b^2)y^2 - a^2b^2} + y^2 + (a+b)y + ab}{y^2 + (a+b)y + ab + y^2 - (a+b)y + ab}} = \\
& = \sqrt{\frac{2(a+b)y + 2\sqrt{-y^4 + (a^2 + b^2)y^2 - a^2b^2}}{2y^2 + 2ab}} = \\
& = \sqrt{\frac{(a+b)y + \sqrt{-y^4 + (a^2 + b^2)y^2 - a^2b^2}}{y^2 + ab}} = \\
& = \sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab} + \sqrt{-a^2b^2 + (a^2 + b^2)ab - a^2b^2}}{ab + ab}} = \\
& = \sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab} + \sqrt{(a^2 + b^2)ab - 2a^2b^2}}{2ab}} = \\
& = \sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab} + \sqrt{ab(a^2 - 2ab + b^2)}}{2ab}} = \\
& = \sqrt{\frac{\sqrt{ab} \left( a + b + \sqrt{(a-b)^2} \right)}{2ab}} = \sqrt{\frac{a + b + |a - b|}{2\sqrt{ab}}} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{a+b-a+b}{2\sqrt{ab}}} = \sqrt{\frac{2b}{2\sqrt{ab}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}} = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}, & \text{если } 0 < a < b; \\ \sqrt{\frac{a+b+a-b}{2\sqrt{ab}}} = \sqrt{\frac{2a}{2\sqrt{ab}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}, & \text{если } 0 < b < a. \end{cases}$$

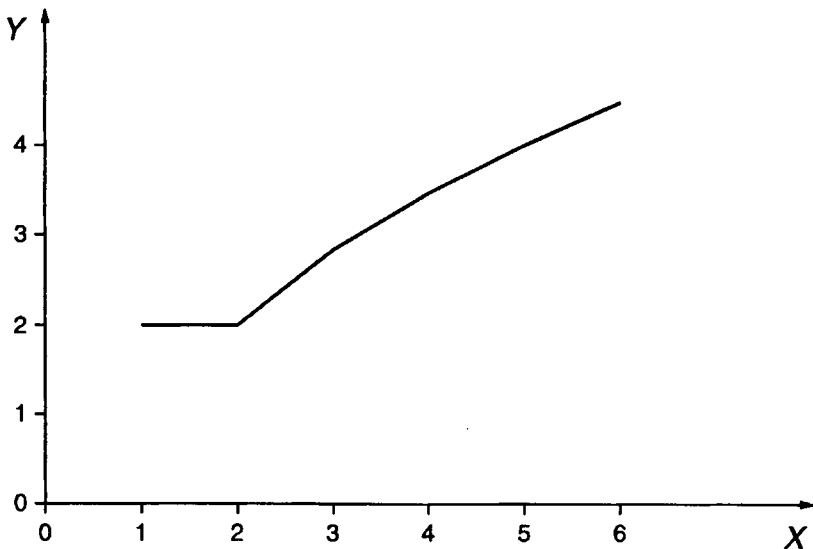
Ответ:  $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$  при  $0 < b < a$ ;  $\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$  при  $0 < a < b$ .

2.285. Упростить выражение  $y = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ , а затем построить график функции  $y$  для  $1 \leq x < \infty$ .

Решение.

ОДЗ:  $x \geq 0$ .

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \\ &= \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = \sqrt{x-1}+1 + |\sqrt{x-1}-1| = \\ &= \begin{cases} \sqrt{x-1}+1 - \sqrt{x-1}+1 = 2, & \text{если } 1 \leq x \leq 2; \\ \sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 = 2\sqrt{x-1}, & \text{если } x > 2. \end{cases} \end{aligned}$$



$$\text{Ответ: } y = \begin{cases} 2 & \text{при } 1 \leq x \leq 2; \\ 2\sqrt{x-1} & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

**2.286.** При каком значении  $k$  многочлен  $x^2 + 2(k-9)x + (k^2 + 3k + 4)$  можно представить в виде полного квадрата?

*Решение.*

Многочлен  $x^2 + 2(k-9)x + (k^2 + 3k + 4)$  можно представить в виде полного квадрата, если дискриминант равен нулю, т.е.

$$(2(k-9))^2 - 4(k^2 + 3k + 4) = 0, \quad 4(k^2 - 18k + 81 - k^2 - 3k - 4) = 0,$$

$$-21k + 77 = 0, \text{ откуда } k = \frac{77}{21} = \frac{11}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{11}{3}.$$

**2.287.** При каких значениях  $a$  и  $b$  трехчлен  $16x^2 + 144x + (a+b)$  представляет собой полный квадрат, если известно, что  $b-a = -7$ ?

*Решение.*

Трехчлен  $16x^2 + 144x + (a+b)$  представляет собой полный квадрат при  $b-a = -7$ , если дискриминант равен нулю, т.е.

$$\begin{cases} b-a = -7, \\ 144^2 - 4 \cdot 16(a+b) = 0, \end{cases} \begin{cases} b-a = -7, \\ b+a = 324, \end{cases} \Rightarrow a = 165,5; b = 158,5.$$

$$\text{Ответ: } a = 165,5; b = 158,5.$$

**2.288.** Проверить, что число  $x = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80} - 4}$  является корнем уравнения  $x^3 + 12x - 8 = 0$ .

*Решение.*

$$\text{Пусть } x = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80} - 4} = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}}.$$

Подставив это значение  $x$  в уравнение, получим

$$\left( \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}} \right)^3 + 12 \left( \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}} \right) - 8 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{4-\sqrt{80}} + 3\sqrt[3]{4+\sqrt{80}} \times \\
& \times \left(\sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right)^3 + 12\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right) - 8 = 0, \\
& 4 + \sqrt{80} + 3\sqrt[3]{(4+\sqrt{80})(4-\sqrt{80})} \cdot \left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right) + 4 - \sqrt{80} + \\
& + 12\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right) - 8 = 0, \\
& 4 + \sqrt{80} + 3\sqrt[3]{16-80} \cdot \left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right) + 4 - \sqrt{80} + \\
& + 12\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right) - 8 = 0, \\
& 4 + \sqrt{80} - 12\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right) + 4 - \sqrt{80} + \\
& + 12\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{80}}\right) - 8 = 0, \\
& 0 = 0.
\end{aligned}$$

**2.289.** Многочлен  $x^8 - 16$  представить в виде произведения многочленов второй степени.

*Решение.*

$$\begin{aligned}
x^8 - 16 &= (x^4 - 4)(x^4 + 4) = (x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2) = \\
&= (x^2 - 2)(x^2 + 2)\left((x^2 + 2)^2 - 4x^2\right) = (x^2 - 2)(x^2 + 2)\left((x^2 + 2)^2 - (2x)^2\right) = \\
&= (x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = (x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^2 - 2x + 2) \times \\
&\times (x^2 + 2x + 2)
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $(x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

**2.290.** Исключив  $u$  и  $v$  из равенств  $u - v = a$ ,  $u^2 - v^2 = b$ ,  $u^3 - v^3 = c$ , найти соотношение между  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

*Решение.*

$$\begin{cases} u - v = a, & \begin{cases} u - v = a, & (1) \\ (u - v)(u + v) = b, & (2) \\ (u - v)((u + v)^2 - uv) = c. & (3) \end{cases} \end{cases}$$



Подставив  $u-v=a$  из (1) в (2), получим  $a(u+v)=b$ , откуда

$$u+v = \frac{b}{a} \quad (2^*). \text{ Сложив (1) с (2*) , запишем}$$

$$\begin{cases} u-v=a \\ + \\ u+v=\frac{b}{a} \\ \hline 2u=a+\frac{b}{a} \end{cases}, \text{ откуда } u = \frac{a^2+b}{2a} \quad (4).$$

Вычтя (1) из (2\*), будем иметь

$$\begin{cases} u+v=\frac{b}{a} \\ - \\ u-v=a \\ \hline 2u=\frac{b}{a}-a \end{cases}, \text{ откуда } v = \frac{b-a^2}{2a} \quad (5).$$

Умножив (4) на (5), получим  $uv = \frac{a^2+b}{2a} \cdot \frac{b-a^2}{2a} = -\frac{a^4-b^2}{4a^2}$

(6). Подставив значения  $u-v=a$  из (1),  $u+v = \frac{b}{a}$  из (2\*) и

$$uv = -\frac{a^4-b^2}{4a^2} \text{ из (6) в (3), найдем } a\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^4-b^2}{4a^2}\right) = c, \text{ или}$$

$$\frac{b^2}{a} + \frac{a^4-b^2}{4a} = c, \text{ или } 4b^2 + a^4 - b^2 = 4ac, \text{ или } 3b^2 + a^4 = 4ac.$$

*Ответ:*  $3b^2 + a^4 = 4ac$ .

Проверить справедливость равенств (2.291 – 2.304):

$$2.291. \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3.$$

*Решение.*

Возведем обе части равенства в куб. Получим

$$9 + \sqrt{80} + 9 - \sqrt{80} + 3\sqrt[3]{(9 + \sqrt{80})(9 - \sqrt{80})} \cdot \left( \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} \right) = 27$$

(1). Так как по условию  $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 3$ , то равенство (1) приобретет вид  $18 + 3\sqrt[3]{81 - 80} \cdot 3 = 27$ ,  $18 + 3 \cdot 1 \cdot 3 = 27$ ,  $27 = 27$ .

$$2.292. \sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{20 - 4\sqrt{5}}.$$

*Решение.*

Возведем обе части заданного равенства в квадрат. Получим

$$\begin{aligned} & 8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - 2\sqrt{(8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})(8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})} + 8 - \\ & - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 20 - 4\sqrt{5}, \quad 16 - 2\sqrt{64 - 4(10 + 2\sqrt{5})} = 20 - 4\sqrt{5}, \\ & 16 - 2\sqrt{64 - 40 - 8\sqrt{5}} = 20 - 4\sqrt{5}, \quad 16 - 2\sqrt{24 - 8\sqrt{5}} = 20 - 4\sqrt{5}, \\ & 4\sqrt{5} - 4 = 2\sqrt{24 - 8\sqrt{5}}, \quad 2\sqrt{5} - 2 = \sqrt{24 - 8\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Возведя последнее равенство в квадрат, получим  $24 - 8\sqrt{5} = 24 - 8\sqrt{5}$ .

$$2.293. \left( \frac{3}{\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{25}} + \frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{5}} - \frac{10}{\sqrt[3]{25}} \right) : (\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{5}) + \sqrt[6]{5} = \sqrt{2}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \left( \frac{3}{\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{25}} + \frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{5}} - \frac{10}{\sqrt[3]{25}} \right) : (\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{5}) + \sqrt[6]{5} = \\ & = \left( \frac{3(\sqrt[3]{64^2} + \sqrt[3]{64 \cdot 25} + \sqrt[3]{25^2})}{(\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{64^2} + \sqrt[3]{64 \cdot 25} + \sqrt[3]{25^2})} + \frac{\sqrt[3]{40}(\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{8 \cdot 5} + \sqrt[3]{5^2})}{(\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{8 \cdot 5} + \sqrt[3]{5^2})} - \frac{10 \cdot \sqrt[3]{25^2}}{\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{25^2}} \right) \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{5}} + \sqrt[6]{5} = \left( \frac{3(16 + 4\sqrt[3]{5^2} + 5\sqrt{5})}{64 - 25} + \frac{2\sqrt[3]{5}(4 - 2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2})}{8 + 5} - \frac{50\sqrt[6]{5}}{25} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{5}} + \sqrt[6]{5} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{3(16 + 4\sqrt[3]{5^2} + 5\sqrt[3]{5})}{39} + \frac{2\sqrt[3]{5}(4 - 2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2})}{13} - 2\sqrt[3]{5} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{5}} + \sqrt[6]{5} = \\
&= \frac{16 + 4\sqrt[3]{5^2} + 5\sqrt[3]{5} + 8\sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{5} + 10 - 26\sqrt[3]{5}}{13} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{5}} + \sqrt[6]{5} = \frac{2 - \sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{5}} + \sqrt[6]{5} = \\
&= \frac{2 - \sqrt[3]{5} + \sqrt[6]{40} + \sqrt[6]{5^2}}{\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{5}} = \frac{2 - \sqrt[3]{5} + \sqrt{2}\sqrt[6]{5} + \sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{5}} = \frac{2 + \sqrt{2}\sqrt[6]{5}}{\sqrt{2} + \sqrt[6]{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt[6]{5})}{\sqrt{2} + \sqrt[6]{5}} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

2.294.  $\sqrt{6m + 2\sqrt{9m^2 - n^2}} - \sqrt{6m - 2\sqrt{9m^2 - n^2}} = 2\sqrt{3m - n}$ .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 6m + 2\sqrt{9m^2 - n^2} \geq 0, \\ 6m - 2\sqrt{9m^2 - n^2} \geq 0, \\ 3m - n \geq 0, \\ 3m + n \geq 0, \end{cases} \begin{cases} m > 0, \\ n \leq 3m. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{6m + 2\sqrt{9m^2 - n^2}} - \sqrt{6m - 2\sqrt{9m^2 - n^2}} = \\
&= \sqrt{3m + n + 2\sqrt{(3m + n)(3m - n)}} + 3m - n - \\
&- \sqrt{3m + n - 2\sqrt{(3m + n)(3m - n)}} + 3m - n = \\
&= \sqrt{(\sqrt{3m + n} + \sqrt{3m - n})^2} - \sqrt{(\sqrt{3m + n} - \sqrt{3m - n})^2} = \\
&= \sqrt{3m + n} + \sqrt{3m - n} - |\sqrt{3m + n} - \sqrt{3m - n}| = \\
&= \begin{cases} \sqrt{3m + n} + \sqrt{3m - n} + \sqrt{3m + n} - \sqrt{3m - n} = 2\sqrt{3m + n} \text{ для } n < 0, \\ \sqrt{3m + n} + \sqrt{3m - n} - \sqrt{3m + n} + \sqrt{3m - n} = 2\sqrt{3m - n} \text{ для } n \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Учитывая ОДЗ, получаем  $2\sqrt{3m - n} = 2\sqrt{3m - n}$ .

Ответ: верно для всех  $n \in [0; 3m]$ ,  $m > 0$ .

$$2.295. \frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решение.

$$\text{Пусть } a = \frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Так как  $a > 0$ ,  $b > 0$ , то  $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ . Имеем

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}-2\sqrt{(\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1})(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1})}+\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}} = \\ &= \frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{2}+1}} = \frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2(\sqrt[4]{8}-\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1})} = \frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1})} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$b^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}. \quad a^2 = b^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и заданное равенство спра-}$$

ведливо.

$$2.296. \frac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}+1)^{1/3}} + \frac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}-1)^{1/3}} = 2\sqrt{a-1}.$$

Решение.

ОДЗ:  $1 \leq a \neq 2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}+1)^{1/3}} + \frac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}-1)^{1/3}} &= \frac{\sqrt[3]{a-1+2\sqrt{a-1}+1}}{1} + \\ &+ \frac{\sqrt[3]{a-1-2\sqrt{a-1}+1}}{1} = \sqrt[3]{(\sqrt{a-1}+1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a-1}+1} + \\ &+ \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{a-1}-1)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{a-1}-1}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a-1}-1} = \sqrt{a-1}+1 + \sqrt{a-1}-1 = 2\sqrt{a-1}. \end{aligned}$$

$$2.297. \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} \cdot (2-\sqrt{3})=1.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} \cdot (2-\sqrt{3}) &= \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3} = \\ &= \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = \\ &= \sqrt[3]{(26+15\sqrt{3})(26-15\sqrt{3})} = \sqrt[3]{26^2 - (15\sqrt{3})^2} = \sqrt[3]{676-675} = \\ &= \sqrt[3]{1} = 1. \end{aligned}$$

$$2.298. \frac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{9-4\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{16+8\sqrt{5}+5}}{4+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5-4\sqrt{5}+4} = \\ &= \frac{\sqrt{(4+\sqrt{5})^2}}{4+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = \frac{4+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5}-2) = \sqrt{5}-2. \end{aligned}$$

$$2.299. \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} &= \frac{4-4\sqrt{3}+3}{\sqrt[3]{8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3}}} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{2-\sqrt{3}} = \\ &= 2-\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$2.300. \frac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}}\right)^3 &= \left(\frac{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}\right)^3; \quad \frac{16}{1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}} = \frac{20+12\sqrt{3}}{8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3}}; \\ \frac{16}{10+6\sqrt{3}} &= \frac{20+12\sqrt{3}}{26+15\sqrt{3}}; \quad \frac{16}{2(5+3\sqrt{3})} = \frac{4(5+3\sqrt{3})}{26+15\sqrt{3}}; \quad \frac{2}{5+3\sqrt{3}} = \frac{5+3\sqrt{3}}{26+15\sqrt{3}}; \end{aligned}$$

$$2(26 + 15\sqrt{3}) = (5 + 3\sqrt{3})(5 + 3\sqrt{3}); \quad 52 + 30\sqrt{3} = 25 + 30\sqrt{3} + 27;$$

$$52 + 30\sqrt{3} = 52 + 30\sqrt{3}.$$

Что и требовалось доказать.

$$2.301. \quad \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}} \cdot (5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}} = 1.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}} \cdot (5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}} = \\ & = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{3} \cdot 2 + 2 \cdot (3+2\sqrt{3} \cdot 2 + 2)}(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{9 \cdot 3 - 3\sqrt{9 \cdot 2} + 3\sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{4 \cdot 2}}} = \\ & = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 (49-20\sqrt{6})}{3\sqrt{3}-9\sqrt{2}+6\sqrt{3}-2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 (49-20\sqrt{6})}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}} = \\ & = \frac{((\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})) \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})(49-20\sqrt{6})}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}} = \\ & = \frac{((\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2) \cdot (49\sqrt{3} - 20\sqrt{18} + 49\sqrt{2} - 20\sqrt{12})}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}} = \\ & = \frac{(3-2)(49\sqrt{3} - 20\sqrt{9 \cdot 2} + 49\sqrt{2} - 20\sqrt{4 \cdot 3})}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}} = \\ & = \frac{49\sqrt{3} - 60\sqrt{2} + 49\sqrt{2} - 40\sqrt{3}}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}} = 1. \end{aligned}$$

$$2.302. \quad \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} - \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} - \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = \\ & = \sqrt[3]{27+27\sqrt{2}+18+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{27-27\sqrt{2}+18-2\sqrt{2}} = \\ & = \sqrt[3]{(3+\sqrt{2})^3} - \sqrt[3]{(3-\sqrt{2})^3} = 3+\sqrt{2} - 3+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$2.303. \frac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}} = 3-\sqrt{2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}} &= \frac{9-6\sqrt{2}+2}{\sqrt[3]{27-27\sqrt{2}+18-2\sqrt{2}}} = \frac{(3-\sqrt{2})^2}{\sqrt[3]{(3-\sqrt{2})^3}} = \frac{(3-\sqrt{2})^2}{(3-\sqrt{2})} = \\ &= 3-\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$2.304. \sqrt{10p+2\sqrt{25p^2-q^2}} - \sqrt{10p-2\sqrt{25p^2-q^2}} = 2\sqrt{5p-q}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 10p+2\sqrt{25p^2-q^2} \geq 0, \\ 10p-2\sqrt{25p^2-q^2} \geq 0, \text{ или } \begin{cases} p > 0, \\ -5 \leq q \leq 5p. \end{cases} \\ 25p^2-q^2 \geq 0, \\ 5p-q \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{10p+2\sqrt{25p^2-q^2}} - \sqrt{10p-2\sqrt{25p^2-q^2}} = \\ &= \sqrt{5p+q+2\sqrt{(5p+q)(5p-q)}} + 5p-q - \\ &- \sqrt{5p+q-2\sqrt{(5p+q)(5p-q)}} + 5p-q = \\ &= \sqrt{(\sqrt{5p+q}+\sqrt{5p-q})^2} - \sqrt{(\sqrt{5p+q}-\sqrt{5p-q})^2} = \\ &= \sqrt{5p+q} + \sqrt{5p-q} - |\sqrt{5p+q} - \sqrt{5p-q}| = \\ &= \begin{cases} \sqrt{5p+q} + \sqrt{5p-q} + \sqrt{5p+q} - \sqrt{5p-q} = 2\sqrt{5p+q} & \text{для } q < 0, \\ \sqrt{5p+q} + \sqrt{5p-q} - \sqrt{5p+q} + \sqrt{5p-q} = 2\sqrt{5p-q} & \text{для } p \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Учитывая ОДЗ, имеем  $2\sqrt{5p-q}$  для  $\begin{cases} 0 \leq q \leq 5p, \\ p > 0. \end{cases}$

Ответ: верно для всех  $q \in [0; 5p]$ ,  $p > 0$ .

2.305. Преобразованием левой части проверить, что:

$$a) \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2;$$

$$b) \sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} a) \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} &= \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = \\ &= \sqrt[3]{1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{1-3\sqrt{2}+6-2\sqrt{2}} = \\ &= \sqrt[3]{(1+2\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(1-2\sqrt{2})^3} = 1+2\sqrt{2} + 1-2\sqrt{2} = 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} &= \sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}} = \\ &= \sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{(1+\sqrt{3})^3} = \sqrt{3+\sqrt{3}} + 1 + \sqrt{3} = \sqrt{3+2\sqrt{3}} + 1 = \\ &= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3} + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливость равенств а) и б) доказана.

2.306. Число 19 представить в виде разности кубов натуральных чисел. Показать, что такое представление единственно.

*Решение.*

По условию  $x^3 - y^3 = 19$ , где  $x - y = n$ ;  $x, y, n \in N$ , поэтому  $19 = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = n \cdot m$ ,  $m = x^2 + xy + y^2$ . Так как  $y \geq 1$ , то  $x > 2$  и  $m > 7$ , поэтому  $n < 3$ . Так как 19 – нечетное, то  $n \neq 2$ . Единственное возможное значение  $n = 1$ ,  $x = y + 1$ .

$(y + 1)^2 + y(y + 1) + y^2 = 19 \Leftrightarrow y^2 + y - 6 = 0$ ,  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = -3$  — не подходит по условию задачи. Если  $y = 2$ , то  $x = 3$  и  $x^3 - y^3 = 27 - 8 = 19$ .

Единственность очевидна из вышеприведенных рассуждений.

*Ответ:*  $3^3 - 2^3$ .



**2.307.** Преобразовать сумму  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$  к наиболее

простому виду.

*Решение.*

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)}, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{An + A + Bn}{n(n+1)},$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}, \quad \text{откуда } 1 = (A+B)n + A. \text{ Это равенство справедливо для любых } n, \text{ поэтому если } n=0, \text{ то } A=1; \text{ если } n=-1, \text{ то } -B=1, B=-1.$$

Получили  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ . Далее,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

*Ответ:*  $\frac{n}{n+1}$ .

**2.308.** Показать, что  $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n}{2n+4}$ .

*Решение.*

$$\frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + B(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{An + A + Bn + 2B}{n^2 + 3n + 2} = \frac{(A+B)n + A + 2B}{n^2 + 3n + 2}, \quad \text{откуда } (A+B)n + A + 2B = 1.$$

Многочлены тождественно равны, если коэффициенты при соответствующих степенях неизвестного равны. Отсюда

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A+2B=1, \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B, \\ -B+2B=1, \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B, \\ B=1, \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1, \\ B=1. \end{cases}$$

Получили  $\frac{1}{n^2 + 3n + 2} = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1}$ . Далее,

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-2}{2(n+2)} = \frac{n}{2n+4}.$$

2.309. Доказать, что если  $a + b = 1$ , то  $\frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2 + 3}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} &= \frac{a(a^3 - 1) - b(b^3 - 1)}{(b^3 - 1)(a^3 - 1)} = \frac{a^4 - a - b^4 + b}{a^3b^3 - a^3 - b^3 - 1} = \\ &= \frac{(a^4 - b^4) - (a - b)}{a^3b^3 - (a^3 + b^3) + 1} = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - (a - b)}{a^3b^3 - (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 1} = \\ &= \frac{(a - b)(a + b)((a + b)^2 - 2ab) - (a - b)}{a^3b^3 - (a + b)((a + b)^2 - 3ab) + 1} = \frac{(a - b)((a + b)(a + b)^2 - 2ab - 1)}{a^3b^3 - (a + b)((a + b)^2 - 3ab) + 1} = \\ &= \frac{(a - b)(1 - 2ab - 1)}{a^3b^3 - 1 + 3ab + 1} = \frac{(a - b)(-2ab)}{a^2b^3 + 3ab} = \frac{(b - a) \cdot 2ab}{ab(a^2b^2 + 3)} = \frac{2(b - a)}{a^2b^2 + 3}. \end{aligned}$$

2.310. Определить  $A$ ,  $B$  и  $C$  так, чтобы для всех допустимых значений  $x$  имело место равенство

$$\frac{x^2 + 5}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 1}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 5}{x^3 - 3x + 2} &= \frac{A(x - 1)^2 + B(x + 2) + C(x + 2)(x - 1)}{(x + 2)(x - 1)^2} = \\ &= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx + 2B + Cx^2 + Cx - 2C}{x^3 - 3x + 2} = \\ &= \frac{(A + C)x^2 + (-2A + B + C)x + A + 2B - 2C}{x^3 - 3x + 2}, \end{aligned}$$

$$\text{откуда } (A + C)x^2 + (-2A + B + C)x + A + 2B - 2C = x^2 + 5.$$

Многочлены тождественно равны, если коэффициенты при соответствующих степенях  $x$  равны. Отсюда

$$\begin{cases} A+C=1, \\ -2A+B+C=0, \Rightarrow C=1-A \text{ и} \\ A+2B-2C=5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2A+B+1-A=0, \\ A+2B-2(1-A)=5, \end{cases} \quad \begin{cases} -3A+B=-1, \\ 3A+2B=7. \end{cases} \Rightarrow A=1, B=2, C=1-1=0.$$

Ответ:  $A=1, B=2, C=0$ .

**2.311.** Доказать, что: а) сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9; б) число  $p^5 - p$  делится на 5 при любом натуральном значении  $p$ ; в) число  $k^3 + 5k$  делится на 3 при  $k \in N$ .

*Решение.*

Среди  $k$  последовательных целых чисел одно всегда делится на  $k$ .

а) Среди трех последовательных натуральных чисел  $n-1, n, n+1$  одно всегда делится на 3. Имеем

$$\begin{aligned} (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = \\ &= 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2) = 3n(n^2 - 1 + 3) = 3(n-1)n(n+1) + 9n = 3m + 9n. \end{aligned}$$

$m:3 \Rightarrow 3m:9$  и сумма делится на 9.

б) Среди пяти последовательных целых чисел одно всегда делится на 5. Имеем

$$\begin{aligned} p^5 - p &= (p^4 - 1)p = (p^2 - 1)(p^2 + 1)p = (p-1)p(p+1)(p^2 + 1) = \\ &= (p-1)p(p+1)(p^2 - 4 + 5) = (p-2)(p-1)p(p+1)(p+2) + 5(p-1)p(p+1). \end{aligned}$$

Первое слагаемое делится на 5 как произведение пяти последовательных целых чисел, а значит, и сумма кратна пяти.

$$\text{в) } k^3 + 5k = k(k^2 + 5) = k(k^2 - 1 + 6) = (k-1)k(k+1) + 6k.$$

Первое слагаемое делится на 3 как произведение трех последовательных целых чисел, а значит, и сумма кратна трем.

Что и требовалось доказать.

# ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

## ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

**Соотношения между тригонометрическими функциями  
одного и того же аргумента**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad (3.1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \quad (3.2)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z; \quad (3.3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z; \quad (3.4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \quad (3.5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z \quad (3.6)$$

(здесь и в дальнейшем запись  $n \in Z$  означает, что  $n$  — любое целое число).

## Значения тригонометрических функций некоторых углов

Для некоторых углов можно записать точные выражения их тригонометрических величин (табл. 3.1).

Таблица 3.1

| Аргумент<br>( $\alpha$ , градусы,<br>радианы) | Функция                               |                                       |  |  |
|---|---------------------------------------|---------------------------------------|--|--|
|   | $\sin \alpha$                         | $\cos \alpha$                         | $\operatorname{tg} \alpha$               | $\operatorname{ctg} \alpha$              |
| $0^\circ (0)$                                 | 0                                     | 1                                     | 0  | $\infty$ (не<br>определен)               |
| $15^\circ \left(\frac{\pi}{12}\right)$        | $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$        | $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$        | $2-\sqrt{3}$                             | $2+\sqrt{3}$                             |
| $18^\circ \left(\frac{\pi}{10}\right)$        | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$                | $\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$ |
| $30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$         | $\frac{1}{2}$                         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$                  | $\frac{1}{\sqrt{3}}$                     | $\sqrt{3}$                               |
| $36^\circ \left(\frac{\pi}{5}\right)$         | $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$                | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ |
| $45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$         | $\frac{1}{\sqrt{2}}$                  | $\frac{1}{\sqrt{2}}$                  | 1  | 1  |
| $54^\circ \left(\frac{3\pi}{10}\right)$       | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$                | $\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$ |
| $60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\right)$         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$                  | $\frac{1}{2}$                         | $\sqrt{3}$                               | $\frac{1}{\sqrt{3}}$                     |
| $75^\circ \left(\frac{5\pi}{12}\right)$       | $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$        | $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$        | $2+\sqrt{3}$                             | $2-\sqrt{3}$                             |
| $90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$         | 1                                     | 0                                     | $\infty$ (не<br>определен)               | 0  |

## Знаки функций по четвертям

Таблица 3.2

| Четверти | Функция       |               |                            |                             |
|----------|---------------|---------------|----------------------------|-----------------------------|
|          | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ |
| I        | +             | +             | +                          | +                           |
| II       | +             | -             | -                          | -                           |
| III      | -             | -             | +                          | +                           |
| IV       | -             | +             | -                          | -                           |

### Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ; \quad (3.7)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta ; \quad (3.8)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta ; \quad (3.9)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta ; \quad (3.10)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (3.11)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (3.12)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (3.13)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.14)$$

### Формулы двойных и тройных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha ; \quad (3.15)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha ; \quad (3.16)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \quad (3.17)$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \alpha \neq \pi n, n \in Z; \quad (3.18)$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad (3.19)$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \quad (3.20)$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), n \in Z; \quad (3.21)$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, n \in Z. \quad (3.22)$$

### Формулы половинного аргумента

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \quad (3.23)$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}; \quad (3.24)$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), n \in Z; \quad (3.25)$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \alpha \neq 2\pi n, n \in Z; \quad (3.26)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in Z; \quad (3.27)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in Z. \quad (3.28)$$

**Формулы преобразования суммы и разности  
тригонометрических функций в произведение**

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (3.29)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (3.30)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (3.31)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}; \quad (3.32)$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha); \quad (3.33)$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha); \quad (3.34)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), n \in \mathbb{Z}; \quad (3.35)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), n \in \mathbb{Z}; \quad (3.36)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (3.37)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (3.38)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (3.39)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (3.40)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; \quad (3.41)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -2 \operatorname{ctg} 2\alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; \quad (3.42)$$



$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad (3.43)$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \quad (3.44)$$

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right); \quad (3.45)$$

$$1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right); \quad (3.46)$$

$$1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos 45^\circ \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha)}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad (3.47)$$

$$1 - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\cos 45^\circ \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad (3.48)$$

$$1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad (3.49)$$

$$1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad (3.50)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1 = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \quad n \in Z; \quad (3.51)$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad (3.52)$$

$$1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z; \quad (3.53)$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad (3.54)$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \quad n \in Z; \quad (3.55)$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad (3.56)$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z. \quad (3.57)$$

## Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)); \quad (3.58)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)); \quad (3.59)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)); \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \\ & = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)); \quad (3.61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \\ & = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta + \gamma)); \quad (3.62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = \\ & = \frac{1}{4}(-\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta + \gamma)); \quad (3.63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \\ & = \frac{1}{4}(\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)). \quad (3.64) \end{aligned}$$

## Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (3.65)$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (3.66)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha, \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \quad (3.67)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z. \quad (3.68)$$

### Формулы приведения

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \cos \alpha, & \sin(\pi \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha, \\ \sin\left(\frac{3}{2} \pi \pm \alpha\right) &= -\cos \alpha, & \sin(2\pi \pm \alpha) &= \pm \sin \alpha; \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \pm \sin \alpha, & \cos(\pi \pm \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \cos\left(\frac{3}{2} \pi \pm \alpha\right) &= \pm \sin \alpha, & \cos(2\pi \pm \alpha) &= \cos \alpha; \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \mp \operatorname{ctg} \alpha, & \alpha \neq \pi n, & \quad n \in Z, \\ \operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) &= \pm \operatorname{tg} \alpha, & \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), & \quad n \in Z, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2} \pi \pm \alpha\right) &= \mp \operatorname{ctg} \alpha, & \alpha \neq \pi n, & \quad n \in Z, \\ \operatorname{tg}(2\pi \pm \alpha) &= \pm \operatorname{tg} \alpha, & \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), & \quad n \in Z; \end{aligned} \right\} \quad (3.71)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \mp \operatorname{tg} \alpha, & \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), & \quad n \in Z, \\ \operatorname{ctg}(\pi \pm \alpha) &= \pm \operatorname{ctg} \alpha, & \alpha \neq \pi n, & \quad n \in Z, \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2} \pi \pm \alpha\right) &= \mp \operatorname{tg} \alpha, & \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), & \quad n \in Z, \\ \operatorname{ctg}(2\pi \pm \alpha) &= \pm \operatorname{ctg} \alpha, & \alpha \neq \pi n, & \quad n \in Z. \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

## Обратные тригонометрические функции

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad (3.73)$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad (3.74)$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad (3.75)$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad (3.76)$$

$$\cos(\arccos x) = x, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad (3.77)$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad (3.78)$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad (3.79)$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad (3.80)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \quad (3.81)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0; \quad (3.82)$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1; \quad (3.83)$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \leq x < 0, \quad 0 < x \leq 1; \quad (3.84)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x; \quad (3.85)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0; \quad (3.86)$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad 0 < x \leq 1; \quad (3.87)$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1; \quad (3.88)$$

$$\arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leq x < 0; \end{cases} \quad (3.89)$$

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1; \quad (3.90)$$

$$\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & \text{если } -1 \leq x < 0; \end{cases} \quad (3.91)$$

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leq x < 0; \end{cases} \quad (3.92)$$

$$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } -1 \leq x < 0; \end{cases} \quad (3.93)$$

$$\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -1 < x < 1; \quad (3.94)$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -\infty < x < \infty; \quad (3.95)$$

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \geq 0, \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad (3.96)$$

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} - \pi, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad (3.97)$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x > 0, \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad (3.98)$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{если } x \geq 0, \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad (3.99)$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad (3.100)$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad (3.101)$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < \infty; \quad (3.102)$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin \left( x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), & \\ \text{если } xy \leq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \pi - \arcsin \left( x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), & \\ \text{если } x > 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin \left( x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), & \\ \text{если } x < 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \end{cases} \quad (3.103)$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } xy \geq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } x > 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } x < 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \end{cases} \quad (3.104)$$

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), \\ \text{если } x + y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), \\ \text{если } x + y < 0; \end{cases} \quad (3.105)$$

$$\arccos x - \arccos y = \begin{cases} -\arccos\left(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), \\ \text{если } x \geq y; \\ \arccos\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), \\ \text{если } x < y; \end{cases} \quad (3.106)$$

$$\arctg x + \arctg y = \begin{cases} \arctg \frac{x+y}{1-xy}, \text{ если } xy < 1; \\ \pi + \arctg \frac{x+y}{1-xy}, \text{ если } x > 0 \text{ и } xy > 1; \\ -\pi + \arctg \frac{x+y}{1-xy}, \text{ если } x < 0 \text{ и } xy > 1; \end{cases} \quad (3.107)$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, & \text{если } xy > -1; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, & \text{если } x > 0 \text{ и } xy < -1; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, & \text{если } x < 0 \text{ и } xy < -1; \end{cases} \quad (3.108)$$

Доказать тождества (3.186—3.239):

$$3.186. \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \\ &= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1}{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) - 1} = \\ &= \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1}{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1} = \frac{-2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1} = \\ &= \frac{-2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{-3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.187. 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) &= 4 \left( \cos \frac{\pi}{6} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{6} \sin \alpha \right) \times \\ &\times \left( \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha \right) = 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \times \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) = \\
& = 4 \left( \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \sin \alpha \right)^2 \right) = 4 \left( \frac{3}{4} \cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \right) = \\
& = 3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 3(1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = \\
& = 3 - 3 \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 3 - 4 \sin^2 \alpha = \\
& = \frac{(3 - 4 \sin^2 \alpha) \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

**3.188.**  $\sin^{-1} 2\alpha \sin^{-1}(60^\circ - 2\alpha) \sin^{-1}(60^\circ + 2\alpha) = 4 \sin^{-1} 6\alpha.$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
& \sin^{-1} 2\alpha \sin^{-1}(60^\circ - 2\alpha) \sin^{-1}(60^\circ + 2\alpha) = \\
& = \frac{1}{\sin 2\alpha \sin(60^\circ - 2\alpha) \sin(60^\circ + 2\alpha)} = \\
& = \left[ \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \right] = \\
& = \frac{2}{\sin 2\alpha (\cos 4\alpha - \cos 120^\circ)} = \frac{2}{\sin 2\alpha \left( \cos 4\alpha + \frac{1}{2} \right)} = \\
& = \frac{2}{\sin 2\alpha \cos 4\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{4}{2 \sin 2\alpha \cos 4\alpha + \sin 2\alpha} = \\
& = \left[ \sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y)) \right] = \\
& = \frac{4}{-\sin 2\alpha + \sin 6\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin 6\alpha} = 4 \sin^{-1} 6\alpha.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.189. \frac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = \operatorname{ctg} \frac{15}{2} \alpha.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = \\ & = \frac{(\cos 6\alpha + \cos 9\alpha) - (\cos 7\alpha + \cos 8\alpha)}{(\sin 6\alpha + \sin 9\alpha) - (\sin 7\alpha + \sin 8\alpha)} = \\ & = \left[ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \right. \\ & \left. \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \\ & = \frac{2 \cos \frac{15\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} - 2 \cos \frac{15\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{15\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} - 2 \sin \frac{15\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cos \frac{15\alpha}{2} \left( \cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \sin \frac{15\alpha}{2} \left( \cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)} = \\ & = \frac{\cos \frac{15\alpha}{2}}{\sin \frac{15\alpha}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{15\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.190. \frac{\sin^2(3\pi - 4\alpha) + 4 \cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right) - 4}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) - 4 \cos^2\left(2\alpha - \frac{5}{2}\pi\right)} = \operatorname{ctg}^4 2\alpha.$$

Решение.

$$\frac{\sin^2(3\pi - 4\alpha) + 4 \cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right) - 4}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) - 4 \cos^2\left(2\alpha - \frac{5}{2}\pi\right)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sin(3\pi - 4\alpha))^2 + 4\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right)\right)^2 - 4}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)\right)^2 - 4\left(\cos\left(\frac{5}{2}\pi - 2\alpha\right)\right)^2} = \frac{\sin^2 4\alpha + 4\sin^2 2\alpha - 4}{\sin^2 4\alpha - 4\sin^2 2\alpha} = \\
&= \frac{4\sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha + 4(1 - \cos^2 2\alpha) - 4}{4\sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha - 4\sin^2 2\alpha} = \\
&= \frac{(1 - \cos^2 2\alpha)\cos^2 2\alpha + 1 - \cos^2 2\alpha - 1}{\sin^2 2\alpha(1 - \sin^2 2\alpha) - \sin^2 2\alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha - \cos^4 2\alpha - \cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha - \sin^4 2\alpha - \sin^2 2\alpha} = \\
&= \frac{-\cos^4 2\alpha}{-\sin^4 2\alpha} = \operatorname{ctg}^4 2\alpha.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.191. \frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi + \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos^{-2}\frac{\alpha}{4}\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\alpha}{4}\right) - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{7}{2}\pi\right)\right)} = \frac{1}{8}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi + \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos^{-2}\frac{\alpha}{4}\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\alpha}{4}\right) - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{7}{2}\pi\right)\right)} = \\
&= \frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi + \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \left(-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\alpha\right)\right)^2\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{4}\left(\left(\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\alpha}{4}\right)\right)^2 - \left(-\operatorname{tg}\left(\frac{7}{2}\pi - \frac{3}{4}\alpha\right)\right)^2\right)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos^2 \frac{\alpha}{4} \sin \left( \frac{5}{2} \pi + \frac{\alpha}{2} \right) \left( 1 + \left( -\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \alpha \right) \right)^2 \right) \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{4} \sin \left( \frac{5}{2} \pi + \frac{\alpha}{2} \right) \left( 1 + \left( -\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \alpha \right) \right)^2 \right)}{\left( \operatorname{tg} \left( \frac{3}{2} \pi - \frac{\alpha}{4} \right) \right)^2 - \left( -\operatorname{tg} \left( \frac{3}{4} \alpha - \frac{7}{2} \pi \right) \right)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} \left( 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\alpha}{4} \right)}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{4} - \operatorname{ctg}^2 \frac{3\alpha}{4}} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \left( 1 + \frac{\cos^2 \frac{3\alpha}{4}}{\sin^2 \frac{3\alpha}{4}} \right)}{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{4}}{\sin^2 \frac{\alpha}{4}} - \frac{\cos^2 \frac{3\alpha}{4}}{\sin^2 \frac{3\alpha}{4}}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos^2 \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{3\alpha}{4} + \cos^2 \frac{3\alpha}{4}}{\sin^2 \frac{3\alpha}{4}} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{3\alpha}{4} + \cos^2 \frac{3\alpha}{4}}{\sin^2 \frac{3\alpha}{4}}}{\frac{\sin^2 \frac{3\alpha}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{4} - \cos^2 \frac{3\alpha}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{4}}{\sin^2 \frac{\alpha}{4} \sin^2 \frac{3\alpha}{4}}} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{4}}{\sin^2 \frac{3\alpha}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{4} - \cos^2 \frac{3\alpha}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{4}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\left( 4 \sin^2 \frac{\alpha}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{4} \right) \cos \frac{\alpha}{2}}{4 \left( \sin \frac{\alpha}{4} - \cos \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{4} \right) \left( \sin \frac{3\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{3\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{4} \right)} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{8 \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{8 \sin \alpha} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$\begin{aligned}
 3.192. \quad & \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\right)\cos^{-1}\alpha - 2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)(1 + \sin(4\pi + \alpha))\cos^{-1}\alpha + 2\cos 2\alpha} = \\
 & = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right).
 \end{aligned}$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 & \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\right)\cos^{-1}\alpha - 2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)(1 + \sin(4\pi + \alpha))\cos^{-1}\alpha + 2\cos 2\alpha} = \\
 & = \frac{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \cdot (1 + \sin\alpha) \cdot \frac{1}{\cos\alpha} - 2\cos 2\alpha}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \cdot (1 + \sin\alpha) \cdot \frac{1}{\cos\alpha} + 2\cos 2\alpha} = \\
 & = \frac{\frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} \cdot (1 + \sin\alpha) \cdot \frac{1}{\cos\alpha} - 2\cos 2\alpha}{\frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} \cdot (1 + \sin\alpha) \cdot \frac{1}{\cos\alpha} + 2\cos 2\alpha} = \frac{1 - 2\cos 2\alpha}{1 + 2\cos 2\alpha} = \frac{2\left(\frac{1}{2} - \cos 2\alpha\right)}{2\left(\frac{1}{2} + \cos 2\alpha\right)} = \\
 & = \frac{\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha}{\cos\frac{\pi}{3} + \cos 2\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha + \alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right)}{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha + \alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right)} = \\
 & = \left[\frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))\right] = \sin x \sin y;
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) = \cos x \cos y \Big] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$$

Тождество доказано.

$$3.193. \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{9\pi}{2} - 2\alpha\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{3}}.$$

*Решение.*

$$\frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{9\pi}{2} - 2\alpha\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)} =$$

$$= \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} \cos 2\alpha + \sin\frac{\pi}{6} \sin 2\alpha\right) - \sqrt{3} \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + 2\left(\cos\frac{\pi}{6} \cos 2\alpha - \sin\frac{\pi}{6} \sin 2\alpha\right)} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) - \sqrt{3} \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cos 2\alpha + \sin 2\alpha - \sqrt{3} \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sqrt{3} \cos 2\alpha - \sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{3} \cos 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{3}}.$$

Тождество доказано.

$$3.194. \operatorname{tg} \alpha + \cos^{-1} \alpha - 1 = \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

*Решение.*

$$\operatorname{tg} \alpha + \cos^{-1} \alpha - 1 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} - 1 = \frac{\sin \alpha + 1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\left( \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Тождество доказано.

$$3.195. 1 + \operatorname{ctg} \alpha + \sin^{-1} \alpha = \frac{\sqrt{2} \cos \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

*Решение.*

По формулам  $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$ ,  $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ , им

$$1 + \operatorname{ctg} \alpha + \sin^{-1} \alpha = 1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\left( \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{\sqrt{2} \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cos \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{\sqrt{2} \cos \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \left( \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\alpha}{2} \right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cos \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Тождество доказано.

$$3.196. \frac{(1 + \sin \alpha) \operatorname{ctg} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}{2 \sin \left( \frac{7\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{5\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)} = -\operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right).$$

*Решение.*

$$\frac{(1 + \sin \alpha) \operatorname{ctg} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}{2 \sin \left( \frac{7\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{5\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{-(1 + \sin \alpha) \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \sin \left( \frac{7\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{5\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)} =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{-(1 + \sin \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \\
&= \frac{-(1 + \sin \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{-(1 + \sin \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \\
&= \frac{-(1 + \sin \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \alpha \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{-(1 + \sin \alpha) \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \alpha \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\alpha}{2}\right)} = \\
&= \frac{-(1 + \sin \alpha) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \alpha \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\alpha}{2}\right)} = \\
&= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sin \alpha) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right)} = \\
&= \frac{-(1 + \sin \alpha) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \alpha \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right)} = \\
&= \frac{-\left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)} = \\
&= -\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \\
&= -\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = -\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \\
&= -\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2 = -\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$\begin{aligned}
3.197. \quad & \frac{\operatorname{ctg}^2(2\alpha - \pi)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right)} - 3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi - 2\alpha\right) = \\
& = 4\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right).
\end{aligned}$$

*Решение.*

$$\frac{\operatorname{ctg}^2(2\alpha - \pi)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right)} - 3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi - 2\alpha\right) =$$

$$= \frac{(-\operatorname{ctg}(\pi - 2\alpha))^2}{1 + \left(\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)\right)^2} - 3\left(\cos\left(\frac{5}{2}\pi - 2\alpha\right)\right)^2 = \frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha} - 3\sin^2 2\alpha =$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}}{1 + \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}} - 3\sin^2 2\alpha = \frac{\frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}}{\frac{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}} - 3\sin^2 2\alpha =$$

$$= \cos^2 2\alpha - 3\sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha - 3(1 - \cos^2 2\alpha) =$$

$$= \cos^2 2\alpha - 3 + 3\cos^2 2\alpha = 4\cos^2 2\alpha - 3 = 4\left(\cos^2 2\alpha - \frac{3}{4}\right) =$$

$$= 4\left(\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 4\left(\cos 2\alpha - \cos \frac{\pi}{6}\right)\left(\cos 2\alpha + \cos \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \left[\cos x - \cos y = -2\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},\right.$$

$$\left.\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}\right] = 4\left(-2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\right) \times$$

$$\times 2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) = -4\left(2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)\right) \times$$

$$\times \left(2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\right) = -4\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right).$$

Тождество доказано.

$$3.198. \frac{4\cos^2(\alpha - \pi) - 4\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\alpha}{2}\right) + 3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{7}{2}\pi - \alpha\right)} = \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{4\cos^2(\alpha - \pi) - 4\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\alpha}{2}\right) + 3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{7}{2}\pi - \alpha\right)} = \\ & = \frac{4(\cos(\pi - \alpha))^2 - 4\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 + 3\left(\cos\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)\right)^2}{4\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 - \left(\cos\left(\frac{7}{2}\pi - \alpha\right)\right)^2} = \\ & = \frac{4\cos^2 \alpha - 4\cos^2 \frac{\alpha}{2} + 3\sin^2 \alpha}{4\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \alpha} = \frac{4\left(\cos 2\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4\cos^2 \frac{\alpha}{2} + 3\left(\sin 2\frac{\alpha}{2}\right)^2}{4\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \left(\sin 2\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \\ & = \frac{4\left(1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4\left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) + 3 \cdot 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ & = \frac{4\left(1 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4\sin^4 \frac{\alpha}{2}\right) - 4 + 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 12\sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{4\cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = \\ & = \frac{4 - 16\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 16\sin^4 \frac{\alpha}{2} - 4 + 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 12\sin^2 \frac{\alpha}{2} - 12\sin^4 \frac{\alpha}{2}}{4\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{4 \sin^4 \frac{\alpha}{2}}{4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}.$$

Тождество доказано.

$$3.199. \quad 1 - \cos(2\alpha - \pi) + \cos(4\alpha - 2\pi) = 4 \cos 2\alpha \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} 1 - \cos(2\alpha - \pi) + \cos(4\alpha - 2\pi) &= 1 - \cos(\pi - 2\alpha) + \cos(2\pi - 4\alpha) = \\ &= 1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 1 + \cos 2\alpha + \cos 2(2\alpha) = 1 + \cos 2\alpha + 2 \cos^2 2\alpha - 1 = \\ &= \cos 2\alpha + 2 \cos^2 2\alpha = 2 \cos 2\alpha \left(\frac{1}{2} + \cos 2\alpha\right) = 2 \cos 2\alpha \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos 2\alpha\right) = \\ &= \left[\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}\right] = 4 \cos 2\alpha \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right). \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.200. \quad \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1) \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5}{4}\pi\right) \sin^{-2}\left(\frac{5}{4}\pi + \alpha\right) = 2.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1) \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5}{4}\pi\right) \sin^{-2}\left(\frac{5}{4}\pi + \alpha\right) &= \\ &= \left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\right)^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1) \left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi - \alpha\right)\right) \left(\sin\left(\frac{5}{4}\pi + \alpha\right)\right)^{-2} = \\ &= \cos^2 \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1) \left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) \left(-\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right)^{-2} = \\ &= -\cos^2 \alpha \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\cos^2 \alpha \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = \frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = \\
&= \frac{\cos 2\alpha \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = \frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = \\
&= \frac{\cos 2\alpha}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) \frac{1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} + 2\alpha \right)}{2}} = \frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)} = \frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} \cdot \frac{1 + \sin 2\alpha}{2} = 2.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

3.201. 
$$\frac{\cos^4(\alpha - \pi)}{\cos^4\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \sin^4\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) - 1} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos^4(\alpha - \pi)}{\cos^4\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \sin^4\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) - 1} = \\
&= \frac{(\cos(\pi - \alpha))^4}{\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\right)^4 + \left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\right)^4 - 1} = \frac{\cos^4 \alpha}{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1} = \\
&= \frac{\cos^4 \alpha}{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\cos^4 \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1} =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\cos^4 \alpha}{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = -\frac{1}{2} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Тождество доказано.

$$3.202. \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3}{4}\pi\right)(1 - \sin 2\alpha) = \cos 2\alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3}{4}\pi\right)(1 - \sin 2\alpha) &= -\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right)(1 - \sin 2\alpha) = \\ &= -\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi - \pi}{4} - \alpha\right)(1 - \sin 2\alpha) = -\operatorname{tg}\left(\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right)(1 - \sin 2\alpha) = \\ &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)(1 - \sin 2\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)(1 - \sin 2\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \\ &= \frac{\left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha\right)(1 - \sin 2\alpha)}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha} = \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right)(1 - \sin 2\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha)(1 - \sin 2\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha)} = \\ &= \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)(1 - \sin 2\alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \\ &= \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \\ &= \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{\cos \alpha - \sin \alpha} = (\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha) = \end{aligned}$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha.$$

Тождество доказано.

$$3.203. \frac{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha + \sin 4\alpha} = -\operatorname{tg}^2 2\alpha.$$

*Решение.*

$$\frac{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{\frac{\cos 4\alpha \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \sin 4\alpha}{\frac{\cos 4\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \sin 4\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{\sin 2\alpha \cos 4\alpha - \cos 2\alpha \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha}}{\frac{\cos 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}} = \frac{\sin 2\alpha \cos 4\alpha - \cos 2\alpha \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha} \times$$

$$\times \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha \sin 2\alpha} = [\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y);$$

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)] =$$

$$= \frac{\sin(-2\alpha) \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha \cos 2\alpha} = -\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = -\operatorname{tg}^2 2\alpha.$$

Тождество доказано.

$$3.204. \operatorname{ctg}\left(4\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \cos^{-1}(4\alpha - 3\pi) = \operatorname{ctg}\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

*Решение.*

$$\operatorname{ctg}\left(4\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \cos^{-1}(4\alpha - 3\pi) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - 4\alpha\right) + \frac{1}{\cos(3\pi - 4\alpha)} =$$

$$= -\operatorname{tg} 4\alpha - \frac{1}{\cos 4\alpha} = -\frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} - \frac{1}{\cos 4\alpha} = -\frac{\sin 4\alpha + 1}{\cos 4\alpha} = -\frac{\sin 2(2\alpha) + 1}{\cos 2(2\alpha)} =$$

$$= -\frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} =$$

$$= -\frac{(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)^2}{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)} = -\frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha} =$$



$$= \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos \frac{\pi}{4} \cos 2\alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha}{\cos \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha - \sin \frac{\pi}{4} \cos 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{4}}{\sin 2\alpha \cos \frac{\pi}{4} - \cos 2\alpha \sin \frac{\pi}{4}} =$$

$$= [\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y); \sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y)] =$$

$$= \frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{ctg}\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Тождество доказано.

$$3.205. \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma - \cos(\alpha + \beta) \sin \gamma =$$

$$= 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

*Решение.*

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma - \cos(\alpha + \beta) \sin \gamma =$$

$$= (\sin \alpha + \sin \beta) + \sin \gamma - (\sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos(\alpha + \beta) \sin \gamma) =$$

$$= \left[ \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y) \right] =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + (\sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma)) =$$

$$= \left[ \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \cos \frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2} \sin \left( -\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \\
&= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos \frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \\
&= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left( \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2} \right) = \\
&= \left[ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = \\
&= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left( -2 \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \left( -\frac{\beta + \gamma}{2} \right) \right) = 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.206. \quad \frac{2 \cos^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1}{2 \sin^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1} = \frac{\sin \left( 4\alpha + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left( 4\alpha - \frac{\pi}{6} \right)}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\frac{2 \cos^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1}{2 \sin^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1} &= \left[ \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}; \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \right] = \\
&= \frac{2 \left( \frac{1 + \cos 4\alpha}{2} \right) + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1}{2 \left( \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1} = \frac{1 + \cos 4\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1}{1 - \cos 4\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1} = \\
&= \frac{\cos 4\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha}{-\cos 4\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha} = \frac{\sqrt{3} \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}{\sqrt{3} \sin 4\alpha - \cos 4\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4\alpha + \frac{1}{2} \cos 4\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4\alpha - \frac{1}{2} \cos 4\alpha} = \\
&= \frac{\sin 4\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 4\alpha \cdot \frac{1}{2}}{\sin 4\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 4\alpha \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sin 4\alpha \cos \frac{\pi}{6} + \cos 4\alpha \sin \frac{\pi}{6}}{\sin 4\alpha \cos \frac{\pi}{6} - \cos 4\alpha \sin \frac{\pi}{6}} =
\end{aligned}$$

$$= [\sin x \cos y \pm \cos x \sin y = \sin(x \pm y)] = \frac{\sin\left(4\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Тождество доказано.

$$3.207. \quad 3 - 4 \cos(4\alpha - 3\pi) - \cos(5\pi + 8\alpha) = 8 \cos^4 2\alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} 3 - 4 \cos(4\alpha - 3\pi) - \cos(5\pi + 8\alpha) &= 3 - 4 \cos(3\pi - 4\alpha) - \cos(5\pi + 8\alpha) = \\ &= 3 + 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha = 3 + 4 \cos 2(2\alpha) + \cos 2(4\alpha) = \\ &= 3 + 4(2 \cos^2 2\alpha - 1) + 2 \cos^2 4\alpha - 1 = 3 + 8 \cos^2 2\alpha - 4 + 2(\cos 4\alpha)^2 - 1 = \\ &= 8 \cos^2 2\alpha + 2(\cos 2(2\alpha))^2 - 2 = 8 \cos^2 2\alpha + 2(2 \cos^2 2\alpha - 1)^2 - 2 = \\ &= 8 \cos^2 2\alpha + 2(4 \cos^4 2\alpha - 4 \cos^2 2\alpha + 1) - 2 = \\ &= 8 \cos^2 2\alpha + 8 \cos^4 2\alpha - 8 \cos^2 2\alpha + 2 - 2 = 8 \cos^4 2\alpha. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.208. \quad \frac{1 + \cos(2\alpha + 630^\circ) + \sin(2\alpha + 810^\circ)}{1 - \cos(2\alpha - 630^\circ) + \sin(2\alpha + 630^\circ)} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} &\frac{1 + \cos(2\alpha + 630^\circ) + \sin(2\alpha + 810^\circ)}{1 - \cos(2\alpha - 630^\circ) + \sin(2\alpha + 630^\circ)} = \\ &= \frac{1 + \cos(630^\circ + 2\alpha) + \sin(810^\circ + 2\alpha)}{1 - \cos(630^\circ - 2\alpha) + \sin(630^\circ + 2\alpha)} = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)}{2 \sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.209. \frac{3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}{3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha} = \operatorname{ctg}^4 2\alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}{3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha} &= \frac{3+4\cos 2(2\alpha)+\cos 2(4\alpha)}{3-4\cos 2(2\alpha)+\cos 2(4\alpha)} = \\ &= \frac{3+4(2\cos^2 2\alpha-1)+2\cos^2 4\alpha-1}{3-4(2\cos^2 2\alpha-1)+2\cos^2 4\alpha-1} = \\ &= \frac{3+8\cos^2 2\alpha-4+2(\cos 2(2\alpha))^2-1}{3-8\cos^2 2\alpha+4+2(\cos 2(2\alpha))^2-1} = \\ &= \frac{8\cos^2 2\alpha+2(2\cos^2 2\alpha-1)^2-2}{-8\cos^2 2\alpha+2(2\cos^2 2\alpha-1)^2+6} = \\ &= \frac{8\cos^2 2\alpha+8\cos^4 2\alpha-8\cos^2 2\alpha+2-2}{-8\cos^2 2\alpha+8\cos^4 2\alpha-8\cos^2 2\alpha+2+6} = \\ &= \frac{8\cos^4 2\alpha}{8\cos^4 2\alpha-16\cos^2 2\alpha+8} = \frac{8\cos^4 2\alpha}{8(\cos^4 2\alpha-2\cos^2 2\alpha+1)} = \\ &= \frac{\cos^4 2\alpha}{(\cos^2 2\alpha-1)^2} = \frac{\cos^4 2\alpha}{(1-\cos^2 2\alpha)^2} = \frac{\cos^4 2\alpha}{(\sin^2 2\alpha)^2} = \frac{\cos^4 2\alpha}{\sin^4 2\alpha} = \operatorname{ctg}^4 2\alpha \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.210. 3+4\sin\left(4\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(8\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)=8\sin^4 2\alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} 3+4\sin\left(4\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(8\alpha+\frac{5}{2}\pi\right) &= \\ = 3+4\sin\left(\frac{3}{2}\pi+4\alpha\right)+\sin\left(\frac{5}{2}\pi+8\alpha\right) &= 3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 - 4 \cos 2(2\alpha) + \cos 2(4\alpha) = 3 - 4(1 - 2 \sin^2 2\alpha) + 2 \cos^2 4\alpha - 1 = \\
&= 3 - 4 + 8 \sin^2 2\alpha + 2(\cos 4\alpha)^2 - 1 = 8 \sin^2 2\alpha + 2(\cos 2(2\alpha))^2 - 2 = \\
&= 8 \sin^2 2\alpha + 2(1 - 2 \sin^2 2\alpha)^2 - 2 = \\
&= 8 \sin^2 2\alpha + 2(1 - 4 \sin^2 2\alpha + 4 \sin^4 2\alpha) - 2 = \\
&= 8 \sin^2 2\alpha + 2 - 8 \sin^2 2\alpha + 8 \sin^4 2\alpha - 2 = 8 \sin^4 2\alpha.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

**3.211.**  $\cos^{-6} \alpha - \operatorname{tg}^6 \alpha = 3 \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^{-2} \alpha + 1.$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\cos^{-6} \alpha - \operatorname{tg}^6 \alpha &= \frac{1}{\cos^6 \alpha} - \frac{\sin^6 \alpha}{\cos^6 \alpha} = \frac{1 - \sin^6 \alpha}{\cos^6 \alpha} = \frac{1 - (\sin^2 \alpha)^3}{\cos^2 \alpha \cos^4 \alpha} = \\
&= \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha)}{(1 - \sin^2 \alpha) \cos^4 \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \\
&= \frac{1 + 3 \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \frac{3 \sin^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha)}{\cos^4 \alpha} = \\
&= \frac{3 \sin^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha)^2}{\cos^4 \alpha} = \frac{3 \sin^2 \alpha + (\cos^2 \alpha)^2}{\cos^4 \alpha} = \frac{3 \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \\
&= \frac{3 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1 = 3 \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^{-2} \alpha + 1.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

**3.212.**  $\frac{1 - 2 \sin^2 2\alpha}{1 - \sin 4\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha}.$

*Решение.*

$$\frac{1 - 2 \sin^2 2\alpha}{1 - \sin 4\alpha} = \frac{\cos 4\alpha}{1 - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos 2(2\alpha)}{\cos^2 2\alpha - 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)^2} = \\
&= \frac{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)}{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)^2} = \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha}.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.213. \frac{\sin^2(135^\circ - \alpha) - \sin^2(210^\circ - \alpha) - \sin 195^\circ \cos(165^\circ - 2\alpha)}{\cos^2(225^\circ + \alpha) - \cos^2(210^\circ - \alpha) + \sin 15^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha)} = -1.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin^2(135^\circ - \alpha) - \sin^2(210^\circ - \alpha) - \sin 195^\circ \cos(165^\circ - 2\alpha)}{\cos^2(225^\circ + \alpha) - \cos^2(210^\circ - \alpha) + \sin 15^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha)} = \\
&= \frac{\sin^2(90^\circ + (45^\circ - \alpha)) - \sin^2(180^\circ + (30^\circ - \alpha)) - \sin(180^\circ + 15^\circ) \cos(180^\circ - (15^\circ + 2\alpha))}{\cos^2(270^\circ - (45^\circ - \alpha)) - \cos^2(180^\circ + (30^\circ - \alpha)) + \sin 15^\circ \sin(90^\circ - (15^\circ + 2\alpha))} = \\
&= \frac{(\sin(90^\circ + (45^\circ - \alpha)))^2 - (\sin(180^\circ + (30^\circ - \alpha)))^2 - \sin(180^\circ + 15^\circ) \cos(180^\circ - (15^\circ + 2\alpha))}{(\cos(270^\circ - (45^\circ - \alpha)))^2 - (\cos(180^\circ + (30^\circ - \alpha)))^2 + \sin 15^\circ \sin(90^\circ - (15^\circ + 2\alpha))} = \\
&= \frac{\cos^2(45^\circ - \alpha) - \sin^2(30^\circ - \alpha) - \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha)}{\sin^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(30^\circ - \alpha) + \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha)} = \\
&= \frac{1 - \sin^2(45^\circ - \alpha) - 1 + \cos^2(30^\circ - \alpha) - \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha)}{\sin^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(30^\circ - \alpha) + \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha)} = \\
&= \frac{-\sin^2(45^\circ - \alpha) + \cos^2(30^\circ - \alpha) - \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha)}{\sin^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(30^\circ - \alpha) + \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha)} = \\
&= \frac{-(\sin^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(30^\circ - \alpha) + \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha))}{\sin^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(30^\circ - \alpha) + \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha)} = -1.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.214. \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})}{(\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})} = \frac{(\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})^2}{(\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha})^2 - (\sqrt{\operatorname{tg}\alpha})^2} = \\ & = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + 2 + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + 2 + \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha - \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha + 2\operatorname{ctg}\alpha + 1}{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1} = \\ & = \frac{(\operatorname{ctg}\alpha + 1)^2}{(\operatorname{ctg}\alpha + 1)(\operatorname{ctg}\alpha - 1)} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - 1} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 1} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \\ & = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha} = \\ & = [\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y); \\ & \sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y)] = \\ & = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right). \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.215. \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta - \frac{2 \cos(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} + 2 = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta - \frac{2 \cos(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} + 2 &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{2 \cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} + 2 = \\ &= \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha - 2 \cos(\alpha - \beta) \sin \alpha \sin \beta + 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= [\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y] = \\ &= \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha - (2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta) \sin \alpha \sin \beta + 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta - 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{(\sin^2 \beta \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta) + (\cos^2 \beta \sin^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{\sin \beta \cos \alpha (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) + \cos \beta \sin \alpha (\cos \beta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{\sin \beta \cos \alpha (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) + \cos \beta \sin \alpha (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= [\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y)] = \\ &= \frac{\sin \beta \cos \alpha \sin(\beta - \alpha) + \cos \beta \sin \alpha \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{-\sin \beta \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) + \cos \beta \sin \alpha \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \frac{\sin(\alpha - \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \end{aligned}$$



$$= \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Тождество доказано.

$$\begin{aligned} 3.216. \sin 2\alpha(2 \cos 4\alpha + 1) \operatorname{ctg}(30^\circ - 2\alpha) \operatorname{ctg}(30^\circ + 2\alpha) = \\ = \sin 6\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{tg} 6\alpha. \end{aligned}$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha(2 \cos 4\alpha + 1) \operatorname{ctg}(30^\circ - 2\alpha) \operatorname{ctg}(30^\circ + 2\alpha) = \\ = \sin 2\alpha(2 \cos 2(2\alpha) + 1) \cdot \frac{\cos(30^\circ - 2\alpha) \cos(30^\circ + 2\alpha)}{\sin(30^\circ - 2\alpha) \sin(30^\circ + 2\alpha)} = \\ = [\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x, \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \\ \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y] = \\ = \sin 2\alpha(2(1 - 2 \sin^2 2\alpha) + 1) \times \\ \times \frac{(\cos 30^\circ \cos 2\alpha + \sin 30^\circ \sin 2\alpha)(\cos 30^\circ \cos 2\alpha - \sin 30^\circ \sin 2\alpha)}{(\sin 30^\circ \cos 2\alpha - \cos 30^\circ \sin 2\alpha)(\sin 30^\circ \cos 2\alpha + \cos 30^\circ \sin 2\alpha)} = \\ = \sin 2\alpha(2 - 4 \sin^2 2\alpha + 1) \cdot \frac{\cos^2 30^\circ \cos^2 2\alpha - \sin^2 30^\circ \sin^2 2\alpha}{\sin^2 30^\circ \cos^2 2\alpha - \cos^2 30^\circ \sin^2 2\alpha} = \\ = \sin 2\alpha(3 - 4 \sin^2 2\alpha) \cdot \frac{\frac{3}{4} \cos^2 2\alpha - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha}{\frac{1}{4} \cos^2 2\alpha - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha} = \\ = (3 \sin 2\alpha - 4 \sin^3 2\alpha) \cdot \frac{3 \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - 3 \sin^2 2\alpha} = [3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin 3x] = \\ = \sin 6\alpha \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \sin 6\alpha \cdot \frac{3 \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}^3 2\alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 2\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \\ = \sin 6\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \frac{3 \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}^3 2\alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \left[ \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} 3x \right] = \sin 6\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{tg} 6\alpha. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.217. \sin(\pi + \alpha) \sin\left(\frac{4}{3}\pi + \alpha\right) \sin\left(\frac{2}{3}\pi + \alpha\right) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \sin(\pi + \alpha) \sin\left(\frac{4}{3}\pi + \alpha\right) \sin\left(\frac{2}{3}\pi + \alpha\right) = \\ & = \sin(\pi + \alpha) \sin\left(\frac{3\pi + \pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{2}{3}\pi + \alpha\right) = \\ & = \sin(\pi + \alpha) \sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right) \sin\left(\frac{2}{3}\pi + \alpha\right) = \\ & = -\sin\alpha \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right) \sin\left(\frac{2}{3}\pi + \alpha\right) = \sin\alpha \left(\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{2}{3}\pi + \alpha\right)\right) = \\ & = \left[\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))\right] = \\ & = \frac{\sin\alpha}{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos(\pi + 2\alpha)\right) = \\ & = \frac{\sin\alpha}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos 2\alpha\right) = \frac{\sin\alpha}{4} \cdot (1 + 2\cos 2\alpha) = \frac{\sin\alpha}{4} \cdot (1 + 2(1 - 2\sin^2 \alpha)) = \\ & = \frac{\sin\alpha}{4} \cdot (1 + 2 - 4\sin^2 \alpha) = \frac{\sin\alpha}{4} \cdot (3 - 4\sin^2 \alpha) = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - 4\sin^3 \alpha) = \\ & = [3\sin x - 4\sin^3 x = \sin 3x] = \frac{1}{4} \sin 3\alpha. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.218. \frac{\sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha + \sin 9\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha} = \operatorname{tg} \frac{15}{2} \alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\sin 6\alpha + \sin 7\alpha + \sin 8\alpha + \sin 9\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha + \cos 9\alpha} = \\ & = \frac{(\sin 9\alpha + \sin 6\alpha) + (\sin 8\alpha + \sin 7\alpha)}{(\cos 9\alpha + \cos 6\alpha) + (\cos 8\alpha + \cos 7\alpha)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \\
&= \frac{2 \sin \frac{15\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} + 2 \sin \frac{15\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{15\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} + 2 \cos \frac{15\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{15\alpha}{2} \left( \cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \cos \frac{15\alpha}{2} \left( \cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)} = \\
&= \frac{\sin \frac{15\alpha}{2}}{\cos \frac{15\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{15\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.219. \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{7}{2}\pi - \frac{\alpha}{4}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{4} - 3\pi\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}} = -\operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{7}{2}\pi - \frac{\alpha}{4}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{4} - 3\pi\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}} = \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}}{\sin\left(3\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right)\right) - \sin\left(3\pi - \frac{\alpha}{4}\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{4} - \cos \frac{\alpha}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}}{\cos \frac{\alpha}{4} + \sin \frac{\alpha}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}} = \\
&= \frac{\sin \frac{\alpha}{4} - \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{8}}{\cos \frac{\alpha}{8}}}{\cos \frac{\alpha}{4} + \sin \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{8}}{\cos \frac{\alpha}{8}}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} - \cos \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{8}}{\cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} + \sin \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{8}} =
\end{aligned}$$

$$= [\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y)];$$

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)] = \frac{\sin \frac{\alpha}{8}}{\cos \frac{\alpha}{8}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}.$$

Тождество доказано.

$$3.220. \frac{1 + \cos(2\alpha - 2\pi) + \cos(4\alpha + 2\pi) - \cos(6\alpha - \pi)}{\cos(2\pi - 2\alpha) + 2\cos^2(2\alpha + \pi) - 1} = 2\cos 2\alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \cos(2\alpha - 2\pi) + \cos(4\alpha + 2\pi) - \cos(6\alpha - \pi)}{\cos(2\pi - 2\alpha) + 2\cos^2(2\alpha + \pi) - 1} = \\ &= \frac{1 + \cos(2\pi - 2\alpha) + \cos(2\pi + 4\alpha) - \cos(\pi - 6\alpha)}{\cos(2\pi - 2\alpha) + 2(\cos(\pi + 2\alpha))^2 - 1} = \\ &= \frac{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha}{\cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha - 1} = \frac{1 + \cos 2\alpha + \cos 2(2\alpha) + \cos 3(2\alpha)}{2\cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha - 1} = \\ &= [\cos 2x = 2\cos^2 x - 1; \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x] = \\ &= \frac{1 + \cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha - 1 + 4\cos^3 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha - 1} = \\ &= \frac{4\cos^3 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha - 1} = \frac{2\cos 2\alpha(2\cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha - 1)}{2\cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha - 1} \\ &= 2\cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.221. \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha = 8\operatorname{ctg}8\alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 2\operatorname{tg}2\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha = \\ &= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - 2\operatorname{tg}2\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha = \\
&= \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha = \\
&= 2(\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha) - 4 \operatorname{tg} 4\alpha = 2\left(\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right) - 4 \operatorname{tg} 4\alpha = \\
&= 2 \cdot \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} - 4 \operatorname{tg} 4\alpha = 2 \cdot \frac{2(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)}{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} - 4 \operatorname{tg} 4\alpha = \\
&= 4 \cdot \frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} - 4 \operatorname{tg} 4\alpha = 4\left(\frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} - \operatorname{tg} 4\alpha\right) = 4\left(\frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} - \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}\right) = \\
&= 4 \cdot \frac{\cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha}{\sin 4\alpha \cos 4\alpha} = 4 \cdot \frac{2(\cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha)}{2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha} = 8 \cdot \frac{\cos 8\alpha}{\sin 8\alpha} = 8 \operatorname{ctg} 8\alpha.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

**3.222.**  $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha = 4 \operatorname{ctg} 4\alpha$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2 \operatorname{tg} 2\alpha = \\
&= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - 2 \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} - 2 \operatorname{tg} 2\alpha = \\
&= \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - 2 \operatorname{tg} 2\alpha = 2\left(\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - \operatorname{tg} 2\alpha\right) = 2\left(\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right) = \\
&= 2 \cdot \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = 2 \cdot \frac{2(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)}{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} = 4 \cdot \frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = 4 \operatorname{ctg} 4\alpha.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

**3.223.**  $4 \cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) - 2 \cos^2(\alpha - \varphi) - \cos 2\varphi = \cos 2\alpha$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&4 \cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) - 2 \cos^2(\alpha - \varphi) - \cos 2\varphi = \\
&= 2 \cos(\alpha - \varphi)(2 \cos \alpha \cos \varphi - \cos(\alpha - \varphi)) - \cos 2\varphi =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cos(\alpha - \varphi)(\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi) - \cos 2\varphi = \\
&= 2 \cos(\alpha - \varphi) \cos(\alpha + \varphi) - \cos 2\varphi = \\
&= \left[ \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y)) \right] = \\
&= \cos 2\varphi + \cos 2\alpha - \cos 2\varphi = \cos 2\alpha.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.224. \sin^2 \varphi - \cos^2(\alpha - \varphi) + 2 \cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) = \cos^2 \alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\sin^2 \varphi - \cos^2(\alpha - \varphi) + 2 \cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) = \\
&= \sin^2 \varphi - \cos(\alpha - \varphi)(\cos(\alpha - \varphi) - 2 \cos \alpha \cos \varphi) = \\
&= [\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y] = \\
&= \sin^2 \varphi - \cos(\alpha - \varphi)(\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi - 2 \cos \alpha \cos \varphi) = \\
&= \sin^2 \varphi - \cos(\alpha - \varphi)(\sin \alpha \sin \varphi - \cos \alpha \cos \varphi) = \\
&= \sin^2 \varphi + \cos(\alpha - \varphi)(\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi) = \\
&= \sin^2 \varphi + \cos(\alpha - \varphi) \cos(\alpha + \varphi) = \\
&= \left[ \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y)) \right] = \\
&= \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} (\cos 2\varphi + \cos 2\alpha) = \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \alpha - 1) = \\
&= \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} (2 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \varphi) = \sin^2 \varphi + \cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi = \cos^2 \alpha.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.225. \cos^2 \varphi + \cos^2(\alpha - \varphi) - 2 \cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) = \sin^2 \alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\cos^2 \varphi + \cos^2(\alpha - \varphi) - 2 \cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) = \\
&= \cos^2 \varphi + \cos(\alpha - \varphi)(\cos(\alpha - \varphi) - 2 \cos \alpha \cos \varphi) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \right] = \\
&= \cos^2 \varphi + \cos(\alpha - \varphi) (\cos(\alpha - \varphi) - \cos(\alpha - \varphi) - \cos(\alpha + \varphi)) = \\
&= \cos^2 \varphi - \cos(\alpha - \varphi) \cos(\alpha + \varphi) = \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} (\cos 2\varphi + \cos 2\alpha) = \\
&= \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} (2\cos^2 \varphi - 1 + 1 - 2\sin^2 \alpha) = \\
&= \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi + \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha.
\end{aligned}$$

Тождество доказано.

**3.226.**  $\operatorname{tg} 6\beta - \operatorname{tg} 4\beta - \operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} 6\beta \operatorname{tg} 4\beta \operatorname{tg} 2\beta.$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 6\beta - \operatorname{tg} 4\beta - \operatorname{tg} 2\beta &= (\operatorname{tg} 6\beta - \operatorname{tg} 4\beta) - \operatorname{tg} 2\beta = \frac{\sin 2\beta}{\cos 6\beta \cos 4\beta} - \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \\
&= \sin 2\beta \left( \frac{1}{\cos 6\beta \cos 4\beta} - \frac{1}{\cos 2\beta} \right) = \sin 2\beta \cdot \frac{\cos 2\beta - \cos 6\beta \cos 4\beta}{\cos 6\beta \cos 4\beta \cos 2\beta} = \\
&= \left[ \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \right] = \\
&= \frac{\sin 2\beta \left( \cos 2\beta - \frac{1}{2} (\cos 2\beta + \cos 10\beta) \right)}{\cos 6\beta \cos 4\beta \cos 2\beta} = \\
&= \frac{\sin 2\beta \left( \cos 2\beta - \frac{1}{2} \cos 2\beta - \frac{1}{2} \cos 10\beta \right)}{\cos 6\beta \cos 4\beta \cos 2\beta} = \\
&= \frac{\sin 2\beta \left( \frac{1}{2} \cos 2\beta - \frac{1}{2} \cos 10\beta \right)}{\cos 6\beta \cos 4\beta \cos 2\beta} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2\beta (\cos 2\beta - \cos 10\beta)}{\cos 6\beta \cos 4\beta \cos 2\beta} = \\
&= \left[ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = \frac{\frac{1}{2} \sin 2\beta (-2 \sin 6\beta \sin(-4\beta))}{\cos 6\beta \cos 4\beta \cos 2\beta} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin 6\beta \sin 4\beta \sin 2\beta}{\cos 6\beta \cos 4\beta \cos 2\beta} = \operatorname{tg} 6\beta \operatorname{tg} 4\beta \operatorname{tg} 2\beta.$$

Тождество доказано.

$$3.227. \frac{\cos\left(4\alpha - \frac{9}{2}\pi\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi + 2\alpha\right)\left(1 - \cos\left(\frac{5}{2}\pi + 4\alpha\right)\right)} = \operatorname{tg} 4\alpha.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{\cos\left(4\alpha - \frac{9}{2}\pi\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi + 2\alpha\right)\left(1 - \cos\left(\frac{5}{2}\pi + 4\alpha\right)\right)} = \\ & = \frac{\cos\left(\frac{9}{2}\pi - 4\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi + \pi}{4} + 2\alpha\right)\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi + \pi}{2} + 4\alpha\right)\right)} = \\ & = \frac{\cos\left(\frac{8\pi + \pi}{2} - 4\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\left(\pi + \left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)\right)\left(1 - \cos\left(2\pi + \left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right)\right)\right)} = \\ & = \frac{\cos\left(4\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)\right)}{\operatorname{ctg}\left(\pi + \left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)\right)\left(1 - \cos\left(2\pi + \left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right)\right)\right)} = \\ & = \frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)(1 + \sin 4\alpha)} = \frac{\sin 4\alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{1 + \sin 4\alpha} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \sin 4\alpha \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right)} \\ = & \frac{\sin 4\alpha \cdot \frac{1 + \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}}{1 + \sin 4\alpha} = \frac{\sin 4\alpha \cdot \frac{1 + \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}}{1 + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.228. \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \left(1 + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + 2\alpha\right)\right)}{\cos\left(2\alpha - \frac{5}{2}\pi\right)} = \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \left(1 + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + 2\alpha\right)\right)}{\cos\left(2\alpha - \frac{5}{2}\pi\right)} = \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \left(1 + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + 2\alpha\right)\right)}{\cos\left(\frac{5}{2}\pi - 2\alpha\right)} = \\ & = \frac{1 + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + 2\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{5}{2}\pi - 2\alpha\right)} = \left[ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}, x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right] = \\ & = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)} \cdot \sin 2\alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.229. \frac{2 \sin^2 4\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right) \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha\right)} = -1.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{2 \sin^2 4\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right) \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha\right)} = \frac{(2 \sin^2 4\alpha - 1) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right)}{2 \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha\right)} = \\ & = \left[ \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right] = \\ & = \frac{(1 - \cos 8\alpha - 1) \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 8\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 8\alpha\right)}}{1 + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 8\alpha\right)} = \frac{-\cos 8\alpha \cdot \frac{1 + \sin 8\alpha}{\cos 8\alpha}}{1 + \sin 8\alpha} = -1. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.230. \operatorname{tg} 4\alpha - \cos^{-1} 4\alpha = \frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 4\alpha - \cos^{-1} 4\alpha &= \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} - \frac{1}{\cos 4\alpha} = \frac{\sin 4\alpha - 1}{\cos 4\alpha} = \frac{\sin 2(2\alpha) - 1}{\cos 2(2\alpha)} = \\ &= \frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha - 1}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} = \frac{-(1 - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha)}{-(\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha)} = \\ &= \frac{\sin^2 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha}{(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \\ &= \frac{(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)^2}{(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.231. \cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha = \frac{5 + 3 \cos 4\alpha}{8}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = \\ &= (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \cdot 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = \\ &= 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} = 1 - \frac{3 - 3 \cos 4\alpha}{8} = \frac{8 - 3 + 3 \cos 4\alpha}{8} = \frac{5 + 3 \cos 4\alpha}{8}.\end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.232. \cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha = \cos 2\alpha \cdot \frac{3 + \cos 4\alpha}{4}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}\cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha &= (\cos^4 \alpha)^2 - (\sin^4 \alpha)^2 = \\ &= (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha)(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) = \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \times \\ &\times \left( (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right) = \\ &= \cos 2\alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) = \cos 2\alpha \cdot \left( 1 - \frac{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2} \right) = \\ &= \cos 2\alpha \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \right) = \cos 2\alpha \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \\ &= \cos 2\alpha \left( 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} \right) = \frac{\cos 2\alpha (4 - 1 + \cos 4\alpha)}{4} = \cos 2\alpha \cdot \frac{3 + \cos 4\alpha}{4}.\end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.233. \operatorname{ctg}(30^\circ - \alpha) \operatorname{ctg}(150^\circ - \alpha) \operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \operatorname{ctg}(30^\circ - \alpha) \operatorname{ctg}(150^\circ - \alpha) \operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) = \\ & = \operatorname{ctg}(30^\circ - \alpha) \operatorname{ctg}(180^\circ - (30^\circ + \alpha)) \operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) = \\ & = \operatorname{ctg}(30^\circ - \alpha) (-\operatorname{ctg}(30^\circ + \alpha)) (-\operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{ctg}(30^\circ - \alpha) \operatorname{ctg}(30^\circ + \alpha) \operatorname{tg} \alpha = \\ & = \frac{\cos(30^\circ - \alpha) \cos(30^\circ + \alpha)}{\sin(30^\circ - \alpha) \sin(30^\circ + \alpha)} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \\ & = [\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \\ & \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y] = \\ & = \frac{(\cos 30^\circ \cos \alpha + \sin 30^\circ \sin \alpha)(\cos 30^\circ \cos \alpha - \sin 30^\circ \sin \alpha)}{(\sin 30^\circ \cos \alpha - \cos 30^\circ \sin \alpha)(\sin 30^\circ \cos \alpha + \cos 30^\circ \sin \alpha)} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \\ & = \frac{\cos^2 30^\circ \cos^2 \alpha - \sin^2 30^\circ \sin^2 \alpha}{\sin^2 30^\circ \cos^2 \alpha - \cos^2 30^\circ \sin^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \\ & = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cos^2 \alpha - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \alpha}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cos^2 \alpha - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sin^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \\ & = \frac{\frac{3}{4} \cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha}{\frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \\ & = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.234. \quad 4 \sin\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) = \cos 6\alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & 4 \sin\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) = \\ & = 4 \left(-\sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) = \\ & = 4 \cos 2\alpha \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) = \\ & = \left[\sin x \sin y = \frac{1}{2} \cos(x-y) - \cos(x+y)\right] = 4 \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{2} \left(\cos 4\alpha - \cos \frac{\pi}{3}\right) = \\ & = 2 \cos 2\alpha \left(\cos 4\alpha - \frac{1}{2}\right) = 2 \cos 2\alpha \cos 4\alpha - \cos 2\alpha = \\ & = \left[\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))\right] = \\ & = \cos 2\alpha + \cos 6\alpha - \cos 2\alpha = \cos 6\alpha. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.235. \quad \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{2 \operatorname{tg}\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)} = 1.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2 \cos^2 2\alpha}{2 \operatorname{tg}\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)} &= \frac{1 - 1 - \cos 4\alpha}{\frac{\sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right)\right)} = \\ &= \frac{-\cos 4\alpha \left(1 + \cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right)\right)} = \frac{-\cos 4\alpha \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right)\right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos 4\alpha(1 + \sin 4\alpha)}{\cos 4\alpha(1 + \sin 4\alpha)} = 1.$$

Тождество доказано.

**3.236.**  $16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha = \sin 5\alpha.$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & 16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha = \\ & = 3 \sin \alpha - 10 \sin^3 \alpha + 8 \sin^5 \alpha + 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha - 8 \sin^3 \alpha + 8 \sin^5 \alpha = \\ & = 3 \sin \alpha - 10 \sin^3 \alpha + 8 \sin^5 \alpha + \\ & + (2 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha) + (-2 \sin^3 \alpha + 8 \sin^5 \alpha) = \\ & 3 \sin \alpha - 10 \sin^3 \alpha + 8 \sin^5 \alpha + 2 \sin \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha) - 2 \sin^3 \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha) = \\ & = 3 \sin \alpha - 10 \sin^3 \alpha + 8 \sin^5 \alpha + 2 \sin \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha) (1 - \sin^2 \alpha) = \\ & = 3 \sin \alpha - 6 \sin^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha + 8 \sin^5 \alpha + 2 \sin \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha) \cos^2 \alpha = \\ & = (3 \sin \alpha - 6 \sin^3 \alpha) + (-4 \sin^3 \alpha + 8 \sin^5 \alpha) + \\ & + 2 \sin \alpha (1 - 4(1 - \cos^2 \alpha)) \cos^2 \alpha = \\ & = 3 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) - 4 \sin^3 \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + \\ & + 2 \sin \alpha (1 - 4 + 4 \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha = \\ & = (1 - 2 \sin^2 \alpha) (3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) + 2 \sin \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3) \cos^2 \alpha = \\ & = (1 - 2 \sin^2 \alpha) (3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) = \\ & = [1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha, 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = \sin 3\alpha, 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha, \\ & 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos 3\alpha] = \sin 3\alpha \cos 2\alpha + \cos 3\alpha \sin 2\alpha = \\ & = \sin(3\alpha + 2\alpha) = \sin 5\alpha. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.237. \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\alpha &= \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} - \operatorname{tg}\alpha = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \\ &= \frac{1 + \sin\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$\begin{aligned} 3.238. 1 + \sin\left(3\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cos 2\alpha + 2 \sin 3\alpha \cos(3\pi - \alpha) \sin(\alpha - \pi) &= \\ = 2 \sin^2 \frac{5\alpha}{2}. \end{aligned}$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} 1 + \sin\left(3\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cos 2\alpha + 2 \sin 3\alpha \cos(3\pi - \alpha) \sin(\alpha - \pi) &= \\ = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cos 2\alpha + 2 \sin 3\alpha \cos(3\pi - \alpha) (-\sin(\pi - \alpha)) &= \\ = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cos 2\alpha - 2 \sin 3\alpha \cos(3\pi - \alpha) \sin(\pi - \alpha) &= \\ = 1 - \cos 3\alpha \cos 2\alpha - 2 \sin 3\alpha (-\cos\alpha) \sin\alpha &= \\ = 1 - \cos 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 3\alpha (2 \sin\alpha \cos\alpha) &= \\ = 1 - \cos 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 3\alpha \sin 2\alpha = 1 - (\cos 3\alpha \cos 2\alpha - \sin 3\alpha \sin 2\alpha) &= \\ = 1 - \cos 5\alpha = 1 - \cos 2\left(\frac{5\alpha}{2}\right) &= \\ = 1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{5\alpha}{2}\right) = 1 - 1 + 2 \sin^2 \frac{5\alpha}{2} = 2 \sin^2 \frac{5\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

$$3.239. (\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\alpha + \sin\beta) = \sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} (\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\alpha + \sin\beta) &= \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha - 1 + \cos 2\beta) = -\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) = \\ &= \left[ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2}(-2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)) = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Тождество доказано.

Упростить выражения (3.240—3.284.):

$$3.240. \sqrt{\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)} &= \sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}\right) \left(\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 1\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\left(\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2} = \\ &= \left| \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} \right| = \left| \frac{2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} \right| = \left| 2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right| = 2 \left| \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right| = 2 |\operatorname{ctg} \alpha|. \end{aligned}$$

Ответ:  $2|\operatorname{ctg} \alpha|$ .



$$3.241. \sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}}; 90^\circ < \alpha < 135^\circ.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}} &= \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}}} = \\ &= \sqrt{\frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}} = \\ &= \sqrt{\frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \sqrt{(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha \cos \alpha|. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $90^\circ < \alpha < 135^\circ$ , имеем

$$|\sin \alpha \cos \alpha| = -\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha = -0,5 \sin 2\alpha.$$

*Ответ:*  $-0,5 \sin 2\alpha$ .

$$3.242. \sqrt{(1 - \sin \alpha \sin \beta)^2 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} &\sqrt{(1 - \sin \alpha \sin \beta)^2 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = \\ &= \sqrt{(1 - \sin \alpha \sin \beta)^2 - (1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \beta)} = \\ &= \sqrt{1 - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - 1 + \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta} = \sqrt{(\sin \alpha - \sin \beta)^2} = |\sin \alpha - \sin \beta|. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $|\sin \alpha - \sin \beta|$ .

$$3.243. (\cos 8\alpha \operatorname{tg} 4\alpha - \sin 8\alpha)(\cos 8\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha + \sin 8\alpha).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & (\cos 8\alpha \operatorname{tg} 4\alpha - \sin 8\alpha)(\cos 8\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha + \sin 8\alpha) = \\ & = \left( \frac{\cos 8\alpha \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} - \sin 8\alpha \right) \left( \frac{\cos 8\alpha \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} + \sin 8\alpha \right) = \\ & = \frac{\sin 4\alpha \cos 8\alpha - \cos 4\alpha \sin 8\alpha}{\cos 4\alpha} \cdot \frac{\cos 8\alpha \cos 4\alpha + \sin 8\alpha \sin 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \\ & = \frac{\sin(-4\alpha)}{\cos 4\alpha} \cdot \frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{-\sin 4\alpha \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha \cos 4\alpha} = -1. \end{aligned}$$

*Ответ:* -1.

$$3.244. \sin^2 2\alpha + \sin^2 \beta + \cos(2\alpha + \beta) \cos(2\alpha - \beta).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \sin^2 2\alpha + \sin^2 \beta + \cos(2\alpha + \beta) \cos(2\alpha - \beta) = \\ & = \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + \cos(2\alpha + \beta) \cos(2\alpha - \beta) = \\ & = \frac{1}{2}(1 - \cos 4\alpha + 1 - \cos 2\beta) + \cos(2\alpha + \beta) \cos(2\alpha - \beta) = \\ & = -\left( \frac{\cos 4\alpha}{2} + \frac{\cos 2\beta}{2} - 1 \right) + \cos(2\alpha + \beta) \cos(2\alpha - \beta) = \\ & = \left[ \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y)) \right] = \\ & = -\frac{\cos 4\alpha}{2} - \frac{\cos 2\beta}{2} + 1 + \frac{\cos 4\alpha}{2} + \frac{\cos 2\beta}{2} = 1. \end{aligned}$$

*Ответ:* 1.

$$3.245. \frac{\sin(2\alpha - 3\pi) + 2 \cos\left(\frac{7}{6}\pi + 2\alpha\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) + \sqrt{3} \cos(2\alpha - 3\pi)}$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(2\alpha - 3\pi) + 2\cos\left(\frac{7}{6}\pi + 2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) + \sqrt{3}\cos(2\alpha - 3\pi)} = \\ & = \frac{-\sin(3\pi - 2\alpha) + 2\cos\left(\pi + \left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) + \sqrt{3}\cos(3\pi - 2\alpha)} = \frac{-\sin 2\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) - \sqrt{3}\cos 2\alpha} = \\ & = \frac{\sin 2\alpha + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)}{\sqrt{3}\cos 2\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)} = [\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y] = \\ & = \frac{\sin 2\alpha + 2\cos\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha - 2\sin\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha}{\sqrt{3}\cos 2\alpha - 2\cos\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha - 2\sin\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha} = \\ & = \frac{\sin 2\alpha + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha - 2 \cdot \frac{1}{2}\sin 2\alpha}{\sqrt{3}\cos 2\alpha - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha - 2 \cdot \frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \\ & = \frac{\sin 2\alpha + \sqrt{3}\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\sqrt{3}\cos 2\alpha - \sqrt{3}\cos 2\alpha - \sin 2\alpha} = \frac{\sqrt{3}\cos 2\alpha}{-\sin 2\alpha} = -\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\alpha. \end{aligned}$$

Ответ:  $-\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\alpha$ .

3.246.  $\frac{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha + \cos 10\alpha - \cos 14\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha + \sin 10\alpha + \sin 14\alpha}$ .

Решение.

$$\frac{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha + \cos 10\alpha - \cos 14\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha + \sin 10\alpha + \sin 14\alpha} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\cos 10\alpha + \cos 2\alpha) - (\cos 14\alpha + \cos 6\alpha)}{(\sin 10\alpha + \sin 2\alpha) + (\sin 14\alpha + \sin 6\alpha)} = \\
&= \left[ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \right. \\
&\left. \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \\
&= \frac{2 \cos 6\alpha \cos 4\alpha - 2 \cos 10\alpha \cos 4\alpha}{2 \sin 6\alpha \cos 4\alpha + 2 \sin 10\alpha \cos 4\alpha} = \frac{2 \cos 4\alpha (\cos 6\alpha - \cos 10\alpha)}{2 \cos 4\alpha (\sin 6\alpha + \sin 10\alpha)} = \\
&= \frac{\cos 6\alpha - \cos 10\alpha}{\sin 6\alpha + \sin 10\alpha} = \left[ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = \\
&= \frac{-2 \sin 8\alpha \sin(-2\alpha)}{2 \sin 8\alpha \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\operatorname{tg} 2\alpha$ .

$$3.247. \left(1 - \operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right)\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi - 2\alpha\right) + \cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

Решение.

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right)\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi - 2\alpha\right) + \cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= \left(1 - \left(\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right)\right)^2\right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)\right)^2 \times \\
&\times \operatorname{tg}\left(\pi + \left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) = \\
&= (1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha) \cos^2 2\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) + \sin 4\alpha = \\
&= \left(1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right) \cos^2 2\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) + \sin 4\alpha =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} \cdot \cos^2 2\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) + \sin 4\alpha = \\
&= \cos 4\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) + \sin 4\alpha = \frac{\cos 4\alpha \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)} + \sin 4\alpha = \\
&= \frac{\cos 4\alpha (1 - \sin 4\alpha)}{\cos 4\alpha} + \sin 4\alpha = 1 - \sin 4\alpha + \sin 4\alpha = 1.
\end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$3.248. \frac{4 \sin(\pi - 2x) \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)}{1 + \cos 8x} + \frac{\sin 3x \cos x + 3 \sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 4x}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
&\frac{4 \sin(\pi - 2x) \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)}{1 + \cos 8x} + \frac{\sin 3x \cos x + 3 \sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 4x} = \\
&= \frac{4 \sin(\pi - 2x) \left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)\right)^2}{1 + \cos 2(4x)} + \frac{\sin 3x \cos x - 3 \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos^2 4x} = \\
&= \frac{4 \sin 2x \cos^2 x}{1 + 2 \cos^2 4x - 1} + \frac{\sin 3x \cos x - 3 \sin x \cos x}{\cos^2 4x} = \\
&= \frac{2 \sin 2x \cos^2 x}{\cos^2 4x} + \frac{\sin 3x \cos x - 3 \sin x \cos x}{\cos^2 4x} = \left[ \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \right. \\
&\left. \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha \right] = \\
&= \frac{\sin 2x (1 + \cos 2x)}{\cos^2 4x} + \frac{(3 \sin x - 4 \sin^3 x) \cos x - 3 \sin x \cos x}{\cos^2 4x} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin 2x + \sin 2x \cos 2x + (3 - 4 \sin^2 x) \sin x \cos x - 3 \sin x \cos x}{\cos^2 4x} = \\
&= \frac{\sin 2x + \sin 2x \cos 2x + \sin x \cos x (3 - 4 \sin^2 x - 3)}{\cos^2 4x} = \\
&= \frac{\sin 2x + \sin 2x \cos 2x - 4 \sin x \cos x \sin^2 x}{\cos^2 4x} = \\
&= \frac{\sin 2x + \sin 2x \cos 2x - 2 \sin 2x \sin^2 x}{\cos^2 4x} = \frac{\sin 2x (1 + \cos 2x - 2 \sin^2 x)}{\cos^2 4x} = \\
&= \frac{\sin 2x (\cos 2x + (1 - 2 \sin^2 x))}{\cos^2 4x} = \frac{\sin 2x (\cos 2x + \cos 2x)}{\cos^2 4x} = \\
&= \frac{2 \sin x \cos 2x}{\cos^2 4x} = \frac{\sin 4x}{\cos^2 4x} = \sin 4x \cos^{-2} 4x.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\sin 4x \cos^{-2} 4x$ .

$$3.249. \frac{4 \sin \left( 4\alpha - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ctg}^2 \left( 2\alpha - \frac{3}{2} \pi \right) - \operatorname{tg}^2 \left( 2\alpha + \frac{5}{2} \pi \right)} - 1.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
&\frac{4 \sin \left( 4\alpha - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ctg}^2 \left( 2\alpha - \frac{3}{2} \pi \right) - \operatorname{tg}^2 \left( 2\alpha + \frac{5}{2} \pi \right)} - 1 = \\
&= \frac{-4 \sin \left( \frac{\pi}{2} - 4\alpha \right)}{\left( \operatorname{ctg} \left( \frac{3}{2} \pi - 2\alpha \right) \right)^2 - \left( \operatorname{tg} \left( \frac{5}{2} \pi + 2\alpha \right) \right)^2} - 1 = \frac{-4 \cos 4\alpha}{\operatorname{tg}^2 2\alpha - \operatorname{ctg}^2 2\alpha} - 1 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-4 \cos 4\alpha}{\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} - \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}} - 1 = \frac{-4 \cos 4\alpha}{\frac{\sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha}{\sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha}} - 1 = \\
&= \frac{-(4 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha) \cos 4\alpha}{(\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha)(\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha)} - 1 = \\
&= \frac{-\sin^2 4\alpha \cos 4\alpha}{-(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)} - 1 = \\
&= \frac{\sin^2 4\alpha \cos 4\alpha}{\cos 4\alpha} - 1 = \sin^2 4\alpha - 1 = -(1 - \sin^2 4\alpha) = -\cos^2 4\alpha.
\end{aligned}$$

Ответ:  $-\cos^2 4\alpha$ .

$$3.250. \frac{(1 + \operatorname{tg} 2\alpha)^2 - 2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} - \sin 4\alpha - 1.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
&\frac{(1 + \operatorname{tg} 2\alpha)^2 - 2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} - \sin 4\alpha - 1 = \\
&= \frac{1 + 2\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}^2 2\alpha - 2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} - \sin 4\alpha - 1 = \\
&= \frac{1 + 2\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} - \sin 4\alpha - 1 = \\
&= \left[ \sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, x \neq (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z} \right] = \\
&= \frac{1 + 2\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} - \frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} - 1 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + 2\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha - 1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \\
&= \frac{-2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = -2 \cdot \frac{\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}{1 + \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}} = -2 \cdot \frac{\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}{\frac{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}} = -2 \sin^2 2\alpha.
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $-2 \sin^2 2\alpha$ .

**3.251.**  $\frac{\sin(80^\circ + 4\alpha)}{4 \sin(20^\circ + \alpha) \sin(70^\circ - \alpha)}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(80^\circ + 4\alpha)}{4 \sin(20^\circ + \alpha) \sin(70^\circ - \alpha)} &= \frac{\sin 2(40^\circ + 2\alpha)}{4 \sin(20^\circ + \alpha) \sin(70^\circ - \alpha)} = \\
&= \left[ \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \right] = \\
&= \frac{2 \sin(40^\circ + 2\alpha) \cos(40^\circ + 2\alpha)}{2 (\cos(2\alpha - 50^\circ) - \cos 90^\circ)} = \frac{\sin(40^\circ + 2\alpha) \cos(40^\circ + 2\alpha)}{\cos(50^\circ - 2\alpha) - 0} = \\
&= \frac{\sin(40^\circ + 2\alpha) \cos(40^\circ + 2\alpha)}{\cos(90^\circ - (40^\circ + 2\alpha))} = \frac{\sin(40^\circ + 2\alpha) \cos(40^\circ + 2\alpha)}{\sin(40^\circ + \alpha)} = \cos(40^\circ + 2\alpha).
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\cos(40^\circ + 2\alpha)$ .

**3.252.**  $\frac{\cos^2(4\alpha - 3\pi) - 4 \cos^2(2\alpha - \pi) + 3}{\cos^2(4\alpha + 3\pi) + 4 \cos^2(2\alpha + \pi) - 1}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos^2(4\alpha - 3\pi) - 4 \cos^2(2\alpha - \pi) + 3}{\cos^2(4\alpha + 3\pi) + 4 \cos^2(2\alpha + \pi) - 1} = \\
&= \frac{(\cos(3\pi - 4\alpha))^2 - 4(\cos(\pi - 2\alpha))^2 + 3}{(\cos(3\pi + 4\alpha))^2 + 4(\cos(\pi + 2\alpha))^2 - 1} = \frac{\cos^2 4\alpha - 4 \cos^2 2\alpha + 3}{\cos^2 4\alpha + 4 \cos^2 2\alpha - 1} =
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{(\cos 2(2\alpha))^2 - 4(1 - \sin^2 2\alpha) + 3}{(\cos 2(2\alpha))^2 + 4\cos^2 2\alpha - 1} = \frac{(1 - 2\sin^2 2\alpha)^2 - 4 + 4\sin^2 2\alpha + 3}{(2\cos^2 2\alpha - 1)^2 + 4\cos^2 2\alpha - 1} = \\
&= \frac{1 - 4\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 2\alpha - 4 + 4\sin^2 2\alpha + 3}{4\cos^4 2\alpha - 4\cos^2 2\alpha + 1 + 4\cos^2 2\alpha - 1} = \frac{4\sin^4 2\alpha}{4\cos^4 2\alpha} = \frac{\sin^4 2\alpha}{\cos^4 2\alpha} = \\
&= \operatorname{tg}^4 2\alpha.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\operatorname{tg}^4 2\alpha$ .

3.253. 
$$\frac{\cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{5}{2}\pi + 2\alpha\right)}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)}$$

Решение.

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{5}{2}\pi + 2\alpha\right)}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)\sin\left(\frac{5}{2}\pi + 2\alpha\right)}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)} = \\
&= \frac{\sin 4\alpha \cos 2\alpha}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + 2\cos^2 2\alpha - 1)} = \frac{\sin 4\alpha \cos 2\alpha}{2(1 + \cos 2\alpha)\cos^2 2\alpha} = \\
&= \frac{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 2\alpha}{2(1 + \cos 2\alpha)\cos^2 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\operatorname{tg}\alpha$ .

3.254. 
$$4\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 4\sin\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)\cos^3\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right).$$

Решение.

$$\begin{aligned}
&4\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 4\sin\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)\cos^3\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \\
&= 4\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^3 - 4\sin\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\right)^3 = \\
&= 4\sin\alpha \cos^3 \alpha - 4\cos\alpha \sin^3 \alpha = 4\sin\alpha \cos\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =
\end{aligned}$$

$$= 2(2 \sin \alpha \cos \alpha) \cos 2\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha.$$

*Ответ:*  $\sin 4\alpha$ .

**3.255.**  $\cos^4 2\alpha - 6 \cos^2 2\alpha \sin^2 2\alpha + \sin^4 2\alpha$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \cos^4 2\alpha - 6 \cos^2 2\alpha \sin^2 2\alpha + \sin^4 2\alpha = \\ & = \cos^4 2\alpha + \sin^4 2\alpha - 6 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha = \\ & = (\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha)^2 - 2 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha - 6 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha = \\ & = 1 - 8 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha = 1 - 2(4 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 4\alpha = \cos 8\alpha. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\cos 8\alpha$ .

**3.256.** 
$$\frac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha - \frac{5}{4}\pi\right) + 1}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha - \frac{5}{4}\pi\right) + 1} &= \frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) - 1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{5}{4}\pi - 2\alpha\right) + 1} = \frac{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)} - 1}{\frac{1 - \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 4\alpha\right)}{1 + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 4\alpha\right)} + 1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1 - \sin 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha} - 1}{\frac{1 - \sin 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha} + 1} = \frac{1 - \sin 4\alpha - 1 - \sin 4\alpha}{1 - \sin 4\alpha + 1 + \sin 4\alpha} = \frac{-2 \sin 4\alpha}{2} = -\sin 4\alpha. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $-\sin 4\alpha$ .

$$3.257. \frac{\sin^2(\alpha - \pi) - 4 \cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha - \frac{5}{2}\pi\right) - 4 + 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2(\alpha - \pi) - 4 \cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha - \frac{5}{2}\pi\right) - 4 + 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} = \\ & = \frac{(\sin(\pi - \alpha))^2 - 4 \left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}{\left(\cos\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)\right)^2 - 4 + 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2} = \frac{\sin^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha - 4 + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ & = \frac{\left(\sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(\sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 - 4 \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ & = \frac{-4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{-4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}{\cos^4 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}$ .

$$3.258. \cos^{-2} 4\alpha - \operatorname{tg}^2(3\pi + 4\alpha) - 2 \cos^2 \alpha - \sqrt{3} \cos\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right).$$

*Решение.*

$$\cos^{-2} 4\alpha - \operatorname{tg}^2(3\pi + 4\alpha) - 2 \cos^2 \alpha - \sqrt{3} \cos\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\cos^2 4\alpha} - (\operatorname{tg}(3\pi + 4\alpha))^2 - 2\cos^2 \alpha - \sqrt{3} \cos\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right) = \\
&= \frac{1}{\cos^2 4\alpha} - \operatorname{tg}^2 4\alpha - 2\cos^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha = \\
&= \frac{1}{\cos^2 4\alpha} - \frac{\sin^2 4\alpha}{\cos^2 4\alpha} - 2\cos^2 \alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha = \\
&= \frac{1 - \sin^2 4\alpha}{\cos^2 4\alpha} - 2\cos^2 \alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha = \frac{\cos^2 4\alpha}{\cos^2 4\alpha} - 2\cos^2 \alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha = \\
&= 1 - 2\cos^2 \alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha = -(2\cos^2 \alpha - 1) + \sqrt{3} \sin 2\alpha = \\
&= \sqrt{3} \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \cos 2\alpha\right) = \\
&= 2\left(\cos \frac{\pi}{6} \sin 2\alpha - \sin \frac{\pi}{6} \cos 2\alpha\right) = \\
&= 2\left(\sin 2\alpha \cos \frac{\pi}{6} - \cos 2\alpha \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $2 \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ .

3.259. 
$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi - 4\alpha\right) \sin^2\left(\frac{5}{4}\pi + 4\alpha\right)}{1 - 2\cos^2 4\alpha}$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi - 4\alpha\right) \sin^2\left(\frac{5}{4}\pi + 4\alpha\right)}{1 - 2\cos^2 4\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi - 4\alpha\right) \sin^2\left(\frac{5}{4}\pi + 4\alpha\right)}{-(2\cos^2 4\alpha - 1)} = \\
&= \left[ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \right.
\end{aligned}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}; 2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x \Big] =$$

$$\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2} - 8\alpha\right)}{1 + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 8\alpha\right)} \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 8\alpha\right)}{2} = \frac{\cos 8\alpha}{1 + \sin 8\alpha} \cdot \frac{1 + \sin 8\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ответ:  $-\frac{1}{2}$ .

$$3.260. \frac{4 \sin^4\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^4\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) + \cos^4\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) - 1}$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{4 \sin^4\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^4\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) + \cos^4\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) - 1} = \\ & = \frac{4 \left(-\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\right)^4}{\left(-\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)\right)^4 + \left(\cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)\right)^4 - 1} = \frac{4 \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - 1} = \\ & = \frac{4 \cos^4 \alpha}{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1} = \frac{4 \cos^4 \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1} = \\ & = \frac{4 \cos^4 \alpha}{-2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{-\sin^2 \alpha} = -2 \operatorname{ctg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

Ответ:  $-2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$ .

$$3.261. \frac{\sin\left(4\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)}{1 + \cos\left(4\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{\sin\left(4\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)}{1 + \cos\left(4\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)} &= \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 4\alpha\right)}{1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 4\alpha\right)} = \frac{\cos 4\alpha}{1 - \sin 4\alpha} = \frac{\cos 2(2\alpha)}{1 - \sin 2(2\alpha)} = \\ &= \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{1 - 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)}{\cos^2 2\alpha - 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha} = \\ &= \frac{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)}{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)^2} = \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha} = \\ &= \frac{1 + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} 2\alpha} = \\ &= \left[ \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, x, y, x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right] = \\ &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right). \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$ .

$$3.262. (\operatorname{tg} 255^\circ - \operatorname{tg} 555^\circ)(\operatorname{tg} 795^\circ + \operatorname{tg} 195^\circ).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} &(\operatorname{tg} 255^\circ - \operatorname{tg} 555^\circ)(\operatorname{tg} 795^\circ + \operatorname{tg} 195^\circ) = \\ &= (\operatorname{tg}(270^\circ - 15^\circ) - \operatorname{tg}(540^\circ + 15^\circ))(\operatorname{tg}(810^\circ - 15^\circ) + \operatorname{tg}(180^\circ + 15^\circ)) = \\ &= (\operatorname{ctg} 15^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ)(\operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ) = \operatorname{ctg}^2 15^\circ - \operatorname{tg}^2 15^\circ = \end{aligned}$$

$$= \left[ \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}, x \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \right.$$

$$\left. \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}, x \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right] =$$

$$= \frac{1 + \cos 30^\circ}{1 - \cos 30^\circ} - \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 8\sqrt{3}.$$

*Ответ:*  $8\sqrt{3}$ .

**3.263.**  $\frac{\operatorname{tg} 615^\circ - \operatorname{tg} 555^\circ}{\operatorname{tg} 795^\circ + \operatorname{tg} 735^\circ}$ .

*Решение.*

$$\frac{\operatorname{tg} 615^\circ - \operatorname{tg} 555^\circ}{\operatorname{tg} 795^\circ + \operatorname{tg} 735^\circ} = \frac{\operatorname{tg}(630^\circ - 15^\circ) - \operatorname{tg}(540^\circ + 15^\circ)}{\operatorname{tg}(810^\circ - 15^\circ) + \operatorname{tg}(720^\circ + 15^\circ)} = \frac{\operatorname{ctg} 15^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ} - \operatorname{tg} 15^\circ}{\frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ} + \operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}{1 + \operatorname{tg}^2 15^\circ} = \left[ \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right] = \frac{1 - \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}}{1 + \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} =$$

$$= \frac{1 + \cos 30^\circ - 1 + \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ + 1 - \cos 30^\circ} = \frac{2 \cos 30^\circ}{2} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

*Ответ:*  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**3.264.** 
$$\frac{\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right) - \cos(2x - 5\pi) \cos\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) \cos 4x + \sin x \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4x\right)}$$
.

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right) - \cos(2x - 5\pi) \cos\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) \cos 4x + \sin x \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4x\right)} = \\ & = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right) - \cos(5\pi - 2x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) \cos 4x + \sin x \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4x\right)} = \\ & = \frac{-\sin 2x(-\cos 3x) + \cos 2x \sin 3x}{\cos x \cos 4x - \sin x \sin 4x} = \frac{\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x}{\cos x \cos 4x - \sin x \sin 4x} = \\ & = [\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta); \\ & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)] = \\ & = \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = \operatorname{tg} 5x. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\operatorname{tg} 5x$ .

**3.265.**  $\sin(2x - \pi) \cos(x - 3\pi) + \sin\left(2x - \frac{9\pi}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \sin(2x - \pi) \cos(x - 3\pi) + \sin\left(2x - \frac{9\pi}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \\ & = -\sin(\pi - 2x) \cos(3\pi - x) - \sin\left(4\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \\ & = -\sin 2x(-\cos x) - \cos 2x(-\sin x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \\ & = [\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)] = \sin 3x. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\sin 3x$ .



$$3.266. \sin(x+2\pi)\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin\left(2x-\frac{5\pi}{2}\right).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \sin(x+2\pi)\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin\left(2x-\frac{5\pi}{2}\right)= \\ & = \sin(2\pi+x)\cos\left(\frac{7\pi}{2}-2x\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\left(-\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2x\right)\right)= \\ & = \sin x(-\sin 2x)+(-\cos x)(-\cos 2x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=\cos 3x. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\cos 3x$ .

$$3.267. \sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos^{-2}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos^{-2}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}= \\ & = \sqrt{\frac{1}{\left(-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)^2}+\frac{1}{\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\right)^2}}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}}= \\ & = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{(\sin\alpha\cos\alpha)^2}}=\frac{1}{|\sin\alpha\cos\alpha|}=\frac{2}{|2\sin\alpha\cos\alpha|}= \\ & = \frac{2}{|\sin 2\alpha|}=2|\sin^{-1}2\alpha|. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $2|\sin^{-1}2\alpha|$ .

$$3.268. \sqrt[3]{\frac{\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^{-1}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}}.$$

Решение.

$$\sqrt[3]{\frac{\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^{-1}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\frac{1}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha}{\frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{(1-\cos^2\alpha)\sin\alpha}{(1-\sin^2\alpha)\cos\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{\sin^2\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha\cos\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}} =$$

$$= \sqrt[3]{\operatorname{tg}^3\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ:  $\operatorname{tg}\alpha$ .

$$3.269. \frac{3\cos^2(\alpha+270^\circ)-\sin^2(\alpha-270^\circ)}{3\sin^2(\alpha-90^\circ)-\cos^2(\alpha+90^\circ)}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{3\cos^2(\alpha+270^\circ)-\sin^2(\alpha-270^\circ)}{3\sin^2(\alpha-90^\circ)-\cos^2(\alpha+90^\circ)} = \\ & = \frac{3(\cos(\alpha+270^\circ))^2 - (-\sin(270^\circ-\alpha))^2}{3(-\sin(90^\circ-\alpha))^2 - (\cos(90^\circ+\alpha))^2} = \frac{3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \\ & = \frac{\frac{3}{4}\sin^2\alpha - \frac{1}{4}\cos^2\alpha}{\frac{3}{4}\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\sin^2\alpha} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)} = \\ & = \frac{\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} - \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)} = \end{aligned}$$

$$= [\sin x \cos y \pm \cos x \sin y = \sin(x \pm y);$$

$$\cos x \cos y \pm \sin x \sin y = \cos(x \mp y)] =$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)} = \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$$

*Ответ:*  $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$

**3.270.**  $\frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \sin 6\alpha}{\sin 4\alpha + 2\sin^2 2\alpha - 1}.$

*Решение.*

$$\frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \sin 6\alpha}{\sin 4\alpha + 2\sin^2 2\alpha - 1} =$$

$$= \frac{(\sin 2\alpha - \sin 6\alpha) + (\cos 2\alpha - \cos 6\alpha)}{\sin 4\alpha - (1 - 2\sin^2 2\alpha)} =$$

$$= \left[ \sin x - \sin y = 2\cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}; \right.$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}; 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x] =$$

$$= \frac{2\cos 4\alpha(-\sin 2\alpha) + (-2\sin 4\alpha(-\sin 2\alpha))}{\sin 4\alpha - \cos 4\alpha} =$$

$$= \frac{-2\cos 4\alpha \sin 2\alpha + 2\sin 4\alpha \sin 2\alpha}{\sin 4\alpha - \cos 4\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha(\sin 4\alpha - \cos 4\alpha)}{\sin 4\alpha - \cos 4\alpha} = 2\sin 2\alpha.$$

*Ответ:*  $2\sin 2\alpha.$

**3.271.**  $\sqrt{(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)(\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1)}.$

*Решение.*

$$\sqrt{(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)(\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1)} = \sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right) \left(\frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} - 1\right)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} \cdot \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}} = \sqrt{\left(\frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}\right)^2} = \\
&= \sqrt{\left(\frac{2(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)}{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2 \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}\right)^2} = \sqrt{(2 \operatorname{ctg} 4\alpha)^2} = |2 \operatorname{ctg} 4\alpha| = \\
&= 2|\operatorname{ctg} 4\alpha|.
\end{aligned}$$

Ответ:  $2|\operatorname{ctg} 4\alpha|$ .

3.272.  $\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} - \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  и  $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} - \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}} &= \frac{(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha})(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha})}{(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} - \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha})(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha})} = \\
&= \frac{(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha})^2}{(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha})^2 - (\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha})^2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 2 + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 2 + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}} = \\
&= \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \frac{(\operatorname{tg}\alpha + 1)^2}{(\operatorname{tg}\alpha - 1)(\operatorname{tg}\alpha + 1)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha - 1} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1} = \\
&= \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\alpha} = \\
&= \frac{\cos\alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin\alpha \sin \frac{\pi}{4}}{\sin\alpha \cos \frac{\pi}{4} - \cos\alpha \sin \frac{\pi}{4}} = [\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)];
\end{aligned}$$

$$\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y) = \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ:  $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ .

3.273.  $\cos^6\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin^6\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) - \frac{3}{4}\left(\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)\right)^2$ .

Решение.

$$\begin{aligned} & \cos^6\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin^6\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) - \frac{3}{4}\left(\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)\right)^2 = \\ & = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)^6 + \left(-\sin^6\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^6 - \\ & - \frac{3}{4}\left(\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 - \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2\right)^2 = \\ & = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - \frac{3}{4}\left(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha\right)^2 = \\ & = \left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right)\left(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha\right) - \frac{3}{4}(\cos 2\alpha)^2 = \\ & = \left(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha\right) - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \cos^2 2\alpha = \\ & = \left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \cos^2 2\alpha = \\ & = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \cos^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{4}\left(4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha\right) - \frac{3}{4} \cos^2 2\alpha = \\ & = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha - \frac{3}{4} \cos^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{4}\left(\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1}{4}$ .

$$3.274. \frac{\sin^2 \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} + \frac{\sin^2 \beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} + \frac{\sin^2 \beta}{\sin(\beta - \alpha)} &= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} - \frac{\sin^2 \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \\ &= \frac{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2}}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{2 \sin(\alpha - \beta)} = \\ &= \left[ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = \frac{-2 \sin(\alpha + \beta) \sin(-(\alpha - \beta))}{2 \sin(\alpha - \beta)} = \\ &= \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\sin(\alpha + \beta)$ .

$$3.275. \sqrt{\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}}, \text{ если: а) } 0 < \alpha < \pi; \text{ б) } \pi < \alpha < 2\pi.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}} &= \sqrt{\frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \sin \alpha (1 + \cos \alpha)}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \left[ \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}, x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right] = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, & \text{если } 0 < \alpha < \pi, \\ -\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, & \text{если } \pi < \alpha < 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

*Ответ:* а)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ; б)  $-\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

$$3.276. \cos^2(45^\circ + \alpha) - \cos^2(30^\circ - \alpha) + \sin 15^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha).$$

*Решение.*

$$\cos^2(45^\circ + \alpha) - \cos^2(30^\circ - \alpha) + \sin 15^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \right] = \\
&= \frac{1 + \cos(90^\circ + 2\alpha)}{2} - \frac{1 + \cos(60^\circ - 2\alpha)}{2} + \frac{1}{2} (\cos(2\alpha - 60^\circ) - \cos(90^\circ + 2\alpha)) = \\
&= \frac{1}{2} (1 + \cos(90^\circ + 2\alpha) - 1 - \cos(60^\circ - 2\alpha) + \cos(60^\circ - 2\alpha) - \cos(90^\circ - 2\alpha)) = \\
&= \frac{1}{2} (\cos(90^\circ + 2\alpha) - \cos(90^\circ - 2\alpha)) = \frac{1}{2} (-\sin 2\alpha - \sin 2\alpha) = -\sin 2\alpha.
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $-\sin 2\alpha$ .

**3.277.**  $\sin^2(135^\circ - 2\alpha) - \sin^2(210^\circ - 2\alpha) - \sin 195^\circ \cos(165^\circ - 4\alpha)$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\sin^2(135^\circ - 2\alpha) - \sin^2(210^\circ - 2\alpha) - \sin 195^\circ \cos(165^\circ - 4\alpha) = \\
&= (\sin(180^\circ - (45^\circ + 2\alpha)))^2 - (\sin(180^\circ + (30^\circ - 2\alpha)))^2 - \sin(180^\circ + 15^\circ) \times \\
&\times \cos(180^\circ - (15^\circ + 4\alpha)) = \\
&= \sin^2(45^\circ + 2\alpha) - \sin^2(30^\circ - 2\alpha) - (-\sin 15^\circ)(-\cos(15^\circ + 4\alpha)) = \\
&= \sin^2(45^\circ + 2\alpha) - \sin^2(30^\circ - 2\alpha) - \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 4\alpha) = \\
&= \left[ \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}; \sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \right] = \\
&= \frac{1 - \cos(90^\circ + 4\alpha)}{2} - \frac{1 - \cos(60^\circ - 4\alpha)}{2} - \frac{1}{2} (\sin(-4\alpha) + \sin(30^\circ + 4\alpha)) = \\
&= \frac{1}{2} (1 - \cos(90^\circ + 4\alpha) - 1 + \cos(60^\circ - 4\alpha) + \sin 4\alpha - \sin(30^\circ + 4\alpha)) = \\
&= \frac{1}{2} (\sin 4\alpha + \cos(60^\circ - 4\alpha) + \sin 4\alpha - \sin(90^\circ - (60^\circ - 4\alpha))) = \\
&= \frac{1}{2} (2\sin 4\alpha + \cos(60^\circ - 4\alpha) - \cos(60^\circ - 4\alpha)) = \sin 4\alpha.
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\sin 4\alpha$ .

$$3.278. \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}, \text{ если: а) } 90^\circ < \alpha < 180^\circ;$$

$$\text{б) } 270^\circ < \alpha < 360^\circ.$$

*Решение.*

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \frac{(\sqrt{1+\sin\alpha})^2 - (\sqrt{1-\sin\alpha})^2}{\sqrt{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}} =$$

$$= \frac{1+\sin\alpha - 1+\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha}} = \frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|} =$$

$$= \begin{cases} -2\operatorname{tg}\alpha, & \text{если } 90^\circ < \alpha < 180^\circ; \\ 2\operatorname{tg}\alpha, & \text{если } 270^\circ < \alpha < 360^\circ. \end{cases}$$

*Ответ:* а)  $-2\operatorname{tg}\alpha$ ; б)  $2\operatorname{tg}\alpha$ .

$$3.279. \left(1 + \cos\frac{\alpha-3\pi}{2}\right) \operatorname{ctg}\frac{\pi-\alpha}{4}.$$

*Решение.*

$$\left(1 + \cos\frac{\alpha-3\pi}{2}\right) \operatorname{ctg}\frac{\pi-\alpha}{4} = \left(1 + \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right) =$$

$$= \left(1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)} = \frac{1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)} =$$

$$= \left[ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}, x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right] = \frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 - \sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2}.$$

*Ответ:*  $\cos\frac{\alpha}{2}$ .



$$3.280. \frac{\sin^2 4\alpha + 4 \sin^4 2\alpha - 4 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha}{4 - \sin^2 4\alpha - 4 \sin^2 2\alpha}$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 4\alpha + 4 \sin^4 2\alpha - 4 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha}{4 - \sin^2 4\alpha - 4 \sin^2 2\alpha} = \\ & = \frac{(\sin 2(2\alpha))^2 + 4 \sin^4 2\alpha - 4 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha}{(4 - 4 \sin^2 4\alpha) - (\sin 2(2\alpha))^2} = \\ & = \frac{(2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha)^2 + 4 \sin^4 2\alpha - 4 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha}{4(1 - \sin^2 2\alpha) - (2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha)^2} = \\ & = \frac{4 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha + 4 \sin^4 2\alpha - 4 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha}{4 \cos^2 2\alpha - 4 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha} = \\ & = \frac{4 \sin^4 2\alpha}{4 \cos^2 2\alpha (1 - \sin^2 2\alpha)} = \frac{\sin^4 2\alpha}{\cos^2 2\alpha \cos^2 2\alpha} = \frac{\sin^4 2\alpha}{\cos^4 2\alpha} = \operatorname{tg}^4 2\alpha. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\operatorname{tg}^4 2\alpha$ .

$$3.281. \sin\left(\frac{5}{2}\pi + 4\alpha\right) - \sin^6\left(\frac{5}{2}\pi + 2\alpha\right) + \cos^6\left(\frac{7}{2}\pi - 2\alpha\right).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{5}{2}\pi + 4\alpha\right) - \sin^6\left(\frac{5}{2}\pi + 2\alpha\right) + \cos^6\left(\frac{7}{2}\pi - 2\alpha\right) = \\ & = \sin\left(\frac{5}{2}\pi + 4\alpha\right) - \left(\sin\left(\frac{5}{2}\pi + 2\alpha\right)\right)^6 + \left(\cos\left(\frac{7}{2}\pi - 2\alpha\right)\right)^6 = \\ & = \cos 4\alpha - \cos^6 2\alpha + \sin^6 2\alpha = \cos 4\alpha - (\cos^6 2\alpha - \sin^6 2\alpha) = \\ & = \cos 4\alpha - (\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)(\cos^4 2\alpha + \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha + \sin^4 2\alpha) = \\ & = \cos 4\alpha - \cos 4\alpha((\cos^4 2\alpha + \sin^4 2\alpha) + \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos 4\alpha - \cos 4\alpha \left( (\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha)^2 - 2\sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha \right) = \\
&= \cos 4\alpha - \cos 4\alpha (1 - \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha) = \\
&= \cos 4\alpha - \cos 4\alpha \left( 1 - \frac{1}{4} \cdot 4 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha \right) = \\
&= \cos 4\alpha - \cos 4\alpha \left( 1 - \frac{1}{4} \sin^2 4\alpha \right) = \cos 4\alpha - \cos 4\alpha + \frac{1}{4} \cos 4\alpha \sin^2 4\alpha = \\
&= \frac{1}{4} \cos 4\alpha \sin^2 4\alpha = \frac{1}{4} \cos 4\alpha \sin 4\alpha \sin 4\alpha = \frac{1}{8} (2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha) \sin 4\alpha = \\
&= \frac{1}{8} \sin 8\alpha \sin 4\alpha.
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{1}{8} \sin 8\alpha \sin 4\alpha$ .

**3.282.**  $\frac{\sin 8\alpha + \sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 10\alpha + \cos 11\alpha} \times$   
 $\times \frac{\cos 8\alpha - \cos 9\alpha - \cos 10\alpha + \cos 11\alpha}{\sin 8\alpha - \sin 9\alpha - \sin 10\alpha + \sin 11\alpha}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin 8\alpha + \sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 10\alpha + \cos 11\alpha} \cdot \frac{\cos 8\alpha - \cos 9\alpha - \cos 10\alpha + \cos 11\alpha}{\sin 8\alpha - \sin 9\alpha - \sin 10\alpha + \sin 11\alpha} = \\
&= \frac{(\sin 11\alpha + \sin 8\alpha) + (\sin 10\alpha + \sin 9\alpha)}{(\cos 11\alpha + \cos 8\alpha) + (\cos 10\alpha + \cos 9\alpha)} \times \\
&\times \frac{(\cos 11\alpha + \cos 8\alpha) - (\cos 10\alpha + \cos 9\alpha)}{(\sin 11\alpha + \sin 8\alpha) - (\sin 10\alpha + \sin 9\alpha)} = \\
&= \left[ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \right. \\
&\left. \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \sin \frac{19\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} + 2 \sin \frac{19\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{19\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} + 2 \cos \frac{19\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \times \\
&\times \frac{2 \cos \frac{19\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} - 2 \cos \frac{19\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{19\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} - 2 \sin \frac{19\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \\
&= \frac{2 \sin \frac{19\alpha}{2} \left( \cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \cos \frac{19\alpha}{2} \left( \cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)} \cdot \frac{2 \cos \frac{19\alpha}{2} \left( \cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \sin \frac{19\alpha}{2} \left( \cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)} = \\
&= \frac{\sin \frac{19\alpha}{2} \cos \frac{19\alpha}{2}}{\cos \frac{19\alpha}{2} \sin \frac{19\alpha}{2}} = 1.
\end{aligned}$$

*Ответ:* 1.

**3.283.**  $\cos(270^\circ - 2\alpha) \operatorname{ctg}(30^\circ - 2\alpha) \operatorname{tg}(240^\circ - 2\alpha) (2 \cos 4\alpha - 1)$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\cos(270^\circ - 2\alpha) \operatorname{ctg}(30^\circ - 2\alpha) \operatorname{tg}(240^\circ - 2\alpha) (2 \cos 4\alpha - 1) = \\
&= \cos(270^\circ - 2\alpha) \operatorname{ctg}(30^\circ - 2\alpha) \operatorname{tg}(270^\circ - (30^\circ + 2\alpha)) (2 \cos 4\alpha - 1) = \\
&= -\sin 2\alpha \operatorname{ctg}(30^\circ - 2\alpha) \operatorname{ctg}(30^\circ + 2\alpha) (2 \cos 4\alpha - 1) = \\
&= -\frac{\sin 2\alpha \cos(30^\circ - 2\alpha) \cos(30^\circ + 2\alpha) (2 \cos 4\alpha - 1)}{\sin(30^\circ - 2\alpha) \sin(30^\circ + 2\alpha)} = \\
&= \left[ \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y)); \right. \\
&\left. \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{2}(\cos 4\alpha + \cos 60^\circ)(2\cos 4\alpha - 1)}{\frac{1}{2}(\cos 4\alpha - \cos 60^\circ)} = \\
&= -\frac{\sin 2\alpha \left(\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\right)(2\cos 4\alpha - 1)}{\cos 4\alpha - \frac{1}{2}} = \\
&= -\frac{\sin 2\alpha(2\cos 4\alpha + 1)(2\cos 4\alpha - 1)}{2\cos 4\alpha - 1} = -\sin 2\alpha(2\cos 4\alpha + 1) = \\
&= [\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x, \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x] = \\
&= -\sin 2\alpha(2(1 - 2\sin^2 2\alpha) + 1) = -\sin 2\alpha(2 - 4\sin^2 2\alpha + 1) = \\
&= -\sin 2\alpha(3 - 4\sin^2 2\alpha) = -(3\sin 2\alpha - 4\sin^3 2\alpha) = -\sin 6\alpha.
\end{aligned}$$

Ответ:  $-\sin 6\alpha$ .

**3.284.**  $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)\right)\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)\right)\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}} = \\
&= \frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)} \cdot \frac{\sqrt{1+(2\cos^2 x-1)}}{\sqrt{1-(1-2\sin^2 x)}} = \\
&= \frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\cos^2 x}}{\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)} \cdot \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \operatorname{tg} \left( \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right)} \cdot |\operatorname{ctgx}| = \frac{2 \cdot \frac{1 - \cos x}{\sin x}}{1 - \left( \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right)^2} \cdot |\operatorname{ctgx}| = \\
&= \frac{2(1 - \cos x) \cdot |\operatorname{ctgx}|}{\sin x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x - (1 - \cos x)^2} = \frac{2(1 - \cos x) \cdot |\operatorname{ctgx}| \sin x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x) - (1 - \cos x)^2} = \\
&= \frac{2(1 - \cos x) \cdot |\operatorname{ctgx}| \sin x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x - 1 + \cos x)} = \frac{2(1 - \cos x) \cdot |\operatorname{ctgx}| \sin x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x - 1 + \cos x)} = \\
&= \frac{2|\operatorname{ctgx}| \sin x}{2 \cos x} = |\operatorname{ctgx}| \cdot \operatorname{tgx} = \begin{cases} -\operatorname{ctgx} \operatorname{tgx} = -1, & \text{если } \operatorname{ctgx} < 0; \\ \operatorname{ctgx} \operatorname{tgx} = 1, & \text{если } \operatorname{ctgx} > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

*Ответ:* 1, если  $\operatorname{ctgx} > 0$ ; -1, если  $\operatorname{ctgx} < 0$ .

Преобразовать в произведение (3.285.—3.331):

**3.285.**  $\sin 6\alpha - 2\sqrt{3} \cos^2 3\alpha + \sqrt{3}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\sin 6\alpha - 2\sqrt{3} \cos^2 3\alpha + \sqrt{3} &= \left[ \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \right] = \\
&= \sin 6\alpha - \sqrt{3} \cos 6\alpha = 2 \left( \frac{1}{2} \sin 6\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 6\alpha \right) = \\
&= 2(\cos 60^\circ \sin 6\alpha - \sin 60^\circ \cos 6\alpha) = 2(\sin 6\alpha \cos 60^\circ - \cos 6\alpha \sin 60^\circ) = \\
&= [\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y)] = 2 \sin(6\alpha - 60^\circ).
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $2 \sin(6\alpha - 60^\circ)$ .

**3.286.**  $\frac{1}{\sqrt{3}} \sin 4\alpha + 1 - 2 \cos^2 2\alpha$ .

*Решение.*

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sin 4\alpha + 1 - 2 \cos^2 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 4\alpha - (2 \cos^2 2\alpha - 1) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 4\alpha - \cos 4\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2} \sin 4\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 4\alpha \right) = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} (\cos 60^\circ \sin 4\alpha - \sin 60^\circ \cos 4\alpha) = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} (\sin 4\alpha \cos 60^\circ - \cos 4\alpha \sin 60^\circ) = \\
&= [\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y)] = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(4\alpha - 60^\circ).
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{2}{\sqrt{3}} \sin(4\alpha - 60^\circ)$ .

**3.287.**  $3 - 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha - 8 \cos^4 2\alpha$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&3 - 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha - 8 \cos^4 2\alpha = \\
&= \left[ \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1; \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \right] = \\
&= 3 - 4 \cos 4\alpha + 2 \cos^2 4\alpha - 1 - 8 \left( \frac{1 + \cos 4\alpha}{2} \right)^2 = \\
&= 2 - 4 \cos 4\alpha + 2 \cos^2 4\alpha - 2(1 + 2 \cos 4\alpha + \cos^2 4\alpha) = \\
&= 2 - 4 \cos 4\alpha + 2 \cos^2 4\alpha - 2 - 4 \cos 4\alpha - 2 \cos^2 4\alpha = -8 \cos 4\alpha.
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $-8 \cos 4\alpha$ .

**3.288.**  $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 3$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 3 = \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x - 1) - 3(\operatorname{tg} x - 1) = (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = \\
&= \left( \frac{\sin x}{\cos x} - 1 \right) \left( \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 \right) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \cdot \frac{\sin^2 x - 3 \cos^2 x}{\cos^2 x} = \\
&= \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x - \sqrt{3} \cos x)(\sin x + \sqrt{3} \cos x)}{\cos^3 x} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) \cdot 2 \left( \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) \cdot 2 \left( \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)}{\cos^3 x} = \\
&= \frac{4\sqrt{2}(\cos 45^\circ \sin x - \sin 45^\circ \cos x)(\cos 60^\circ \sin x - \sin 60^\circ \cos x)(\cos 60^\circ \sin x + \sin 60^\circ \cos x)}{\cos^3 x} = \\
&= \frac{4\sqrt{2}(\sin x \cos 45^\circ - \cos x \sin 45^\circ)(\sin x \cos 60^\circ - \cos x \sin 60^\circ)(\sin x \cos 60^\circ + \cos x \sin 60^\circ)}{\cos^3 x} = \\
&= [\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha \pm \beta)] = \\
&= \frac{4\sqrt{2} \sin(x - 45^\circ) \sin(x - 60^\circ) \sin(x + 60^\circ)}{\cos^3 x}.
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{4\sqrt{2} \sin(x - 45^\circ) \sin(x - 60^\circ) \sin(x + 60^\circ)}{\cos^3 x}$ .

**3.289.**  $\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 3$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 3 &= \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg}^2 x + 3 = \\
&= \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg}^2 x - 1) - 3(\operatorname{tg}^2 x - 1) = (\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = \\
&= \left( \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 \right) \left( \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 \right) = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{\cos^2 x} = \\
&= \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)(\sin x - \sqrt{3} \cos x)(\sin x + \sqrt{3} \cos x)}{\cos^4 x} = \\
&= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right)}{\cos^2 x} \times \\
&\times \frac{2 \left( \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) \cdot 2 \left( \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)}{\cos^2 x} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8(\sin x \cos 45^\circ - \cos x \sin 45^\circ)(\sin x \cos 45^\circ + \cos x \sin 45^\circ)}{\cos^2 x} \times \\
&\times \frac{(\sin x \cos 60^\circ - \cos x \sin 60^\circ)(\sin x \cos 60^\circ + \cos x \sin 60^\circ)}{\cos^2 x} = \\
&= [\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha \pm \beta)] = \\
&= \frac{8 \sin(x - 45^\circ) \sin(x + 45^\circ) \sin(x - 60^\circ) \sin(x + 60^\circ)}{\cos^4 x}.
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{8 \sin(x - 45^\circ) \sin(x + 45^\circ) \sin(x - 60^\circ) \sin(x + 60^\circ)}{\cos^4 x}$ .

**3.290.**  $6 \sin^2 2\alpha - 1 - \cos 4\alpha$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
6 \sin^2 2\alpha - 1 - \cos 4\alpha &= 6 \sin^2 2\alpha - 1 - (2 \cos^2 2\alpha - 1) = \\
&= 6 \sin^2 2\alpha - 2 \cos^2 2\alpha = 2(3 \sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha) = \\
&= 2(\sqrt{3} \sin 2\alpha - \cos 2\alpha)(\sqrt{3} \sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \\
&= 2 \cdot 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \cos 2\alpha \right) \cdot 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \cos 2\alpha \right) = \\
&= -8(\cos 2\alpha \cos 60^\circ - \sin 2\alpha \sin 60^\circ)(\cos 2\alpha \cos 60^\circ + \sin 2\alpha \sin 60^\circ) = \\
&= [\cos x \cos y \pm \sin x \sin y = \cos(x \mp y)] = -8 \cos(2\alpha + 60^\circ) \cos(2\alpha - 60^\circ).
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $-8 \cos(2\alpha + 60^\circ) \cos(2\alpha - 60^\circ)$ .

**3.291.**  $\sqrt{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} - \sqrt{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}$ , если  $0^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} - \sqrt{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} &= \sqrt{1 + \sin 2 \left( \frac{\alpha}{4} \right)} - \sqrt{1 - \sin 2 \left( \frac{\alpha}{4} \right)} = \\
&= \sqrt{1 + 2 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4}} - \sqrt{1 - 2 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4}} =
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{4} + 2 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} + \cos^2 \frac{\alpha}{4}} - \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{4} - 2 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} + \cos^2 \frac{\alpha}{4}} = \\
&= \sqrt{\left(\sin \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{4}\right)^2} - \sqrt{\left(\sin \frac{\alpha}{4} - \cos \frac{\alpha}{4}\right)^2} = \\
&= \left|\sin \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{4}\right| - \left|\sin \frac{\alpha}{4} - \cos \frac{\alpha}{4}\right| = \left[0^\circ < \frac{\alpha}{4} \leq 45^\circ\right] = \\
&= \sin \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{4} + \sin \frac{\alpha}{4} - \cos \frac{\alpha}{4} = 2 \sin \frac{\alpha}{4}.
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $2 \sin \frac{\alpha}{4}$ .

**3.292.**  $2 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 4\alpha - 3$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
2 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 4\alpha - 3 &= 2 \cos^2 2\alpha + 3(1 - 2 \sin^2 2\alpha) - 3 = \\
&= 2 \cos^2 2\alpha - 6 \sin^2 2\alpha = 2(\cos^2 2\alpha - 3 \sin^2 2\alpha) = \\
&= 2(\cos 2\alpha - \sqrt{3} \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha) = \\
&= 2 \cdot 2 \left(\frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha\right) \cdot 2 \left(\frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha\right) = \\
&= 8(\cos 2\alpha \cos 60^\circ - \sin 2\alpha \sin 60^\circ)(\cos 2\alpha \cos 60^\circ + \sin 2\alpha \sin 60^\circ) = \\
&= [\cos x \cos y \pm \sin x \sin y = \cos(x \mp y)] = 8 \cos(2\alpha + 60^\circ) \cos(2\alpha - 60^\circ).
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $8 \cos(2\alpha + 60^\circ) \cos(2\alpha - 60^\circ)$ .

**3.293.**  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha - \beta)$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha - \beta) = \\
&= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha - \beta) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(2 + (\cos 2\alpha + \cos 2\beta)) - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha - \beta) = \\
&= \left[ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \\
&= \frac{1}{2}(2 + 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)) - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha - \beta) = \\
&= 1 + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha - \beta) = \\
&= 1 + \cos(\alpha - \beta)(\cos(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta) = \\
&= \left[ \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \right] = \\
&= 1 + \cos(\alpha - \beta)(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = \\
&= 1 + \cos(\alpha - \beta)(-\cos(\alpha - \beta)) = 1 - \cos^2(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta).
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\sin^2(\alpha - \beta)$ .

**3.294.**  $\frac{\sin(2\alpha - \beta)}{\cos 4\alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos 2\alpha}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(2\alpha - \beta)}{\cos 4\alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos 2\alpha} &= \frac{\sin(2\alpha - \beta) \cos 2\alpha + \sin \beta \cos 4\alpha}{\cos 4\alpha \cos 2\alpha} = \\
&= \left[ \sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \right] = \\
&= \frac{\frac{1}{2}(\sin(-\beta) + \sin(4\alpha - \beta)) + \frac{1}{2}(\sin(\beta - 4\alpha) + \sin(\beta + 4\alpha))}{\cos 4\alpha \cos 2\alpha} = \\
&= \frac{-\sin \beta + \sin(4\alpha - \beta) - \sin(4\alpha - \beta) + \sin(4\alpha + \beta)}{2 \cos 4\alpha \cos 2\alpha} = \frac{\sin(4\alpha + \beta) - \sin \beta}{2 \cos 4\alpha \cos 2\alpha} = \\
&= \left[ \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = \frac{2 \cos(2\alpha + \beta) \sin 2\alpha}{2 \cos 4\alpha \cos 2\alpha} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\cos(2\alpha + \beta)}{\cos 4\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha.$$

*Ответ:*  $\frac{\cos(2\alpha + \beta)}{\cos 4\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha.$

**3.295.**  $\frac{\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta) - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$

*Решение.*

$$\frac{\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta) - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} =$$

$$= \left[ \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}; \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \right] =$$

$$= \frac{1 - \cos^2(\alpha + \beta) - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2}}{1 - \cos^2(\alpha + \beta) - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\beta}{2}} =$$

$$= \frac{2 - 2\cos^2(\alpha + \beta) - 1 + \cos 2\alpha - 1 + \cos 2\beta}{2 - 2\cos^2(\alpha + \beta) - 1 - \cos 2\alpha - 1 - \cos 2\beta} =$$

$$= \frac{-2\cos^2(\alpha + \beta) + (\cos 2\alpha + \cos 2\beta)}{-2\cos^2(\alpha + \beta) - (\cos 2\alpha + \cos 2\beta)} =$$

$$= \left[ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] =$$

$$= \frac{-2\cos^2(\alpha + \beta) + 2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}{-2\cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)} =$$

$$= \frac{-2\cos(\alpha + \beta)(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))}{-2\cos(\alpha + \beta)(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))} = \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} =$$

$$= \left[ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}; \right.$$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \Big] = \\ &= \frac{-2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta} = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $-\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$ .

**3.296.**  $\sin^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2 \alpha - \cos^2 2\beta$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2 \alpha - \cos^2 2\beta &= \left[ \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \right] = \\ &= \sin^2(\alpha - 2\beta) = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 4\beta}{2} = \\ &= \sin^2(\alpha - 2\beta) - \frac{1}{2}(2 + (\cos 2\alpha + \cos 4\beta)) = \\ &= \left[ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \\ &= \sin^2(\alpha - 2\beta) - \frac{1}{2}(2 + 2 \cos(\alpha + 2\beta) \cos(\alpha - 2\beta)) = \\ &= \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1 - \cos(\alpha + 2\beta) \cos(\alpha - 2\beta) = \\ &= -(1 - \sin^2(\alpha - 2\beta)) - \cos(\alpha + 2\beta) \cos(\alpha - 2\beta) = \\ &= -\cos^2(\alpha - 2\beta) - \cos(\alpha + 2\beta) \cos(\alpha - 2\beta) = \\ &= -\cos(\alpha - 2\beta)(\cos(\alpha - 2\beta) + \cos(\alpha + 2\beta)) = \\ &= -\cos(\alpha - 2\beta) \cdot 2 \cos \alpha \cos 2\beta = -2 \cos \alpha \cos 2\beta \cos(\alpha - 2\beta). \end{aligned}$$

*Ответ:*  $-2 \cos \alpha \cos 2\beta \cos(\alpha - 2\beta)$ .

**3.297.**  $\sin^2(2\alpha - \beta) - \sin^2 2\alpha - \sin^2 \beta$ .

*Решение.*

$$\sin^2(2\alpha - \beta) - \sin^2 2\alpha - \sin^2 \beta = \left[ \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \sin^2(2\alpha - \beta) - \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2} = \\
&= \sin^2(2\alpha - \beta) - \frac{1}{2}(2 - (\cos 4\alpha + \cos 2\beta)) = \\
&= \left[ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \\
&= \sin^2(2\alpha - \beta) - \frac{1}{2}(2 - 2 \cos(2\alpha + \beta) \cos(2\alpha - \beta)) = \\
&= \sin^2(2\alpha - \beta) - 1 + \cos(2\alpha + \beta) \cos(2\alpha - \beta) = \\
&= -(1 - \sin^2(2\alpha - \beta)) + \cos(2\alpha + \beta) \cos(2\alpha - \beta) = \\
&= -\cos^2(2\alpha - \beta) + \cos(2\alpha + \beta) \cos(2\alpha - \beta) = \\
&= -\cos(2\alpha - \beta)(\cos(2\alpha - \beta) - \cos(2\alpha + \beta)) = \\
&= \left[ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = \\
&= -\cos(2\alpha - \beta)(-2 \sin 2\alpha \sin(-\beta)) = -2 \sin 2\alpha \sin \beta \cos(2\alpha - \beta).
\end{aligned}$$

*Отвеч:*  $-2 \sin 2\alpha \sin \beta \cos(2\alpha - \beta)$ .

**3.298.**  $2 + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi + \alpha}{4}\right) \left(1 + \cos \frac{\alpha - \pi}{2}\right) \cos^{-1}\left(\frac{\alpha}{2} - 2\pi\right) - 4 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right)$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&2 + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi + \alpha}{4}\right) \left(1 + \cos \frac{\alpha - \pi}{2}\right) \cos^{-1}\left(\frac{\alpha}{2} - 2\pi\right) - 4 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) = \\
&= 2 + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \cdot \frac{1}{\cos\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right)} - 4 \left(\cos\left(3\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = \\
&= 2 + \operatorname{ctg}\left(\pi + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right)\right) \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \times
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \cos\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right) - 4 \cos\left(3\pi - \frac{\alpha}{2}\right) \right)$$

$$= 2 + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right) - \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{1 - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= 2 + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{1 - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{1 - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= [\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x]$$

$$= 2 + \frac{\left(\cos\frac{\pi}{4} \cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \sin\frac{\alpha}{4}\right) \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{\left(\sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{\alpha}{4}\right) \cos\frac{\alpha}{2}}{1 - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= 2 + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\frac{\alpha}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\frac{\alpha}{4}\right) \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\frac{\alpha}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\frac{\alpha}{4}\right) \cos\frac{\alpha}{2}}{1 - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= 2 + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\frac{\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4}\right) \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{4}\right) \cos\frac{\alpha}{2}}{1 - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= 2 + \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{4} - \sin \frac{\alpha}{4}\right) \left(\cos^2 \frac{\alpha}{4} + 2 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4}\right)}{\left(\cos \frac{\alpha}{4} + \sin \frac{\alpha}{4}\right) \cos \frac{\alpha}{2}} - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2 + \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{4} - \sin \frac{\alpha}{4}\right) \left(\cos \frac{\alpha}{4} + \sin \frac{\alpha}{4}\right)^2}{\left(\cos \frac{\alpha}{4} + \sin \frac{\alpha}{4}\right) \cos \frac{\alpha}{2}} - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2 + \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\alpha}{4}}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2 + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2 + 1 - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 3 - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 4 \left(\frac{3}{4} - \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right) = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\alpha}{2}\right) \left(\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \left[ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}; \right.$$

$$\left. \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] =$$

$$= 4 \left(-2 \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right) \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{4}\right)\right) \cdot 2 \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right) \cos \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{4}\right) =$$

$$= -4 \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right) \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{4}\right)\right) \cdot \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{4}\right) \cos \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{4}\right)\right) =$$

$$= -4 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) = 4 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

*Ответ.*  $4 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$

$$3.299. 2 - \frac{\sin 8\alpha}{\sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} 2 - \frac{\sin 8\alpha}{\sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha} &= 2 + \frac{\sin 2(4\alpha)}{\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha} = \\ &= 2 + \frac{2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha}{(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha)} = 2 + \frac{2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} = \\ &= 2 + \frac{2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha}{\cos 4\alpha} = 2 + 2 \sin 4\alpha = 2(1 + \sin 4\alpha) = \\ &= 2(\cos^2 2\alpha + 2 \cos 2\alpha \sin 2\alpha + \sin^2 2\alpha) = 2(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)^2 = \\ &= 2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha\right)^2 = 4\left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 2\alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha\right)^2 = \\ &= [\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)] = \\ &= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)\right)^2 = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right). \end{aligned}$$

*Ответ:*  $4 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right).$

$$3.300. 2 - \operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} 2 - \operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha &= 2 - \left(\frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} + \frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}\right) = 2 - \frac{\sin^2 4\alpha + \cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha \cos 4\alpha} = \\ &= 2 - \frac{1}{\sin 4\alpha \cos 4\alpha} = 2 - \frac{2}{2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha} = 2 - \frac{2}{\sin 8\alpha} = 2 \cdot \frac{\sin 8\alpha - 1}{\sin 8\alpha} = \\ &= 2 \cdot \frac{\sin 8\alpha - \sin \frac{\pi}{2}}{\sin 8\alpha} = \left[ \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{4 \cos\left(4\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 8\alpha} = \frac{4 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right)\right) \sin\left(-\left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right)\right)}{\sin 8\alpha} = \\
&= \frac{4 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right) \left(-\sin\left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right)\right)}{\sin 8\alpha} = \frac{-4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right)}{\sin 8\alpha}. \\
\text{Ответ: } &\frac{-4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right)}{\sin 8\alpha}.
\end{aligned}$$

$$3.301. \frac{2 \cos^2 2\alpha - 1}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \sin^2\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right)} - \operatorname{tg} 2\alpha + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\frac{2 \cos^2 2\alpha - 1}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \sin^2\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right)} - \operatorname{tg} 2\alpha + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha = \\
&= \left[ 2 \cos^2 2x - 1 = \cos 4x; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, \right. \\
&\left. x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \right] = \\
&= \frac{\cos 4\alpha}{2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)} \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 4\alpha\right)}{2}} - \operatorname{tg} 2\alpha + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha = \\
&= \frac{\cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha} - \operatorname{tg} 2\alpha + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \operatorname{tg} 2\alpha + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha = \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right) + (\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) = \\
&= \frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + (\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) = (\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) \left(\frac{1}{\cos 2\alpha} + 1\right) = \\
&= \frac{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha} = \\
&= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha\right) (1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos 2\alpha} = \\
&= \frac{2\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 2\alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha\right) \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha} = \\
&= \left[\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y)\right] = \frac{2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha}.
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$ .

**3.302.**  $\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha} &= \frac{\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}{1 + \frac{\sin 4\alpha \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha \cos 2\alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}}{\frac{\cos 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha \cos 2\alpha}} = \\
&= \frac{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha \cos \alpha} \cdot \frac{\cos 4\alpha \cos 2\alpha}{\cos 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha \sin 2\alpha} = \\
&= \frac{\cos 4\alpha}{\sin 2\alpha (\cos 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha \sin 2\alpha)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)] = \frac{\cos 4\alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2 \cos 4\alpha}{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} \\
 &= \frac{2 \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = 2 \operatorname{ctg} 4\alpha.
 \end{aligned}$$

*Ответ:*  $2 \operatorname{ctg} 4\alpha$ .

**3.303.**  $1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha - \beta)$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 &1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha - \beta) = \\
 &= 1 - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha - \beta) = \\
 &= \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha - \beta) = \\
 &= \left[ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha - \beta) = \\
 &= \cos(\alpha - \beta) (\cos(\alpha + \beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta) = \\
 &= \left[ \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \right] = \\
 &= \cos(\alpha - \beta) \left( \cos(\alpha + \beta) + 2 \cdot \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \right) = \\
 &= \cos(\alpha - \beta) (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = \\
 &= \cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2(\alpha - \beta).
 \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\cos^2(\alpha - \beta)$ .

**3.304.**  $1 + \cos\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \sin\left(2\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)$ .

*Решение.*

$$1 + \cos\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \sin\left(2\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2\alpha\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = \\
&= 1 - \sin 2\alpha - \cos 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha = (1 + \operatorname{tg} 2\alpha) - (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) = \\
&= \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right) - (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) = \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) = \\
&= (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) \left(\frac{1}{\cos 2\alpha} - 1\right) = \frac{(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)(1 - \cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha} = \\
&= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha\right) (1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{\cos 2\alpha} = \\
&= \frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 2\alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha\right) \cdot 2 \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha} = \\
&= [\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)] = \frac{2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{2\sqrt{2} \sin^2 \alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}$ .

**3.305.**  $4 \cos^2\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \cos(2\alpha - \pi) + \sin\left(\frac{5}{2}\pi - 6\alpha\right)$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
&4 \cos^2\left(2\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \cos(2\alpha - \pi) + \sin\left(\frac{5}{2}\pi - 6\alpha\right) = \\
&= 4 \cos\left(\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right)\right)^2 + \cos(\pi - 2\alpha) + \sin\left(\frac{5}{2}\pi - 6\alpha\right) = \\
&= 4 \sin^2 2\alpha - \cos 2\alpha + \cos 6\alpha = 2(1 - \cos 4\alpha) + (\cos 6\alpha - \cos 2\alpha) = \\
&= 2(1 - \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha) + (\cos 6\alpha - \cos 2\alpha) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \sin^2 2\alpha + (\cos 6\alpha - \cos 2\alpha) = \\
&= \left[ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = 4 \sin^2 2\alpha - 2 \sin 4\alpha \sin 2\alpha = \\
&= 2 \sin 2\alpha (2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha) = 2 \sin 2\alpha (2 \sin 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha) = \\
&= 4 \sin^2 2\alpha (1 - \cos 2\alpha) = 4 \sin^2 2\alpha (1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \\
&= 4 \sin^2 2\alpha \cdot 2 \sin^2 \alpha = 8 \sin^2 2\alpha \sin^2 \alpha.
\end{aligned}$$

Ответ:  $8 \sin^2 2\alpha \sin^2 \alpha$ .

3.306.  $\frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}$ , если а)  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ; б)  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

Решение.

Из условия имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{(\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha})(\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha})}{(\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha})(\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha})} = \\
&= \frac{(\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha})^2}{(\sqrt{1+\sin\alpha})^2 - (\sqrt{1-\sin\alpha})^2} = \\
&= \frac{1 + \sin\alpha + 2\sqrt{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)} + 1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha - 1 + \sin\alpha} = \\
&= \frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{1 + \sqrt{\cos^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{1 + |\cos\alpha|}{\sin\alpha}.
\end{aligned}$$

Отсюда:

а) при  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  имеем  $\frac{1 + |\cos\alpha|}{\sin\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ ;

б) при  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  имеем  $\frac{1 + |\cos\alpha|}{\sin\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ;

Ответ: а)  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ ; б)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

$$3.307. \quad 2\sin^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - \frac{4\operatorname{tg} 2\alpha(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)}{\sin 8\alpha(1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha)^2}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & 2\sin^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - \frac{4\operatorname{tg} 2\alpha(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)}{\sin 8\alpha(1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha)^2} = \\ & = 2\sin^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - \frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} \cdot \frac{2\left(1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right)}{\left(1 + \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right) \sin 2(4\alpha)} = \\ & = \left[ \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \sin x \right] = \\ & = 1 - \cos 4\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - \frac{2\left(\frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}\right) \sin 4\alpha}{\frac{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} \cdot 2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha} = \\ & = 1 - \cos 4\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - \frac{\cos 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \sqrt{3} \sin 4\alpha - \cos 4\alpha = \\ & = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4\alpha - \frac{1}{2} \cos 4\alpha\right) = 2\left(\sin 4\alpha \cos \frac{\pi}{6} - \cos 4\alpha \sin \frac{\pi}{6}\right) = \\ & = [\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y)] = 2 \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{6}\right). \\ & \text{Ответ: } 2 \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

$$3.308. \cos^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2(2\beta - \pi).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \cos^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2(2\beta - \pi) = \\ & = \cos^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos^2(\pi - 2\beta) = \left[\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}\right] = \\ & = \frac{1 + \cos(2\alpha - 4\beta)}{2} - \frac{1 + \cos(\pi - 2\alpha)}{2} - \frac{1 + \cos(2\pi - 4\beta)}{2} = \\ & = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha - 4\beta) - \cos(\pi - 2\alpha) - \cos(2\pi - 4\beta) - 1) = \\ & = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha - 4\beta) + \cos 2\alpha - \cos 4\beta - 1) = \\ & = \left[\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1\right] = \\ & = \frac{1}{2}(2 \cos(2\alpha - 2\beta) \cos 2\beta - 2 \cos^2 2\beta) = \cos 2\beta(\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos 2\beta) = \\ & = \left[\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}\right] = \cos 2\beta(-2 \sin \alpha \sin(\alpha - 2\beta)) = \\ & = 2 \sin \alpha \sin(2\beta - \alpha) \cos 2\beta. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $2 \sin \alpha \sin(2\beta - \alpha) \cos 2\beta$ .

$$3.309. 1 - \cos(\pi - 8\alpha) - \cos(\pi + 4\alpha).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & 1 - \cos(\pi - 8\alpha) - \cos(\pi + 4\alpha) = 1 + \cos 8\alpha + \cos 4\alpha = \\ & = 1 + \cos 2(4\alpha) + \cos 4\alpha = 1 + 2 \cos^2 4\alpha - 1 + \cos 4\alpha = 2 \cos^2 4\alpha + \cos 4\alpha = \\ & = 2 \cos 4\alpha \left(\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\right) = 2 \cos 4\alpha \left(\cos 4\alpha + \cos \frac{\pi}{3}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \\
 &= 2 \cos 4\alpha \cdot 2 \cos \left( 2\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( 2\alpha - \frac{\pi}{6} \right) = \\
 &= 4 \cos 4\alpha \cos \left( 2\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( 2\alpha - \frac{\pi}{6} \right).
 \end{aligned}$$

*Ответ:*  $4 \cos 4\alpha \cos \left( 2\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( 2\alpha - \frac{\pi}{6} \right)$ .

**3.310.**  $\cos 2\alpha - \sin 4\alpha - \cos 6\alpha$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 \cos 2\alpha - \sin 4\alpha - \cos 6\alpha &= (\cos 2\alpha - \cos 6\alpha) - \sin 4\alpha = \\
 &= \left[ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = -2 \sin 4\alpha \sin(-2\alpha) - \sin 4\alpha = \\
 &= 2 \sin 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 4\alpha = 2 \sin 4\alpha \left( \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \right) = \\
 &= 2 \sin 4\alpha (\sin 2\alpha - \sin 30^\circ) = \\
 &= \left[ \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = \\
 &= 2 \sin 4\alpha \cdot 2 \cos(\alpha + 15^\circ) \sin(\alpha - 15^\circ) = \\
 &= 4 \sin 4\alpha \sin(\alpha - 15^\circ) \cos(\alpha + 15^\circ).
 \end{aligned}$$

*Ответ:*  $4 \sin 4\alpha \sin(\alpha - 15^\circ) \cos(\alpha + 15^\circ)$ .

**3.311.**  $\sin^3 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \cos^3 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) - \cos \left( \alpha - \frac{3}{2} \pi \right) + \sin \left( \frac{3}{2} \pi + \alpha \right)$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 &\sin^3 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \cos^3 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) - \cos \left( \alpha - \frac{3}{2} \pi \right) + \sin \left( \frac{3}{2} \pi + \alpha \right) = \\
 &= \left( \sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right)^3 + \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right)^3 - \cos \left( \frac{3}{2} \pi - \alpha \right) + \sin \left( \frac{3}{2} \pi + \alpha \right) =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha = \\
&= (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha) - (\cos \alpha - \sin \alpha) = \\
&= (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha - 1) = \\
&= (\cos \alpha - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha \cos \alpha - 1) = (\cos \alpha - \sin \alpha) \sin \alpha \cos \alpha = \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) \cdot \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha \right) \sin 2\alpha = \\
&= [\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y)] = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right) \sin 2\alpha.
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha \cos \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)$ .

**3.312.**  $2 \cos^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
2 \cos^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1 &= \left[ \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \right] = \\
&= 1 + \cos 4\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1 = \\
&= \cos 4\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha = 2 \left( \frac{1}{2} \cos 4\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4\alpha \right) = \\
&= 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \sin 4\alpha \right) = [\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)] = \\
&= 2 \cos \left( \frac{\pi}{3} - 4\alpha \right).
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $2 \cos \left( \frac{\pi}{3} - 4\alpha \right)$ .

$$3.313. \frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - 2\alpha\right) + 2\sin^2\left(2\alpha - \frac{5}{2}\pi\right) - 1}{1 + \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(6\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)}$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - 2\alpha\right) + 2\sin^2\left(2\alpha - \frac{5}{2}\pi\right) - 1}{1 + \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(6\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)} = \\ & = \frac{\sin\left(4\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right) + 2\sin^2\left(\frac{5}{2}\pi - 2\alpha\right) - 1}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 6\alpha\right)} = \\ & = \frac{\sin\left(4\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right) - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{5}{2}\pi - 2\alpha\right)\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 6\alpha\right)} = \\ & = \frac{\cos 2\alpha - \cos(5\pi - 4\alpha)}{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = \frac{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = \\ & = \frac{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{(1 + \cos 4\alpha) + (\cos 6\alpha + \cos 2\alpha)} = \left[ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1; \right. \\ & \left. \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \right] = \frac{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{1 + 2\cos^2 2\alpha - 1 + 2\cos 4\alpha \cos 2\alpha} = \\ & = \frac{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{2\cos^2 2\alpha + 2\cos 4\alpha \cos 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{2\cos 2\alpha(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)} = \frac{1}{2\cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{1}{2\cos 2\alpha}$ .

3.314.  $\frac{\cos 2\alpha - \sin 4\alpha - \cos 6\alpha}{\cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \cos 6\alpha}$ .

*Решение.*

$$\frac{\cos 2\alpha - \sin 4\alpha - \cos 6\alpha}{\cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \cos 6\alpha} = \frac{(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha) - \sin 4\alpha}{(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha) + \sin 4\alpha} =$$
$$= \left[ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = \frac{-2 \sin 4\alpha \sin(-2\alpha) - \sin 4\alpha}{-2 \sin 4\alpha \sin(-2\alpha) + \sin 4\alpha} =$$

$$= \frac{2 \sin 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 4\alpha \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{2 \sin 4\alpha \left( \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \right)}{2 \sin 4\alpha \left( \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \right)} = \frac{\sin 2\alpha - \sin 30^\circ}{\sin 2\alpha + \sin 30^\circ} =$$

$$= \left[ \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}; \right.$$

$$\left. \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] =$$

$$= \frac{2 \cos(\alpha + 15^\circ) \sin(\alpha - 15^\circ)}{2 \sin(\alpha + 15^\circ) \cos(\alpha - 15^\circ)} = \operatorname{tg}(\alpha - 15^\circ) \operatorname{ctg}(\alpha + 15^\circ).$$

*Ответ:*  $\operatorname{tg}(\alpha - 15^\circ) \operatorname{ctg}(\alpha + 15^\circ)$ .

**3.315.**  $\cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \cos 6\alpha$ .

*Решение.*

$$\cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \cos 6\alpha = (\cos 2\alpha - \cos 6\alpha) + \sin 4\alpha =$$

$$= \left[ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = -2 \sin 4\alpha \sin(-2\alpha) + \sin 4\alpha =$$

$$= 2 \sin 4\alpha \sin 2\alpha + \sin 4\alpha = 2 \sin 4\alpha \left( \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 2 \sin 4\alpha (\sin 2\alpha + \sin 30^\circ) = \left[ \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] =$$

$$= 2 \sin 4\alpha \cdot 2 \sin(\alpha + 15^\circ) \cos(\alpha - 15^\circ) = 4 \sin 4\alpha \sin(\alpha + 15^\circ) \cos(\alpha - 15^\circ).$$

*Ответ:*  $4 \sin 4\alpha \sin(\alpha + 15^\circ) \cos(\alpha - 15^\circ)$ .

$$3.316. \sin^2\left(\frac{5}{4}\pi - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5}{4}\pi + 2\alpha\right).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{5}{4}\pi - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5}{4}\pi + 2\alpha\right) &= \left[\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}\right] = \\ &= \frac{1 - \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 4\alpha\right)}{2} - \frac{1 - \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4\alpha\right)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4\alpha\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 4\alpha\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (-\sin 4\alpha - \sin 4\alpha) = -\sin 4\alpha. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $-\sin 4\alpha$ .

$$3.317. \frac{\cos^{-1}\left(\alpha + \frac{5}{2}\pi\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}{\sin^{-1}\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) + \sin\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{\cos^{-1}\left(\alpha + \frac{5}{2}\pi\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}{\sin^{-1}\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) + \sin\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)} &= \frac{\left(\cos\left(\frac{5}{2}\pi + \alpha\right)\right)^{-1} - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}{\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\right)^{-1} + \sin\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)} = \\ &= \frac{(-\sin \alpha)^{-1} + \sin \alpha}{(-\cos \alpha)^{-1} + \cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{\sin \alpha} + \sin \alpha}{-\frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha} = \\ &= \frac{\frac{-1 + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{-1 + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{-(1 - \sin^2 \alpha)\cos \alpha}{-(1 - \cos^2 \alpha)\sin \alpha} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha \sin \alpha} = \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \operatorname{ctg}^3 \alpha.$$

Ответ:  $\operatorname{ctg}^3 \alpha$ .

$$3.318. \frac{3\operatorname{tg}^2(\alpha + 3\pi) - 1}{1 - 3\operatorname{tg}^2\left(\alpha + \frac{5}{2}\pi\right)}.$$

Решение.

$$\frac{3\operatorname{tg}^2(\alpha + 3\pi) - 1}{1 - 3\operatorname{tg}^2\left(\alpha + \frac{5}{2}\pi\right)} = \frac{3(\operatorname{tg}(3\pi + \alpha))^2 - 1}{1 - 3\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5}{2}\pi + \alpha\right)\right)^2} = \frac{3\operatorname{tg}^2\alpha - 1}{1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{3\operatorname{tg}^2\alpha - 1}{1 - \frac{3}{\operatorname{tg}^2\alpha}} =$$

$$= \frac{(3\operatorname{tg}^2 - 1)\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 3} = \frac{3\left(\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{3}\right)\operatorname{tg}^2\alpha}{3\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\alpha - 1\right)} = \frac{-\left(\frac{1}{3} - \operatorname{tg}^2\alpha\right)\operatorname{tg}^2\alpha}{-\left(1 - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{tg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{tg}\alpha\right)\operatorname{tg}^2\alpha}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\alpha\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\alpha\right)} = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\alpha\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\alpha\right)\operatorname{tg}^2\alpha}{\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\alpha\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\alpha\right)} =$$

$$= \operatorname{tg}^2\alpha \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \left[ \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y} = \operatorname{tg}(x + y), x, y, x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \right.$$

$$\left. \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y}{1 + \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y} = \operatorname{tg}(x - y), x, y, x - y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right] =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

*Ответ:*  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \operatorname{tg}^2 \alpha.$

**3.319.**  $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \sin 6\alpha.$

*Решение.*

$$\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \sin 6\alpha = (\sin 2\alpha - \sin 6\alpha) + (\cos 2\alpha - \cos 6\alpha) =$$

$$= \left[ \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}; \right.$$

$$\left. \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] =$$

$$= 2 \cos 4\alpha \sin(-2\alpha) - 2 \sin 4\alpha \sin(-2\alpha) =$$

$$= -2 \cos 4\alpha \sin 2\alpha + 2 \sin 4\alpha \sin 2\alpha =$$

$$= 2 \sin 2\alpha (\sin 4\alpha - \cos 4\alpha) = 2 \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4\alpha \right) =$$

$$= 2\sqrt{2} \sin 2\alpha (\sin 4\alpha \cos 45^\circ - \cos 4\alpha \sin 45^\circ) =$$

$$= [\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x-y)] = 2\sqrt{2} \sin 2\alpha \sin(4\alpha - 45^\circ).$$

*Ответ:*  $2\sqrt{2} \sin 2\alpha \sin(4\alpha - 45^\circ).$

**3.320.**  $\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{5}{4} \pi + \alpha\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} - \operatorname{tg} \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right).$

*Решение.*

$$\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{5}{4} \pi + \alpha\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} - \operatorname{tg} \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4} \pi + \alpha\right) \left(2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right)} - \operatorname{tg} \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \right. \\
&\left. \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \right] = \\
&= \frac{\cos 2\alpha}{\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi + 2\alpha\right)}{1 + \cos\left(\frac{5}{2}\pi + 2\alpha\right)} \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)\right)} - \operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha = \\
&= \frac{\cos 2\alpha}{\frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} \cdot (1 - \sin 2\alpha)} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha - \sin\alpha = \\
&= \left(1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) + (\cos\alpha - \sin\alpha) = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha} + (\cos\alpha - \sin\alpha) = \\
&= (\cos\alpha - \sin\alpha) \left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right) = \frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(1 + \cos\alpha)}{\cos\alpha} = \\
&= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\alpha\right) \left(1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha} = \\
&= \frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos\alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin\alpha\right) \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \\
&= \frac{2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos\alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin\alpha\right) \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \\
&= \left[\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y)\right] = \frac{2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.
\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

$$3.321. \cos^2\left(\frac{5}{8}\pi + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{15}{8}\pi + \alpha\right).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \cos^2\left(\frac{5}{8}\pi + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{15}{8}\pi + \alpha\right) = \\ & = \left[ \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \right] = \\ & = \frac{1 + \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right)}{2} - \frac{1 - \cos\left(\frac{15\pi}{4} + 2\alpha\right)}{2} = \\ & = \frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right) + \cos\left(\frac{15\pi}{4} + 2\alpha\right) \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left( \cos\left(\pi + \left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)\right) + \cos\left(4\pi - \left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)\right) \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left( -\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) \right) = \\ & = \left[ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = \frac{1}{2} \left( -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin(-2\alpha) \right) = \\ & = \sin \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha.$$



$$3.322. \frac{2 \cos^2\left(\frac{9}{4}\pi - \alpha\right) \sin\left(\alpha + \frac{7}{4}\pi\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{2 \cos^2\left(\frac{9}{4}\pi - \alpha\right) \sin\left(\alpha + \frac{7}{4}\pi\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right) = \\ & = \frac{2 \cos^2\left(\frac{9}{4}\pi - \alpha\right) \sin\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right)} = \\ & = \left[ \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}; \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right] = \\ & = \frac{1 + \cos\left(\frac{9\pi}{2} - 2\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{1 - \sin 2\alpha \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \cdot \frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)}{1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)}} = \\ & = \frac{1 + \cos\left(4\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right)}{1 - \sin 2\alpha} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \cdot \frac{1 - \sin 2\alpha}{-\cos 2\alpha} = \\ & = \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \cdot \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y] = \\
&= \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha}{\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha} \cdot \frac{1 - \sin 2\alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} = \\
&= \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha} \cdot \frac{1 - \sin 2\alpha}{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \\
&= \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} \cdot \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(1 - \sin 2\alpha)}{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \\
&= \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} \cdot \frac{1 - \sin 2\alpha}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} \cdot \\
&\quad - \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha} = \\
&= \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} \cdot \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{(1 + \sin 2\alpha)^2 - (1 - \sin 2\alpha)^2}{(1 - \sin 2\alpha)(1 + \sin 2\alpha)} = \\
&= \frac{1 + 2 \sin 2\alpha + \sin^2 2\alpha - 1 + 2 \sin 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{1 - \sin^2 2\alpha} = \frac{4 \sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}.
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{4 \sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$ .

**3.323.**  $\sin \alpha \sin^2(\alpha - 270^\circ)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \cos \alpha \cos^2(\alpha + 270^\circ)(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\sin \alpha \sin^2(\alpha - 270^\circ)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \cos \alpha \cos^2(\alpha + 270^\circ)(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \\
&= \sin \alpha (\sin(270^\circ - \alpha))^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \cos \alpha (\cos(270^\circ + \alpha))^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \\
&= \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \cos \alpha \sin^2 \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sin\alpha \cos^2\alpha \left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) + \cos\alpha \sin^2\alpha \left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = \\
&= \frac{\sin\alpha \cos^2\alpha (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos\alpha \sin^2\alpha (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha} = \\
&= \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\alpha \right) = \\
&= \sqrt{2} (\sin 45^\circ \cos\alpha + \cos 45^\circ \sin\alpha) = \\
&= [\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y)] = \sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha).
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha)$ .

**3.324.**  $\sin 2\alpha + \cos 4\alpha - \sin 6\alpha$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha + \cos 4\alpha - \sin 6\alpha &= (\sin 2\alpha - \sin 6\alpha) + \cos 4\alpha = \\
&= \left[ \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = 2 \cos 4\alpha \sin(-2\alpha) + \cos 4\alpha = \\
&= -2 \cos 4\alpha \sin 2\alpha + \cos 4\alpha = -2 \cos 4\alpha \left( \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \right) = \\
&= -2 \cos 4\alpha (\sin 2\alpha - \sin 30^\circ) = -2 \cos 4\alpha \cdot 2 \cos(\alpha + 15^\circ) \sin(\alpha - 15^\circ) = \\
&= 4 \cos 4\alpha \sin(15^\circ - \alpha) \cos(15^\circ + \alpha).
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $4 \cos 4\alpha \sin(15^\circ - \alpha) \cos(15^\circ + \alpha)$ .

**3.325.**  $\cos^2 2\alpha - 3 \sin^2 2\alpha$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\cos^2 2\alpha - 3 \sin^2 2\alpha &= \left[ \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}; \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \right] = \\
&= \frac{1 + \cos 4\alpha}{2} - \frac{3(1 - \cos 4\alpha)}{2} = -1 + 2 \cos 4\alpha = 2 \left( \cos 4\alpha - \frac{1}{2} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(\cos 4\alpha - \cos 60^\circ) = \left[ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = \\
 &= 2(-2 \sin(2\alpha + 30^\circ) \sin(2\alpha - 30^\circ)) = 4 \sin(30^\circ + 2\alpha) \sin(30^\circ - 2\alpha).
 \end{aligned}$$

*Ответ:*  $4 \sin(30^\circ + 2\alpha) \sin(30^\circ - 2\alpha)$ .

**3.326.**  $\cos^2 \frac{na}{2} - \sin^2 \frac{ma}{2}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \frac{na}{2} - \sin^2 \frac{ma}{2} &= \left[ \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}; \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \right] = \\
 &= \frac{1 + \cos na}{2} - \frac{1 - \cos ma}{2} = \frac{1}{2}(\cos na + \cos ma) = \\
 &= \left[ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{(m+n)a}{2} \cos \frac{(m-n)a}{2} = \\
 &= \cos \frac{(m+n)a}{2} \cos \frac{(m-n)a}{2}.
 \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\cos \frac{(m+n)a}{2} \cos \frac{(m-n)a}{2}$ .

**3.327.**  $1 + \operatorname{tg}\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos^{-1}\left(2\alpha + \frac{3}{2}\pi\right)$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 1 + \operatorname{tg}\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos^{-1}\left(2\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) &= 1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + \frac{1}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + 2\alpha\right)} = \\
 &= 1 - \operatorname{ctg} 2\alpha + \frac{1}{\sin 2\alpha} = 1 - \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha + 1}{\sin 2\alpha} = \\
 &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right)}{\cos \alpha} = \\
&= \frac{\sqrt{2} \left( \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha \right)}{\cos \alpha} = [\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y)] = \\
&= \frac{\sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)}{\cos \alpha}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)}{\cos \alpha}$ .

3.328.  $\frac{\cos \left( \alpha + \frac{3}{2} \pi \right) + 2 \cos \left( \frac{11}{6} \pi - \alpha \right)}{2 \sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \sqrt{3} \sin \left( \frac{3}{2} \pi - \alpha \right)}$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos \left( \alpha + \frac{3}{2} \pi \right) + 2 \cos \left( \frac{11}{6} \pi - \alpha \right)}{2 \sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \sqrt{3} \sin \left( \frac{3}{2} \pi - \alpha \right)} = \frac{\cos \left( \frac{3}{2} \pi + \alpha \right) + 2 \cos \left( 2\pi - \left( \frac{\pi}{6} + \alpha \right) \right)}{2 \sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \sqrt{3} \sin \left( \frac{3}{2} \pi - \alpha \right)} = \\
&= \frac{\sin \alpha + 2 \cos \left( \frac{\pi}{6} + \alpha \right)}{2 \sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right) - \sqrt{3} \cos \alpha} = [\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;
\end{aligned}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin \alpha + 2 \cos \frac{\pi}{6} \cos \alpha - 2 \sin \frac{\pi}{6} \sin \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha + 2 \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha}{\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3} \cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha.$$

*Ответ:*  $\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha$ .

$$3.329. \cos^2\left(\frac{5}{4}\pi - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{5}{4}\pi + 2\alpha\right).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \cos^2\left(\frac{5}{4}\pi - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{5}{4}\pi + 2\alpha\right) = \\ &= \frac{1 + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 4\alpha\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4\alpha\right)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 4\alpha\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4\alpha\right) \right) = \frac{1}{2} (\sin 4\alpha + \sin 4\alpha) = \sin 4\alpha. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\sin 4\alpha$ .

$$3.330. \sin \alpha - \left( \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos \alpha - \sin \alpha} \right)^2.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \sin \alpha - \left( \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos \alpha - \sin \alpha} \right)^2 = [\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y] = \\ &= \sin \alpha - \left( \frac{\cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \alpha - \sin \alpha} \right)^2 = \sin \alpha - \left( \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \right)^2 = \end{aligned}$$

$$= \sin \alpha - \left( \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} \right)^2 = \sin \alpha - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 =$$

$$= \sin \alpha - \frac{1}{2} = \sin \alpha - \sin \frac{\pi}{6} =$$

$$= \left[ \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right] = 2 \cos \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12} \right).$$

*Omsem:*  $2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12} \right).$

**3.331.**  $\operatorname{tg}210^\circ + \operatorname{ctg}210^\circ + \operatorname{tg}220^\circ + \operatorname{ctg}220^\circ.$

*Peuenue.*

$$\operatorname{tg}210^\circ + \operatorname{ctg}210^\circ + \operatorname{tg}220^\circ + \operatorname{ctg}220^\circ =$$

$$= \operatorname{tg}(180^\circ + 30^\circ) + \operatorname{ctg}(180^\circ + 30^\circ) + \operatorname{tg}(180^\circ + 40^\circ) + \operatorname{ctg}(180^\circ + 40^\circ) =$$

$$= \operatorname{tg}30^\circ + \operatorname{ctg}30^\circ + \operatorname{tg}40^\circ + \operatorname{ctg}40^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} + \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} + \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} + \frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} =$$

$$= \frac{1}{\sin 30^\circ \cos 30^\circ} + \frac{1}{\sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \frac{2}{2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ} + \frac{2}{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ} =$$

$$= \frac{2}{\sin 60^\circ} + \frac{2}{\sin 80^\circ} = 2 \left( \frac{1}{\sin 60^\circ} + \frac{1}{\sin 80^\circ} \right) = \frac{2(\sin 80^\circ + \sin 60^\circ)}{\sin 60^\circ \sin 80^\circ} =$$

$$= \left[ \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \frac{2 \cdot 2 \sin 70^\circ \cos 10^\circ}{\sin 60^\circ \sin 80^\circ} =$$

$$= \frac{4 \sin 70^\circ \cos 10^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(90^\circ - 10^\circ)} = \frac{8 \sin 70^\circ \cos 10^\circ}{\sqrt{3} \cos 10^\circ} = \frac{8 \sin 70^\circ}{\sqrt{3}}.$$

*Omsem:*  $\frac{8}{\sqrt{3}} \sin 70^\circ.$

Доказать справедливость равенств (3.332—3.354):

$$3.332. \frac{\sin 24^\circ \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \sin 66^\circ}{\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \sin 39^\circ \cos 21^\circ} = -1.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\sin 24^\circ \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \sin 66^\circ}{\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \sin 39^\circ \cos 21^\circ} = \frac{\sin 24^\circ \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \sin(90^\circ - 24^\circ)}{\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \sin 39^\circ \cos 21^\circ} = \\ & = \left[ \sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y) \right] = \frac{\sin 24^\circ \cos 6^\circ - \cos 24^\circ \sin 6^\circ}{\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \cos 21^\circ \sin 39^\circ} = \\ & = \frac{\sin 18^\circ}{\sin(-18^\circ)} = \frac{\sin 18^\circ}{-\sin 18^\circ} = -1. \end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.333. \frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ} = 1.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ} = \\ & = \frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos(180^\circ - 20^\circ) \cos(90^\circ + 10^\circ)}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos(180^\circ - 21^\circ) \cos(90^\circ + 9^\circ)} = \\ & = \frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \sin 10^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 21^\circ \sin 9^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 1. \end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.334. \frac{\cos 63^\circ \cos 3^\circ - \cos 87^\circ \cos 27^\circ}{\cos 132^\circ \cos 72^\circ - \cos 42^\circ \cos 18^\circ} = -\operatorname{tg} 24^\circ.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 63^\circ \cos 3^\circ - \cos 87^\circ \cos 27^\circ}{\cos 132^\circ \cos 72^\circ - \cos 42^\circ \cos 18^\circ} = \\ & = \frac{\cos 63^\circ \cos(90^\circ - 87^\circ) - \cos 87^\circ \cos(90^\circ - 63^\circ)}{\cos(90^\circ + 42^\circ) \cos(90^\circ - 18^\circ) - \cos 42^\circ \cos 18^\circ} = \\ & = \left[ \sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y); \right. \\ & \left. \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y) \right] = \end{aligned}$$



$$= \frac{\sin 87^\circ \cos 63^\circ - \cos 87^\circ \sin 63^\circ}{-\sin 42^\circ \sin 18^\circ - \cos 42^\circ \cos 18^\circ} = \frac{\sin 24^\circ}{-\cos 24^\circ} = -\operatorname{tg} 24^\circ.$$

Равенство справедливо.

$$3.335. \frac{\cos 64^\circ \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cos 19^\circ} = -1.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 64^\circ \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cos 19^\circ} = \\ & = \frac{\cos(90^\circ - 26^\circ) \cos 4^\circ - \cos(90^\circ - 4^\circ) \cos 26^\circ}{\cos(90^\circ - 19^\circ) \cos 41^\circ - \cos 19^\circ \cos(90^\circ - 41^\circ)} = \\ & = [\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y)] = \\ & = \frac{\sin 26^\circ \cos 4^\circ - \sin 4^\circ \cos 26^\circ}{\sin 19^\circ \cos 41^\circ - \cos 19^\circ \sin 41^\circ} = \frac{\sin 22^\circ}{-\sin 22^\circ} = -1. \end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.336. \frac{\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \cos 84^\circ \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cos 25^\circ} = 1.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \cos 84^\circ \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cos 25^\circ} = \\ & = \frac{\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \cos(90^\circ - 6^\circ) \cos(90^\circ - 66^\circ)}{\cos 65^\circ \cos 5^\circ + \cos(90^\circ - 5^\circ) \cos(90^\circ - 65^\circ)} = \\ & = [\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)] = \frac{\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \sin 66^\circ \sin 6^\circ}{\cos 65^\circ \cos 5^\circ + \sin 65^\circ \sin 5^\circ} = \\ & = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ} = 1. \end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.337. \sin^2 70^\circ \sin^2 50^\circ \sin^2 10^\circ = \frac{1}{64}.$$

*Решение.*

$$\sin^2 70^\circ \sin^2 50^\circ \sin^2 10^\circ = ((\sin 70^\circ \sin 50^\circ) \sin 10^\circ)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \right] = \\
&= \left( \frac{1}{2} (\cos 20^\circ - \cos 120^\circ) \sin 10^\circ \right)^2 = \\
&= \frac{1}{4} \left( \left( \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \right) \sin 10^\circ \right)^2 = \frac{1}{16} ((2 \cos 20^\circ + 1) \sin 10^\circ)^2 = \\
&= \frac{1}{16} (2 \sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 10^\circ)^2 = \\
&= \left[ \sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \right] = \\
&= \frac{1}{16} (\sin(-10^\circ) + \sin 30^\circ + \sin 10^\circ)^2 = \frac{1}{16} \left( -\sin 10^\circ + \frac{1}{2} + \sin 10^\circ \right)^2 = \\
&= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}.
\end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.338. \text{ а) } \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}; \text{ б) } \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\text{а) } \sin 15^\circ &= \sqrt{\sin^2 15^\circ} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \\
&= \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3}) \cdot 2}{4 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \\
&= \frac{(\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \cos 15^\circ &= \sqrt{\cos^2 15^\circ} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \\
 &= \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{3}) \cdot 2}{4 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{8}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \\
 &= \frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.
 \end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.339. \text{ а) } \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}; \text{ б) } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

*Решение.*

$$\text{а) } \cos 36^\circ = \sin 54^\circ \Leftrightarrow \cos 2(18^\circ) = \sin 3(18^\circ).$$

Отсюда получаем:

$$1 - 2\sin^2 18^\circ = 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 18^\circ - 2\sin^2 18^\circ - 3\sin 18^\circ + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1) = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $\sin 18^\circ$ , имеем:

$$1) \sin 18^\circ = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} < 0, \emptyset, \text{ т.к. } 18^\circ \in (0^\circ; 90^\circ) \text{ и } \sin 18^\circ > 0;$$

$$\begin{aligned}
 2) \sin 18^\circ &= \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \text{ тогда } \cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2 = \\
 &= 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{2\sqrt{5} + 2}{8} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.
 \end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$\text{б) } \sin 36^\circ = \cos 54^\circ \Leftrightarrow 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3, 2\sin 18^\circ = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ = 1 \Leftrightarrow 4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$\left(2\sin 18^\circ + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow 1) 2\sin 18^\circ + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \sin 18^\circ = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \emptyset;$$

$$2) 2\sin 18^\circ + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

**Равенство справедливо.**

$$3.340. \operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ.$$

*Решение.*

$$\operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ = \frac{\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ}{\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ} =$$

$$= \left[ \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)); \right.$$

$$\left. \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \right] = \frac{\cos 10^\circ \cdot \frac{1}{2} (\cos 20^\circ + \cos 120^\circ)}{\sin 10^\circ \cdot \frac{1}{2} (\cos 20^\circ - \cos 120^\circ)} =$$

$$= \frac{\cos 10^\circ \left( \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \right)}{\sin 10^\circ \left( \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \right)} = \frac{\cos 10^\circ (2 \cos 20^\circ - 1)}{\sin 10^\circ (2 \cos 20^\circ + 1)} =$$

$$= \frac{2 \cos 10^\circ \cos 20^\circ - \cos 10^\circ}{2 \sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 10^\circ} =$$

$$= \left[ \sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \right] = \frac{\cos 10^\circ + \cos 30^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ + \sin 30^\circ - \sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \operatorname{ctg} 30^\circ.$$

**Равенство справедливо.**

$$3.341. \frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ} = 3.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{(\sin 20^\circ \sin 40^\circ)(\sin 60^\circ \sin 80^\circ)}{(\sin 10^\circ \sin 30^\circ)(\sin 50^\circ \sin 70^\circ)} \left[ \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \right] = \\ & = \frac{(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)(\cos 20^\circ - \cos 140^\circ)}{(\cos 20^\circ - \cos 40^\circ)(\cos 20^\circ - \cos 120^\circ)} = \\ & = \frac{\left(\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\right)(\cos 20^\circ - \cos(180^\circ - 40^\circ))}{(\cos 20^\circ - \cos 40^\circ)\left(\cos 20^\circ + \frac{1}{2}\right)} = \\ & = \frac{(2\cos 20^\circ - 1)(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ)}{(\cos 20^\circ - \cos 40^\circ)(2\cos 20^\circ + 1)} = \\ & = \frac{2\cos^2 20^\circ + 2\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 20^\circ - \cos 40^\circ}{2\cos^2 20^\circ + \cos 20^\circ - 2\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \cos 40^\circ} = \\ & = \left[ \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \right] = \\ & = \frac{2\cos^2 20^\circ + \cos 20^\circ + \cos 60^\circ - \cos 20^\circ - \cos 40^\circ}{2\cos^2 20^\circ + \cos 20^\circ - \cos 60^\circ - \cos 20^\circ - \cos 40^\circ} = \\ & = \frac{2\cos^2 20^\circ + \frac{1}{2} - \cos 2(20^\circ)}{2\cos^2 20^\circ - \frac{1}{2} - \cos 2(20^\circ)} = \frac{2\cos^2 20^\circ + \frac{1}{2} - 2\cos^2 20^\circ + 1}{2\cos^2 20^\circ - \frac{1}{2} - 2\cos^2 20^\circ} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.342. \sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{16}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & (\sin 10^\circ \sin 30^\circ)(\sin 50^\circ \sin 70^\circ) = \\ & = \left[ \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 40^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 120^\circ) = \\
&= \frac{1}{4}(\cos 20^\circ - \cos 40^\circ) \left( \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}(\cos 20^\circ - \cos 40^\circ)(2 \cos 20^\circ + 1) = \\
&= \frac{1}{8}(2 \cos^2 20^\circ + \cos 20^\circ - 2 \cos 40^\circ \cos 20^\circ - \cos 40^\circ) = \\
&= \left[ \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \right] = \\
&= \frac{1}{8}(2 \cos^2 20^\circ + \cos 20^\circ - \cos 20^\circ - \cos 60^\circ - \cos 40^\circ) = \\
&= \frac{1}{8} \left( 2 \cos^2 20^\circ - \frac{1}{2} - \cos 2(20^\circ) \right) = \frac{1}{8} \left( 2 \cos^2 20^\circ - \frac{1}{2} - 2 \cos^2 20^\circ + 1 \right) = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.343. \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&(\sin 20^\circ \sin 40^\circ)(\sin 60^\circ \sin 80^\circ) = \\
&= \left[ \sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \right] = \\
&= \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 140^\circ) = \\
&= \frac{1}{4} \left( \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \right) (\cos 20^\circ - \cos(180^\circ - 40^\circ)) = \\
&= \frac{1}{8}(2 \cos 20^\circ - 1)(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ) = \\
&= \frac{1}{8}(2 \cos^2 20^\circ + 2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 20^\circ - \cos 40^\circ) = \\
&= \left[ \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{8} (2 \cos^2 20^\circ + \cos 20^\circ + \cos 60^\circ - \cos 20^\circ - \cos 40^\circ) = \\
 &= \frac{1}{8} \left( 2 \cos^2 20^\circ + \frac{1}{2} - \cos 2(20^\circ) \right) = \frac{1}{8} \left( 2 \cos^2 20^\circ + \frac{1}{2} - 2 \cos^2 20^\circ + 1 \right) = \frac{3}{16}.
 \end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.344. \sin \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} &= [\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x] = \\
 &= 3 \sin \frac{\pi}{10} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} = 2 \sin \frac{\pi}{10} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{10} = \\
 &= 2 \sin \frac{\pi}{10} \left( \sin^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{\pi}{10} - 2 \sin^2 \frac{\pi}{10} \right) = \\
 &= 2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{2\pi}{10} = 2 \sin 18^\circ \cos 36^\circ = x.
 \end{aligned}$$

Используя равенства  $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$  и  $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$  (см. пример

$$\text{№ 3.339 а) и б)), имеем } x = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Равенство справедливо.

$$3.345. \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} = -\frac{1}{2}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} &= \\
 &= \cos 36^\circ + \cos 72^\circ + \cos 144^\circ + \cos 216^\circ = \\
 &= \cos 36^\circ + \cos(90^\circ - 18^\circ) + \cos(180^\circ - 36^\circ) + \cos(270^\circ - 54^\circ) = \\
 &= \cos 36^\circ + \sin 18^\circ - \cos 36^\circ - \sin 54^\circ = \sin 18^\circ - \sin 54^\circ = \sin 18^\circ - \sin 3(18^\circ) = \\
 &= [\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sin 18^\circ - 3 \sin 18^\circ + 4 \sin^3 18^\circ = 4 \sin^3 18^\circ - 2 \sin 18^\circ = \\
&= 2 \sin 18^\circ (2 \sin^2 18^\circ - 1) = -2 \sin 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ) = -2 \sin 18^\circ \cos 36^\circ = \\
&= \left[ \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \text{ и } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \text{ (см. № 3.339 а) и б)} \right] = \\
&= -2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.346. \operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 50^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{8}{\sqrt{3}} \cos 20^\circ.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 50^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ &= \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} + \frac{\cos 50^\circ}{\sin 50^\circ} + \frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} = \\
&= \frac{\cos^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ}{\sin 60^\circ \cos 60^\circ} + \frac{\cos^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ}{\sin 50^\circ \cos 50^\circ} = \\
&= \frac{1}{\sin 60^\circ \cos 60^\circ} + \frac{1}{\sin 50^\circ \cos 50^\circ} = \frac{2}{2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ} + \frac{2}{2 \sin 50^\circ \cos 50^\circ} = \\
&= \frac{2}{\sin 120^\circ} + \frac{2}{\sin 100^\circ} = \frac{2(\sin 100^\circ + \sin 120^\circ)}{\sin 120^\circ \sin 100^\circ} = \\
&= \left[ \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \\
&= \frac{4 \sin 110^\circ \cos 10^\circ}{\sin 120^\circ \sin(90^\circ + 10^\circ)} = \frac{4 \sin(90^\circ + 20^\circ) \cos 10^\circ}{\sin 120^\circ \cos 10^\circ} = \frac{4 \cos 20^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \cos 20^\circ.
\end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.347. 8 \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} = 1.$$

*Решение.*

$$8 \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} = 8 \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{8 \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{4 \cos 80^\circ \cos 40^\circ (2 \cos 20^\circ \sin 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \\
&= \frac{4 \cos 80^\circ \cos 40^\circ \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2 \cos 80^\circ (2 \cos 40^\circ \sin 40^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{2 \cos 80^\circ \sin 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \\
&= \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 1.
\end{aligned}$$

Равенство справедливо.

**3.348.**  $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 8.$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = \\
&= (\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ) + (\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ) - (\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 27^\circ) = \\
&= \left( \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} + \frac{\cos 9^\circ}{\sin 9^\circ} \right) + \left( \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} \right) - \left( \frac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} + \frac{\cos 27^\circ}{\sin 27^\circ} \right) = \\
&= \frac{\sin^2 9^\circ + \cos^2 9^\circ}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ} + \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} - \frac{\sin^2 27^\circ + \cos^2 27^\circ}{\sin 27^\circ \cos 27^\circ} = \\
&= \frac{1}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ} + \frac{1}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} - \frac{1}{\sin 27^\circ \cos 27^\circ} = \\
&= \frac{2}{2 \sin 9^\circ \cos 9^\circ} + \frac{2}{2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ} - \frac{2}{2 \sin 27^\circ \cos 27^\circ} = \\
&= \frac{2}{\sin 18^\circ} + \frac{2}{\sin 30^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} + \frac{2}{1} - \frac{2}{\sin 3(18^\circ)} = \\
&= \frac{2}{\sin 18^\circ} + 4 - \frac{2}{\sin 3(18^\circ)} = \left[ \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \right] = \\
&= \frac{2}{\sin 18^\circ} + 4 - \frac{2}{3 \sin 18^\circ - 4 \sin^3 18^\circ} = \frac{1}{\sin 18^\circ} + 4 - \frac{2}{3 \sin 18^\circ - 4(\sin 18^\circ)^3} = \\
&= \left[ \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ (см. № 3.339 б)} \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{5}-1} + 4 - \frac{2}{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{4} - \frac{4(\sqrt{5}-1)^3}{64}} = \\
&= \frac{8}{\sqrt{5}-1} + 4 - \frac{128}{48(\sqrt{5}-1) - 4(8\sqrt{5}-16)} = \frac{8}{\sqrt{5}-1} + 4 - \frac{128}{16\sqrt{5}+16} = \\
&= \frac{8}{\sqrt{5}-1} + 4 - \frac{8}{\sqrt{5}+1} = \frac{8(\sqrt{5}+1) - 8(\sqrt{5}-1)}{5-1} + 4 = 8.
\end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.349. \frac{\sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(\alpha - \frac{5}{2}\pi\right)} = 1.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(\alpha - \frac{5}{2}\pi\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)} = \\
&= \left[ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}, x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right] = \frac{\cos \alpha \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}}{1 + \sin \alpha} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\cos \alpha \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \sin \alpha} = 1.$$

Равенство справедливо.

$$3.350. \cos 70^\circ + 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2 \cos^2 35^\circ.$$

*Решение.*

$$\cos 70^\circ + 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ =$$

$$\begin{aligned}
&= \cos 2(35^\circ) + \frac{8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \\
&= \cos 2(35^\circ) + \frac{4(2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ) \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \\
&= 2 \cos^2 35^\circ - 1 + \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \\
&= 2 \cos^2 35^\circ - 1 + \frac{2(2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ) \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \\
&= 2 \cos^2 35^\circ - 1 + \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \cos^2 35^\circ - 1 + \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \\
&= 2 \cos^2 35^\circ - 1 + \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = 2 \cos^2 35^\circ - 1 + \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \\
&= 2 \cos^2 35^\circ - 1 + 1 = 2 \cos^2 35^\circ.
\end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$\mathbf{3.351.} \quad 1 - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - 3\alpha\right) - \sin^2 \frac{3}{2}\alpha + \cos^2 \frac{3}{2}\alpha = 2\sqrt{2} \cos \frac{3}{2}\alpha \sin\left(\frac{3\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
&1 - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - 3\alpha\right) - \sin^2 \frac{3}{2}\alpha + \cos^2 \frac{3}{2}\alpha = \\
&= 1 + \sin 3\alpha - \sin^2 \frac{3\alpha}{2} + \cos^2 \frac{3\alpha}{2} = \sin 3\alpha + 2 \cos^2 \frac{3\alpha}{2} = \\
&= \sin 2\left(\frac{3\alpha}{2}\right) + 2 \cos^2 \frac{3\alpha}{2} = 2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} + 2 \cos^2 \frac{3\alpha}{2} = \\
&= 2 \cos \frac{3\alpha}{2} \left(\sin \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{3\alpha}{2}\right) = 2 \cos \frac{3\alpha}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}\right) = \\
&= 2\sqrt{2} \cos \frac{3\alpha}{2} \left(\sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\pi}{4}\right) = \\
&= [\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x + y)] = 2\sqrt{2} \cos \frac{3\alpha}{2} \sin\left(\frac{3\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.352. \frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi - 4\alpha) - \cos\left(\frac{5}{2}\pi + 6\alpha\right)}{4\sin(5\pi - 3\alpha)\cos(\alpha - 2\pi)} = \cos 2\alpha.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi - 4\alpha) - \cos\left(\frac{5}{2}\pi + 6\alpha\right)}{4\sin(5\pi - 3\alpha)\cos(\alpha - 2\pi)} = \\ & = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + \sin(3\pi - 4\alpha) - \cos\left(\frac{5}{2}\pi + 6\alpha\right)}{4\sin(5\pi - 3\alpha)\cos(2\pi - \alpha)} = \\ & = \frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha}{4\sin 3\alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha) + \sin 2(3\alpha)}{4\sin 3\alpha \cos \alpha} = \\ & = \left[ \sin x + \sin y = 2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \sin 2x = 2\sin x \cos x \right] = \\ & = \frac{2\sin 3\alpha \cos \alpha + 2\sin 3\alpha \cos 3\alpha}{4\sin 3\alpha \cos \alpha} = \\ & = \frac{2\sin 3\alpha(\cos \alpha + \cos 3\alpha)}{4\sin 3\alpha \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha} = \\ & = \left[ \cos x + \cos y = 2\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \frac{2\cos 2\alpha \cos \alpha}{2\cos \alpha} = \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.353. \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} &= \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \\ &= \frac{2 \cdot 2(\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ)}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \end{aligned}$$

$$= [\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y); 2 \sin x \cos y = \sin 2x] = \\ = \frac{4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4.$$

Равенство справедливо.

$$3.354. \cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \sin 30^\circ.$$

*Решение.*

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \\ = \left[ \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}; \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ (см. № 3.339 а) и б)} \right] = \\ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ.$$

Равенство справедливо.

Вычислить: (3.355—3.367):

$$3.355. \sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}.$$

*Решение.*

$$\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \\ = \left( \sin^2 \frac{\pi}{8} \right)^2 + \left( \cos^2 \frac{3\pi}{8} \right)^2 + \left( \sin^2 \frac{5\pi}{8} \right)^2 + \left( \cos^2 \frac{7\pi}{8} \right)^2 = \\ = \left( \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} \right)^2 + \left( \frac{1 + \cos \frac{3\pi}{4}}{2} \right)^2 + \left( \frac{1 - \cos \frac{5\pi}{4}}{2} \right)^2 + \left( \frac{1 + \cos \frac{7\pi}{4}}{2} \right)^2 = \\ = \left( \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} \right)^2 + \left( \frac{1 + \cos \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right)}{2} \right)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1 - \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)}{2} \right)^2 + \left( \frac{1 + \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)}{2} \right)^2 = \\
& = \left( \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2} \right)^2 + \left( \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2} \right)^2 + \left( \frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2} \right)^2 + \left( \frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2} \right)^2 = \\
& = 2 \left( \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2} \right)^2 + 2 \left( \frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2} \right)^2 = 2 \left( \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \right)^2 + 2 \left( \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \right)^2 = \\
& = 2 \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \right)^2 + 2 \left( \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{8} + \frac{4 + 4\sqrt{2} + 2}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{3}{2}$ .

3.356.  $\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ &= (\sin 20^\circ \cos 10^\circ)(\sin 60^\circ \cos 50^\circ) = \\
&= \left[ \sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \right] = \\
&= \frac{1}{2}(\sin 10^\circ + \sin 30^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\sin 10^\circ + \sin 110^\circ) = \\
&= \frac{1}{4} \left( \sin 10^\circ + \frac{1}{2} \right) \cdot (\sin 10^\circ + \sin(90^\circ + 20^\circ)) = \\
&= \frac{1}{8} (2\sin 10^\circ + 1)(\sin 10^\circ + \cos 20^\circ) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} (2 \sin^2 10^\circ + 2 \sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 10^\circ + \cos 20^\circ) = \\
&= \frac{1}{8} (2 \sin^2 10^\circ + \sin(-10^\circ) + \sin 30^\circ + \sin 10^\circ + 1 - 2 \sin^2 10^\circ) = \\
&= \frac{1}{8} \left( 2 \sin^2 10^\circ - \sin 10^\circ + \frac{1}{2} + \sin 10^\circ + 1 - 2 \sin^2 10^\circ \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{16}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{3}{16}$ .

3.357.  $\cos \frac{3\pi}{5} \cos \frac{6\pi}{5}$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
\cos \frac{3\pi}{5} \cos \frac{6\pi}{5} &= \cos \frac{5\pi - 2\pi}{5} \cos \frac{5\pi + \pi}{5} = \cos \left( \pi - \frac{2\pi}{5} \right) \cos \left( \pi + \frac{\pi}{5} \right) = \\
&= -\cos \frac{2\pi}{5} \cdot \left( -\cos \frac{\pi}{5} \right) = \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = \left( 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 \right) \cos \frac{\pi}{5} = \\
&= 2 \cos^3 \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5} = 2(\cos 36^\circ)^3 - \cos 36^\circ = \\
&= \left[ \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \text{ (см. № 3.339 а)} \right] = 2 \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \right)^3 - \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{1}{4}$ .

3.358.  $\frac{\cos 68^\circ \cos 8^\circ - \cos 82^\circ \cos 22^\circ}{\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 67^\circ \cos 37^\circ}$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos 68^\circ \cos 8^\circ - \cos 82^\circ \cos 22^\circ}{\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 67^\circ \cos 37^\circ} = \\
&= \frac{\cos 68^\circ \cos 8^\circ - \cos(90^\circ - 8^\circ) \cos(90^\circ - 68^\circ)}{\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos(90^\circ - 23^\circ) \cos(90^\circ - 53^\circ)} = \\
&= \frac{\cos 68^\circ \cos 8^\circ - \sin 68^\circ \sin 8^\circ}{\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \sin 53^\circ \sin 23^\circ} = [\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y)] =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\cos 76^\circ}{\cos 76^\circ} = 1.$$

Ответ: 1.

$$3.359. \frac{\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ}{\cos 69^\circ \cos 9^\circ + \cos 81^\circ \cos 21^\circ}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ}{\cos 69^\circ \cos 9^\circ + \cos 81^\circ \cos 21^\circ} = \\ &= \frac{\cos(90^\circ - 20^\circ) \cos 10^\circ + \cos(90^\circ - 10^\circ) \cos 20^\circ}{\cos(90^\circ - 21^\circ) \cos 9^\circ + \cos(90^\circ - 9^\circ) \cos 21^\circ} = \\ &= \frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \sin 10^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 21^\circ \sin 9^\circ} = [\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x + y)] = \\ &= \frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

$$3.360. \frac{\cos 67^\circ \cos 7^\circ - \cos 83^\circ \cos 23^\circ}{\cos 128^\circ \cos 68^\circ - \cos 38^\circ \cos 22^\circ} - \operatorname{tg} 164^\circ.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 67^\circ \cos 7^\circ - \cos 83^\circ \cos 23^\circ}{\cos 128^\circ \cos 68^\circ - \cos 38^\circ \cos 22^\circ} - \operatorname{tg} 164^\circ = \\ &= \frac{\cos 67^\circ \cos(90^\circ - 83^\circ) - \cos 83^\circ \cos(90^\circ - 67^\circ)}{\cos(90^\circ + 38^\circ) \cos(90^\circ - 22^\circ) - \cos 38^\circ \cos 22^\circ} - \operatorname{tg}(180^\circ - 16^\circ) = \\ &= \frac{\sin 83^\circ \cos 67^\circ - \cos 83^\circ \sin 67^\circ}{-\sin 38^\circ \sin 22^\circ - \cos 38^\circ \cos 22^\circ} + \operatorname{tg} 16^\circ = \\ &= \frac{\sin 83^\circ \cos 67^\circ - \cos 83^\circ \sin 67^\circ}{-(\cos 38^\circ \cos 22^\circ + \sin 38^\circ \sin 22^\circ)} + \operatorname{tg} 16^\circ = \\ &= [\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y); \\ & \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)] = \\ &= \frac{\sin 16^\circ}{-\cos 16^\circ} + \operatorname{tg} 16^\circ = -\operatorname{tg} 16^\circ + \operatorname{tg} 16^\circ = 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0.



$$3.361. \frac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ}$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \frac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ} = \\ & = \frac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos(180^\circ - 22^\circ) \cos(90^\circ + 8^\circ)}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos(180^\circ - 23^\circ) \cos(90^\circ + 7^\circ)} = \\ & = \frac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 22^\circ \sin 8^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 23^\circ \sin 7^\circ} = \\ & = \left[ \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x + y) \right] = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 1. \end{aligned}$$

*Ответ:* 1.

$$3.362. \frac{6 \sin \alpha - 7 \cos \alpha + 1}{8 \sin \alpha + 9 \cos \alpha - 1}, \text{ если } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 4.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{6 \sin \alpha - 7 \cos \alpha + 1}{8 \sin \alpha + 9 \cos \alpha - 1} &= \left[ \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \right] = \\ &= \frac{12 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 7 \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) + 1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 16 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 9 \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) - 1} = \\ &= \frac{12 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 7 + 7 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{16 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 9 - 9 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{8 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 12 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 6}{-10 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 16 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 8} = \frac{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 6 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 3}{-5 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 8 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 4} = \frac{64 + 24 - 3}{-80 + 32 + 4} = -\frac{85}{44}, \end{aligned}$$

так как  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 4$ .

Ответ:  $-\frac{85}{44}$ .

$$3.363. \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - x\right), \text{ если } \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{3}{4}.$$

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - x\right) = \operatorname{tg}\left(\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(x - \frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \frac{11\pi}{4}\right) =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(3\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right)\right) =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \left[ \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}, x, y, x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \right.$$

$$\left. \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y}{1 + \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}, x, y, x - y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right] =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 1}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = \left[ \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{3}{4} \right] =$$

$$= \frac{\frac{3}{4} - 1}{1 + \frac{3}{4}} - \frac{\frac{3}{4} + 1}{1 - \frac{3}{4}} = -\frac{1}{7} - 7 = -\frac{50}{7}.$$

Ответ:  $-\frac{50}{7}$ .

3.364.  $\sin \frac{\alpha+\beta}{2}$  и  $\cos \frac{\alpha+\beta}{2}$ , если  $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{21}{65}$ ;

$$\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{27}{65}; \quad \frac{5}{2}\pi < \alpha < 3\pi \text{ и } -\frac{\pi}{2} < \beta < 0.$$

Решение.

Из условия имеем:

$$\begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac{21}{65}, \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac{27}{65} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{-\frac{21}{65}}{-\frac{27}{65}}, \quad \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{\sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{49}{81},$$

$$\frac{1 - \cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{49}{81}, \quad \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2}} - 1 = \frac{49}{81}, \quad \cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{81}{130} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\alpha+\beta}{2} = \pm \sqrt{\frac{81}{130}}; \quad \cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{81}{130},$$

$$\sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} = 1 - \frac{81}{130} = \frac{49}{130}, \quad \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = \pm \sqrt{\frac{49}{130}}.$$

Используя условие задачи, определим, в какой четверти находится

угол  $\frac{\alpha+\beta}{2}$ . Имеем:

$$\begin{array}{l} \frac{5\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{2} \\ + \\ -\frac{\pi}{4} < \frac{\beta}{2} < 0 \\ \hline \pi < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{3\pi}{2} \end{array}$$

Таким образом, угол  $\frac{\alpha+\beta}{2}$  лежит в третьей четверти единичного

круга. Отсюда  $\sin \frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{7}{\sqrt{130}}$ ,  $\cos \frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{9}{\sqrt{130}}$ .

Ответ:  $\sin \frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{7}{\sqrt{130}}$  и  $\cos \frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{9}{\sqrt{130}}$ .

3.365.  $\cos \frac{\alpha-\beta}{2}$ , если  $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{27}{65}$ ;  $\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{7}{9}$ ;  $\frac{5}{2}\pi < \alpha < 3\pi$

и  $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ .

Решение.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac{27}{65}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{\sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{49}{81},$$

$$\frac{\sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}{1 - \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{49}{81} \Rightarrow \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = \pm \frac{7}{\sqrt{130}}.$$

Так как  $\frac{5}{2}\pi < \alpha < 3\pi$  и  $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ , то  $\pi < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{3\pi}{2}$ , т.е. угол  $\frac{\alpha+\beta}{2}$

находится в третьей четверти единичного круга и  $\sin \frac{\alpha+\beta}{2} < 0$ .

$$\text{Отсюда } \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{7}{\sqrt{130}} \Rightarrow -\frac{14}{\sqrt{130}} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac{27}{65} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{27\sqrt{130}}{14 \cdot 65} = \frac{27\sqrt{130} \cdot \sqrt{130}}{14 \cdot 65 \cdot \sqrt{130}} = \frac{27 \cdot 130}{14 \cdot 65 \cdot \sqrt{130}} = \frac{27}{7\sqrt{130}}.$$

Ответ:  $\cos \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{27}{7\sqrt{130}}$ .

3.366.  $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$ , если  $\sin \alpha - \cos \alpha = n$ .

Решение.

$$\begin{aligned} \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha &= (\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ &= [\sin \alpha - \cos \alpha = n] = n(1 + \sin \alpha \cos \alpha) = \left[ \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1-n^2}{2} \right] = \\ &= n \left( 1 + \frac{1-n^2}{2} \right) = \frac{n(2+1-n^2)}{2} = \frac{n(3-n^2)}{2} = \frac{3n-n^3}{2}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{3n-n^3}{2}$ .

3.367.  $\frac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ .

Решение.

$$\frac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha} = \left[ \sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \right] =$$

$$= \frac{\frac{4\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{3 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\frac{8\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{5 - 5\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{4\operatorname{tg} \alpha - 3 + 3\operatorname{tg}^2 \alpha}{8\operatorname{tg} \alpha + 5 - 5\operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= [\operatorname{tg} \alpha = 3] = \frac{4 \cdot 3 - 3 + 3 \cdot 9}{8 \cdot 3 + 5 - 5 \cdot 9} = -\frac{9}{4}.$$

Ответ:  $-\frac{9}{4}$ .

Зная, что  $A, B, C$  — внутренние углы некоторого треугольника, доказать справедливость равенств (3.368—3.374):

3.368.  $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ .

Решение.

$$\begin{aligned}(\sin A + \sin B) + \sin C &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin C = \\&= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin(180^\circ - (A+B)) = \\&= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin(A+B) = \\&= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} = \\&= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 2 \sin \frac{180^\circ - C}{2} \cdot 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = \\&= 4 \sin \left( 90^\circ - \frac{C}{2} \right) \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.\end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.369. \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2}.$$

Решение.

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \left[ \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right.$$

$$\left. (\text{см. № 3.368}), \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right] =$$

$$= \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin C} =$$

$$= \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin(180^\circ - (A+B))} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin(A+B)} = \\
&= \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2}} = \\
&= \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right)} = \\
&= \frac{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A+B}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right)} = \frac{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{180^\circ - C}{2} \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \\
&= \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \left( 90^\circ - \frac{C}{2} \right) \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} = \\
&= \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2}.
\end{aligned}$$

Равенство справедливо.

**3.370.**  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
(\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C &= \left[ \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \\
&= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + \sin 2C = \\
&= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + \sin 2(180^\circ - (A+B)) = \\
&= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + \sin(360^\circ - 2(A+B)) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) - \sin 2(A+B) = \\
 &= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) - 2 \sin(A+B) \cos(A+B) = \\
 &= 2 \sin(A+B) (\cos(A-B) - \cos(A+B)) = 2 \sin C \cdot 2 \sin A \sin B = \\
 &= 4 \sin A \sin B \sin C.
 \end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.371. \frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin C}{\cos A \cos B} &= \frac{\sin(180^\circ - (A+B))}{\cos A \cos B} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \\
 &= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B} = \frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B} = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \\
 &= \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B.
 \end{aligned}$$

Равенство справедливо.

$$3.372. \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = -4 \cos \frac{3}{2} A \cos \frac{3}{2} B \cos \frac{3}{2} C.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C &= \left[ \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \\
 &= 2 \sin \frac{3A+3B}{2} \cos \frac{3A-3B}{2} + \sin 3C = \\
 &= 2 \sin \frac{3A+3B}{2} \cos \frac{3A-3B}{2} + \sin(540^\circ - 3(A+B)) = \\
 &= 2 \sin \frac{3A+3B}{2} \cos \frac{3A-3B}{2} + \sin(3A+3B) = \\
 &= 2 \sin \frac{3A+3B}{2} \cos \frac{3A-3B}{2} + 2 \sin \frac{3A+3B}{2} \cos \frac{3A+3B}{2} = \\
 &= 2 \sin \frac{3A+3B}{2} \left( \cos \frac{3A-3B}{2} + \cos \frac{3A+3B}{2} \right) = \\
 &= 2 \sin \frac{3(A+B)}{2} \left( \cos \frac{3A-3B}{2} + \cos \frac{3A+3B}{2} \right) =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= 2 \sin \frac{3(180^\circ - C)}{2} \cdot 2 \cos \frac{3A}{2} \cos \frac{3B}{2} = 4 \sin \left( 270^\circ - \frac{3C}{2} \right) \cos \frac{3A}{2} \cos \frac{3B}{2} = \\
 &= -4 \cos \frac{3C}{2} \cos \frac{3A}{2} \cos \frac{3B}{2} = -4 \cos \frac{3}{2} A \cos \frac{3}{2} B \cos \frac{3}{2} C.
 \end{aligned}$$

Равенство справедливо.

**3.373.**  $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C.$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 \sin 4A + \sin 4B + \sin 4C &= \left[ \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right] = \\
 &= 2 \sin(2A + 2B) \cos(2A - 2B) + \sin 4C = \\
 &= 2 \sin(2A + 2B) \cos(2A - 2B) + \sin 4(180^\circ - (A + B)) = \\
 &= 2 \sin(2A + 2B) \cos(2A - 2B) + \sin(720^\circ - 4(A + B)) = \\
 &= 2 \sin(2A + 2B) \cos(2A - 2B) - \sin 4(A + B) = \\
 &= 2 \sin(2A + 2B) \cos(2A - 2B) - 2 \sin(2A + 2B) \cos(2A + 2B) = \\
 &= 2 \sin(2A + 2B) (\cos(2A - 2B) - \cos(2A + 2B)) = \\
 &= 2 \sin 2(A + B) (\cos(2A - 2B) - \cos(2A + 2B)) = \\
 &= \left[ \cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2} \right] = 2 \sin 2(180^\circ - C) \cdot 2 \sin 2A \sin 2B = \\
 &= 4 \sin(360^\circ - 2C) \sin 2A \sin 2B = -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C.
 \end{aligned}$$

Равенство справедливо.

**3.374.**  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1.$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \left( \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \\
 &= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \left( \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{180^\circ - (A + B)}{2} =
 \end{aligned}$$

$$= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \left( \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right) \operatorname{tg} \left( 90^\circ - \frac{A+B}{2} \right) =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \left( \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right) \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} = \left[ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} \right] =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \frac{\cos \left( \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right)}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} =$$

$$= [\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y] =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} - \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + 1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 1.$$

Равенство справедливо.

**3.375.** Найти  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , если известно, что  $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ .

*Решение.*

$$\text{Пусть } \sin x + \cos x = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Так как } \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}, \text{ то}$$

$$\text{меем } \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2 = 0, \text{ откуда, решая это}$$

уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , находим  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$  или

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2.$$

Ответ:  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2$  или  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$ .

3.376. Зная, что  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = m$ , найти  $\frac{1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \alpha}$ .

Решение.

$$\frac{1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \alpha} = [1 - 2\sin^2 x = \cos 2x] = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} =$$

$$= \left[ \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \right] =$$

$$\frac{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = Z.$$

Используя значение  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = m$ , имеем  $Z = \frac{1 - m}{1 + m}$ .

Ответ:  $\frac{1-m}{1+m}$ .

3.377. Найти значение выражения  $\frac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$ , если известно, что

$$\sin \alpha + \cos \alpha = m.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} &= \frac{1+\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\frac{\cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}} \\ &= \frac{2 \cos^2 \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} = \cos \alpha \left( 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \alpha \sin \alpha. \end{aligned}$$

Возведя обе части равенства  $\sin \alpha + \cos \alpha = m$  в квадрат, получим

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = m^2, \text{ откуда } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

Ответ:  $\frac{m^2 - 1}{2}$ .

3.378. Известно, что  $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{p}{q}$ . Найти  $\operatorname{ctg} \beta$ .

Решение.

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} = \frac{p}{q}.$$

После деления числителя и знаменателя левой части этого равенства на  $\cos \alpha \sin \beta \neq 0$ , имеем

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1} = \frac{p}{q}; \quad q \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + q = p \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - p,$$

$$p \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - q \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = p + q; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot (p - q) = p + q,$$

$$\text{откуда } \operatorname{ctg}\beta = \frac{p+q}{(p-q)\operatorname{tg}\alpha} = \frac{p+q}{p-q} \cdot \operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\text{Ответ: } \frac{p+q}{(p-q)\operatorname{tg}\alpha} = \frac{p+q}{p-q} \cdot \operatorname{ctg}\alpha.$$

**3.379.** Зная, что  $\sin \alpha + \cos \alpha = m$ , найти  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = \\ &= (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= \left( (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right) - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 1 - \frac{3}{4} (4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{4} (\sin 2\alpha)^2 = \\ &= \left[ \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = m^2, \sin 2\alpha = m^2 - 1 \right] = \\ &= 1 - \frac{3}{4} (m^2 - 1)^2 = \frac{4 - 3(m^4 - 2m^2 + 1)}{4} = \\ &= \frac{4 - 3m^4 + 6m^2 - 3}{4} = \frac{1 + 6m^2 - 3m^4}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1 + 6m^2 - 3m^4}{4}.$$

**3.380.** Известно, что  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{q}$ . Найти  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$  и  $\operatorname{tg} 2\alpha$ .

*Решение.*

По формулам универсальной тригонометрической подстановки име

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi; \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

По условию  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{q}$ , поэтому  $\sin 2\alpha = \frac{2p}{q} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$ ;

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \frac{p^2}{q^2}}{1 + \frac{p^2}{q^2}} = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}; \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2p}{1 - \frac{p^2}{q^2}} = \frac{2pq}{q^2 - p^2}.$$

Ответ:  $\sin 2\alpha = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$ ;  $\cos 2\alpha = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}$ ;  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2pq}{q^2 - p^2}$ .

3.381. Найти  $\cos 2\alpha$ , если известно, что  $2\operatorname{ctg}^2\alpha + 7\operatorname{ctg}\alpha + 3 = 0$  и число  $\alpha$  удовлетворяет неравенствам: а)  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$ ; б)  $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$ .

Решение.

Решив уравнение  $2\operatorname{ctg}^2\alpha + 7\operatorname{ctg}\alpha + 3 = 0$  как квадратное относительно

но  $\operatorname{ctg}\alpha$ , имеем  $(\operatorname{ctg}\alpha)_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4}$ , откуда  $\operatorname{ctg}\alpha = -3$ ,

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$  или  $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{tg}\alpha = -2$ . В случае а)  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$ ,

$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2} < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$ ,  $-\infty < \operatorname{tg}\alpha < -1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -2$ . Тогда

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}.$$

В случае б)  $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$ ,  $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg} 2\pi$ ,  $-1 < \operatorname{tg}\alpha < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$ . Тогда

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: а)  $-\frac{3}{5}$ ; б)  $\frac{4}{5}$ .

3.382. Найти  $\sin 2\alpha$ , если известно, что  $2\operatorname{tg}^2 \alpha - 7\operatorname{tg} \alpha + 3 = 0$  и число

$\alpha$  удовлетворяет неравенствам: а)  $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$ ; б)  $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

Решение.

Решив уравнение  $2\operatorname{tg}^2 \alpha - 7\operatorname{tg} \alpha + 3 = 0$  как квадратное относительно

$\operatorname{tg} \alpha$ , получим  $(\operatorname{tg} \alpha)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$  или  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ .

В случае а)  $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$ ,  $\operatorname{tg} \pi < \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$ ,  $0 < \operatorname{tg} \alpha < 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ . Тогда

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

В случае б)  $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} < \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}$ ,  $1 < \operatorname{tg} \alpha < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 3$ . Тогда

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 3}{1 + 9} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: а)  $\frac{4}{5}$ ; б)  $\frac{3}{5}$ .

3.383. Известно, что  $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{p}{q}$ . Найти  $\operatorname{tg} \beta$ .

Решение.

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta} = \frac{p}{q}.$$

Разделив числитель и знаменатель левой части этого равенства на  $\cos\alpha \cos\beta \neq 0$ , получим

$$\frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{p}{q},$$

$$q - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = p + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta; \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = q - p,$$

$$(p + q)\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = q - p \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \frac{q - p}{(q + p)\operatorname{tg}\alpha} = \frac{q - p}{q + p} \operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ:  $\frac{q - p}{q + p} \operatorname{ctg}\alpha.$

3.384. Доказать, что выражение 
$$\frac{1 - 2\sin^2\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \sqrt{3}\cos\left(2\alpha + \frac{3}{2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)}$$

не зависит от  $\alpha$ , где  $\alpha \neq \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{12}$ .

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{1 - 2\sin^2\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \sqrt{3}\cos\left(2\alpha + \frac{3}{2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)} = \\ & = \frac{1 - 2\left(-\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\right)^2 + \sqrt{3}\cos\left(\frac{3}{2}\pi + 2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)} = \\ & = \frac{1 - 2\cos^2\alpha + \sqrt{3}\sin 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{-(2\cos^2\alpha - 1) + \sqrt{3}\sin 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)} = \frac{-\cos 2\alpha + \sqrt{3}\sin 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)} = \\
&= \frac{-2\left(\frac{1}{2}\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)} = \frac{-2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha - \cos\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)} = \\
&= \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)} = -2
\end{aligned}$$

Ответ: -2.

3.385. Доказать, что  $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ , если  $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= \left[\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}, x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right] = \\
&= \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} + \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \\
&= \frac{\sin\frac{2\pi-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \\
&= \frac{\sin\left(\pi - \frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2} \left( \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \\
&= \frac{\sin \frac{\gamma}{2} \left( \cos \frac{2\pi - (\alpha + \beta)}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \\
&= \frac{\sin \frac{\gamma}{2} \left( \cos \left( \pi - \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \right) + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \\
&= \frac{\sin \frac{\gamma}{2} \left( -\cos \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \\
&= \frac{\sin \frac{\gamma}{2} \left( -\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \\
&= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, \text{ что и требовалось доказать.}
\end{aligned}$$

**3.386.** Доказать, что выражение

$$\operatorname{tg} \left( 2\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left( 4\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left( 4\alpha + \frac{5}{2} \pi \right) \text{ не зависит от } \alpha, \text{ если}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{8} (4n + 3).$$

*Решение.*

$$\operatorname{tg} \left( 2\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left( 4\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left( 4\alpha + \frac{5}{2} \pi \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)+\cos\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)= \\
&= -\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)}\cdot\cos 4\alpha+\sin 4\alpha=-\frac{1+\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}\cdot\cos 4\alpha+\sin 4\alpha= \\
&= -1-\sin 4\alpha+\sin 4\alpha=-1.
\end{aligned}$$

Ответ: -1.

3.387. Доказать, что выражение  $\frac{1-\cos^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\sin^4\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$  не

зависит от  $\alpha$ , если  $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
&\frac{1-\cos^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\sin^4\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}= \\
&= \frac{1-\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)^4-\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\right)^4}{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha\right)-1}= \\
&= \frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-1}= \\
&= \frac{1-\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)}{\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}= \\
&= \frac{1-\left(\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)}{\left(\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1 - 1 + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1} = \frac{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{-3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = -\frac{2}{3}.$$

Ответ:  $-\frac{2}{3}$ .

**3.388.** Доказать, что выражение  $\sin(250^\circ + \alpha) \cos(200^\circ - \alpha) - \cos 240^\circ \times \cos(220^\circ - 2\alpha)$  не зависит от  $\alpha$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \sin(250^\circ + \alpha) \cos(200^\circ - \alpha) - \cos 240^\circ \cos(220^\circ - 2\alpha) = \\ & = \sin(270^\circ + (\alpha - 20^\circ)) \cos(180^\circ - (\alpha - 20^\circ)) - \\ & - \cos(270^\circ - 30^\circ) \cos(180^\circ - (2\alpha - 40^\circ)) = \\ & = -\cos(\alpha - 20^\circ)(-\cos(\alpha - 20^\circ)) - (-\sin 30^\circ)(-\cos(2\alpha - 40^\circ)) = \\ & = \cos^2(\alpha - 20^\circ) - \frac{1}{2} \cos 2(\alpha - 20^\circ) = \\ & = \cos^2(\alpha - 20^\circ) - \frac{1}{2}(2\cos^2(\alpha - 20^\circ) - 1) = \\ & = \cos^2(\alpha - 20^\circ) - \cos^2(\alpha - 20^\circ) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Число  $\frac{1}{2}$  не зависит от  $\alpha$ , что и требовалось доказать.

Ответ:  $\frac{1}{2}$ .

**3.389.** Доказать, что выражение  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \varphi + \cos^2(\alpha + \varphi) - 2 \cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha + \varphi)$  не зависит ни от  $\alpha$ , ни от  $\varphi$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha + \cos^2 \varphi + \cos^2(\alpha + \varphi) - 2 \cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha + \varphi) = \\ & = \cos^2 \alpha + \cos^2 \varphi + (\cos(\alpha + \varphi))^2 - 2 \cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha + \varphi) = \\ & = \cos^2 \alpha + \cos^2 \varphi + (\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi)^2 - 2 \cos \alpha \cos \varphi \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi - \\
& - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi + 2 \sin \alpha \cos \alpha \times \\
& \times \sin \varphi \cos \varphi = \cos^2 \alpha + \cos^2 \varphi + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi - \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi = \\
& = (\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi) + \cos^2 \varphi + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi = \\
& = \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \varphi) + \cos^2 \varphi + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi = \\
& = (\cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi) + \cos^2 \varphi = \\
& = \sin^2 \varphi (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1.
\end{aligned}$$

Число 1 не зависит ни от  $\alpha$ , ни от  $\varphi$ , что и требовалось доказать.

*Ответ:* 1.

**3.390.** Вывести формулу  $\cos(n+1)\alpha = 2\cos\alpha\cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha$ , где  $n$  — любое действительное число, и с ее помощью представить  $\cos 3\alpha$  и  $\cos 4\alpha$  в виде многочленов от  $\cos\alpha$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}
\cos(n+1)\alpha &= \cos(n\alpha + \alpha) = [\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y] = \\
&= \cos n\alpha \cos \alpha - \sin n\alpha \sin \alpha = 2 \cos n\alpha \cos \alpha - \cos n\alpha \cos \alpha - \sin n\alpha \sin \alpha = \\
&= 2 \cos n\alpha \cos \alpha - (\cos n\alpha \cos \alpha + \sin n\alpha \sin \alpha) = \\
&= 2 \cos n\alpha \cos \alpha - \cos(n\alpha - \alpha) = 2 \cos n\alpha \cos \alpha - \cos(n-1)\alpha; \\
\cos 3\alpha &= \cos(2+1)\alpha = 2 \cos \alpha \cos 2\alpha - \cos \alpha = \\
&= 2 \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) - \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha - \cos \alpha = \\
&= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \\
\cos 4\alpha &= \cos(3+1)\alpha = 2 \cos \alpha \cos 3\alpha - \cos 2\alpha = \\
&= 2 \cos \alpha (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) - (2 \cos^2 \alpha - 1) = \\
&= 8 \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha + 1 = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1.
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ ;  $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$ .

$$3.391. \text{ Доказать, что } 4 \sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos \frac{3\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} 4 \sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) &= \left[ \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \right] = \\ &= 2(\cos \alpha - \cos 60^\circ) = 2\left(\cos \alpha - \frac{1}{2}\right) = 2 \cos \alpha - 1 = 2\left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right) - 1 = \\ &= 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 - 1 = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 3 = \frac{\left(4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 3\right) \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{4 \cos^3 \frac{\alpha}{2} - 3 \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{3\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \text{ что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$

3.392. Дано, что  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin(\alpha + \beta)$ ;  $\alpha + \beta \neq 2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Найдите  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \text{По условию } \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin(\alpha + \beta) &\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \\ &= 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \end{aligned}$$

Так как  $\alpha + \beta \neq 2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), то  $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0$ .

Таким образом

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}, \\ &3 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Разделив обе части этого равенства на  $3 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \neq 0$ , получим

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{3}$ .

**3.393.** Показать, что если  $p$  постоянно, то функция

$$f(\alpha) = \frac{p \cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{p \sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha} \text{ также является постоянной.}$$

*Решение.*

Используя формулы  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$  и  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ , имеем

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{p \cos^3 \alpha - (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha)}{\cos \alpha} + \\ &+ \frac{p \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{p \cos^3 \alpha - 4 \cos^3 \alpha + 3 \cos \alpha}{\cos \alpha} + \\ &+ \frac{p \sin^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha (p \cos^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha + 3)}{\cos \alpha} + \\ &+ \frac{\sin \alpha (p \sin^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha + 3)}{\sin \alpha} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= p \cos^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha + 3 + p \sin^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha + 3 = \\
 &= (p \cos^2 \alpha + p \sin^2 \alpha) - (4 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha) + 6 = \\
 &= p(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 4(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \\
 &+ 6 = p - 4 + 6 = p + 2.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $f(a) = p + 2$ .

**3.394.** Дана функция  $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$ . Найти  $f(\alpha)$ , если известно, что  $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \cos^2 x \sin^2 x = \\
 &= 1 - 2 \cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{1}{2} (4 \cos^2 x \sin^2 x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x; \\
 f(\alpha) &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} (\sin 2\alpha)^2 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $f(\alpha) = \frac{7}{9}$ .

**3.395.** Доказать, что если  $\alpha + \beta = 60^\circ$  ( $\alpha > 0, \beta > 0$ ), то  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \leq \frac{1}{3}$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \leq \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))}{\frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))} \leq \frac{1}{3},
 \end{aligned}$$



$$\frac{(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))}{(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))} \leq \frac{1}{3}.$$

Так как  $\alpha + \beta = 60^\circ$ , то неравенство имеет вид

$$\frac{2\cos(\alpha - \beta) - 1}{2\cos(\alpha - \beta) + 1} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 4\cos(\alpha - \beta) \leq 4, \cos(\alpha - \beta) \leq 1 \quad (\cos(\alpha - \beta) \geq 0).$$

Последнее неравенство истинно. Что и требовалось доказать.

## ПРОГРЕССИИ

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

## Арифметическая прогрессия

*Арифметической прогрессией* называется последовательность, у которой задан первый член  $a_1$ , а каждый следующий член, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом  $d$ , называемым *разностью прогрессии*.

Если заданы первый член  $a_1$  и разность арифметической прогрессии  $d$ , то  $n$ -й член арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$a_n = a_1 + d(n-1). \quad (4.1)$$

Формула (4.1) называется *формулой общего члена арифметической прогрессии*.

## Свойства членов арифметической прогрессии

1. Каждый средний член арифметической прогрессии равен полусумме равноотстоящих от него членов:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, k = 2, 3, \dots, n-1. \quad (4.2)$$

2. В конечной арифметической прогрессии суммы членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны сумме крайних членов:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_k + a_{n-k+1} = \dots = 2a_1 + d(n-1). \quad (4.3)$$

## Сумма $n$ первых членов арифметической прогрессии

Сумма  $n$  первых членов арифметической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \quad (4.4)$$

Учитывая (4.3), т.е. что  $a_1 + a_n = 2a_1 + d(n-1)$ , формулу (4.4) можно записать в виде

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \quad (4.5)$$

## Геометрическая прогрессия

*Геометрической прогрессией* называется последовательность, у которой задан первый член  $b_1$ , а каждый следующий член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же постоянное для данной последовательности число  $q$ , называемое *знаменателем прогрессии*.

Если заданы первый член  $b_1$  и знаменатель геометрической прогрессии  $q$  то  $n$ -й член геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \quad (4.6)$$

Формула(4.6) называется *формулой общего члена геометрической прогрессии*.

## Свойства членов геометрической прогрессии

1. Квадрат каждого среднего члена геометрической прогрессии равен произведению равноотстоящих от него членов, т.е.

$$b_k^2 = b_{k-1} b_{k+1}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1. \quad (4.7)$$

2. В конечной геометрической прогрессии произведения членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны произведению крайних членов:

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = \dots = b_k \cdot b_{n-k+1} = \dots = b_1^2 \cdot q^{n-1}. \quad (4.8)$$

3. Произведение  $n$  первых членов геометрической прогрессии с поло-

жительными членами равно корню квадратному из  $n$ -й степени произведения ее крайних членов:

$$P_n = \sqrt{(b_1 \cdot b_n)^n}. \quad (4.9)$$

В общем случае

$$|P_n| = \sqrt{|b_1 \cdot b_n|^n}.$$

### Сумма $n$ первых членов геометрической прогрессии

Сумма  $n$  первых членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q} \quad (q \neq 1) \quad (4.10)$$

Учитывая (4.6), т.е. что  $b_n = b_1 q^{n-1}$ , формулу (4.10) можно представить в виде

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}. \quad (4.11)$$

### Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии

Бесконечный числовой ряд, образованный из членов геометрической прогрессии  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$  при  $|q| < 1$ , сходится, и его сумма  $S$  равна

$$S = \frac{b_1}{1 - q}. \quad (4.12)$$

Формулу (4.12) называют также *формулой суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии*.

**4.036.** Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов равна 189. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

*Решение.*

Из условия имеем

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 21, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 189, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 21, \\ b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 = 189, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 21, \\ b_1^2(1 + q^2 + q^4) = 189. \end{cases}$$

Поделив второе уравнение системы на первое  $\frac{b_1(q^4 + q^2 + 1)}{q^2 + q + 1} = 9$ , а

затем числитель этой дроби на знаменатель, получим  $b_1(q^2 - q + 1) = 9$ .

Система имеет вид

$$\begin{cases} b_1(q^2 + q + 1) = 21, \\ b_1(q^2 - q + 1) = 9, \end{cases} \Rightarrow \frac{21}{q^2 + q + 1} \cdot (q^2 - q + 1) = 9 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0,$$

откуда  $q_1 = \frac{1}{2}$ ,  $q_2 = 2$ . Тогда  $b_1 = 12$  или  $b_1 = 3$ .

*Ответ:* 1) 12,  $\frac{1}{2}$ ; 2) 3, 2.

**4.037.** Доказать, что любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое между любыми двумя членами, равноудаленными от него.

*Решение.*

Пусть  $a_k$  — любой член арифметической прогрессии, тогда  $a_{k-p}, a_{k+p}$  — два равноудаленных от него члена.

По формуле общего члена находим

$$a_{k-p} = a_1 + d(k-p-1),$$

$$a_{k+p} = a_1 + d(k+p-1).$$

Складывая эти равенства, получим

$$a_{k-p} + a_{k+p} = 2a_1 + 2d(k-1) = 2(a_1 + d(k-1)), \quad a_{k-p} + a_{k+p} = 2a_k,$$

$$\text{откуда } a_k = \frac{a_{k-p} + a_{k+p}}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

**4.038.** Известно, что в некоторую арифметическую прогрессию входят члены  $a_{2n}$  и  $a_{2m}$  такие, что  $a_{2n} / a_{2m} = -1$ . Имеется ли член этой прогрессии, равный нулю? Если да, то каков номер этого члена?

*Решение.*

Из условия  $\frac{a_{2n}}{a_{2m}} = -1$ . Отсюда  $a_{2n} = -a_{2m}$ . Пусть  $a_{2n}$  и  $a_{2m}$  — равностоящие от  $a_k$  члены, тогда, по свойству членов арифметической прогрессии (см. № 4.037),  $a_k = \frac{a_{2n} + a_{2m}}{2} = \frac{-a_{2m} + a_{2m}}{2} = \frac{0}{2} = 0$ ,  $k = \frac{2n + 2m}{2} = n + m$ .

*Ответ:* Да;  $n + m$ .

**4.039.** Даны две арифметические прогрессии. Первый и пятый члены первой прогрессии равны соответственно 7 и  $-5$ . У второй прогрессии первый член равен 0, а последний равен  $7/2$ . Найти сумму членов второй прогрессии, если известно, что третьи члены обеих прогрессий равны между собой.

*Решение.*

Из условия  $a_1 = 7$ ,  $a_5 = -5$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_n = \frac{7}{2}$ ,  $a_3 = b_3$ .

Далее  $a_5 = a_1 + 4d = 7 + 4d = -5$ ,  $4d = -12$ ,  $d = -3$ .

Имеем  $a_3 = b_3$ ,  $a_1 + 2d = b_1 + 2D$ ,  $7 + 2(-3) = 0 + 2D$ ,  $D = \frac{1}{2}$ .

Тогда  $b_n = b_1 + (N - 1)D = 0 + (N - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{N - 1}{2}$ ,  $\frac{N - 1}{2} = \frac{7}{2}$ ,  $N = 8$ .

$$b_1 + b_2 + \dots + b_N = \frac{b_1 + b_N}{2} \cdot N = \frac{0 + \frac{7}{2}}{2} \cdot 8 = 14.$$

*Ответ:* 14.

**4.040.** Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если от третьего отнять 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же от второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии отнять по 1, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

*Решение.*

Пусть  $b_1, b_1q, b_1q^2$  — данные числа, тогда

$b_1, b_1q, b_1q^2$  — члены геометрической прогрессии,

$b_1, b_1q, b_1q^2 - 4$  — члены арифметической прогрессии,  
 $b_1, b_1q - 1, b_1q^2 - 5$  — члены геометрической прогрессии.

Используя свойства членов арифметической прогрессии (см. № 4.037)  
 $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$  и свойство членов геометрической прогрессии

$b_k^2 = b_{k-1}b_{k+1}$ ,  $k = 2, 3, \dots, n-1$ , получим

$$\begin{cases} 2b_1q = b_1 + b_1q^2 - 4, \\ (b_1q - 1)^2 = b_1(b_1q^2 - 5). \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем  $b_1^2q^2 - 2b_1q + 1 = b_1^2q^2 - 5b_1$ ,  $2b_1q - 5b_1 = 1$ ,

$b_1 = \frac{1}{2q-5}$ . Подставляя это значение  $b_1$  в первое уравнение, получим

$$\frac{2q}{2q-5} = \frac{1+q^2}{2q-5} - 4, \text{ откуда } q^2 - 10q + 21 = 0, \text{ откуда } q_1 = 7, q_2 = 3.$$

Тогда  $b'_1 = \frac{1}{9}$ ,  $b'_2 = \frac{7}{9}$ ,  $b'_3 = \frac{49}{9}$  или  $b''_1 = 1$ ,  $b''_2 = 3$ ,  $b''_3 = 9$ .

Ответ: 1)  $\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}$ ; 2) 1, 3, 9.

**4.041.** Найти целое положительное число  $n$  из уравнения

$$(3+6+9+\dots+3(n-1)) + \left(4+5,5+7+\dots+\frac{8+3n}{2}\right) = 137.$$

*Решение.*

В первых скобках находится сумма членов арифметической прогрессии  $S_k$ ,

где  $a_1 = 3$ ,  $d = 3$ ,  $a_k = 3(n-1)$ ,  $k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1 = \frac{3n - 3 - 3}{3} + 1 = n - 1$ ; во

вторых скобках находится сумма членов арифметической прогрессии, где

$$b_1 = 4, d = 1,5, a_m = \frac{8+3n}{2}, m = \frac{a_m - a_1}{d} + 1 = \frac{\frac{8+3n}{2} - 4}{1,5} + 1 = n + 1.$$

Тогда исходное уравнение принимает вид

$$\frac{3+3(n-1)}{2} \cdot (n-1) + \frac{4+\frac{8+3n}{2}}{2} \cdot (n+1) = 137 \Leftrightarrow 9n^2 + 13n - 532 = 0.$$

Отсюда  $n_1 = -\frac{76}{9}$ ,  $n_2 = 7$ ;  $n_1 = -\frac{76}{9}$  не подходит, так как  $n$  — целое.

*Ответ:* 7.

**4.042.** Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

*Решение.*

Из условия

$$\begin{cases} a_1 = 102, \\ a_n = 996, \\ d = 6. \end{cases}$$

Используя формулу  $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ , имеем  $n = \frac{996 - 102}{6} + 1 = 150$ ,

$$S_n = \frac{102 + 996}{2} \cdot 150 = 82350.$$

*Ответ:* 82350.

**4.043.** Сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем  $|q| < 1$  равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

*Решение.*

Из условия имеем

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + \dots = 4, \\ b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \dots = 192, \\ |q| < 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots = 4, \\ b_1^3 + b_1^3q^3 + b_1^3q^6 + \dots = 192, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1 + q + q^2 + \dots) = 4, \\ b_1^3(1 + q^3 + q^6 + \dots) = 192, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 4, \\ b_1^3 \cdot \frac{1}{1-q^3} = 192, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 4, \\ \frac{b_1^3}{(1-q)(1+q+q^2)} = 192, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 4, \\ \frac{b_1}{1-q} \cdot \frac{b_1^2}{1+q+q^2} = 192, \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 4, \\ 4 \cdot \frac{b_1^2}{1+q+q^2} = 192, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 4(1-q), \\ \frac{b_1^2}{1+q+q^2} = 48. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16(1-q)^2}{1+q+q^2} = 48 \Leftrightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0, \text{ откуда } q_1 = -2, \quad q_2 = -\frac{1}{2};$$

$q_1 = -2$  не подходит, так как  $|q| < 1$ . Тогда  $b_1 = 4\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 6$ .

Ответ:  $6, -\frac{1}{2}$ .

**4.044.** Найти четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних равна 18.

*Решение.*

Пусть  $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^2 + d$  — данные числа.

Из условия имеем:

$b_1, b_1q, b_1q^2$  — члены геометрической прогрессии,

$b_1, b_1q + d, b_1q + 2d$  — члены арифметической прогрессии,

$b_1 + b_1q + 2d = 21, b_1q + b_1q + d = 18$ .

Так как  $b_3 = b_1q^2 = b_1q + 2d$ , то имеем 
$$\begin{cases} b_1q^2 = b_1q + d, \\ b_1 + b_1q + 2d = 21, \\ b_1q + b_1q + d = 18, \end{cases} \Rightarrow$$

Подставив это значение  $d$  во второе и третье уравнение, получим

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_1q + 2(b_1q^2 - b_1q) = 21, \\ 2b_1q + b_1q^2 - b_1q = 18, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + 2b_1q^2 - b_1q = 21, \\ b_1q + b_1q^2 = 18, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(2q^2 - q + 1) = 21, \\ b_1(q + q^2) = 18, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{21}{2q^2 - q + 1}, \\ \frac{21(q + q^2)}{2q^2 - q + 1} = 18, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{21}{2q^2 - q + 1}, \\ 5q^2 - 13q + 6 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{21}{2q^2 - q + 1}, \\ q_1 = 2, \\ q_2 = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Отсюда:

$$1) \begin{cases} b'_1 = \frac{21}{8 - 2 + 1} = 3, \\ q_1 = 2, \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} b''_1 = \frac{21}{2 \cdot \frac{9}{25} - \frac{3}{5} + 1} = 18,75, \\ q_2 = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Тогда  $q_1 = 2$ ,  $d_1 = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 6$ ,  $b'_1 = 3$ ,  $b'_2 = 3 \cdot 2 = 6$ ,  $b'_3 = 3 \cdot 4 = 12$ ,

$$b'_4 = 6 + 12 = 18, \quad q_2 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = 18,75 \cdot \frac{9}{25} - 18,75 \cdot \frac{3}{5} = -4,5, \quad b''_1 = 18,75,$$

$$b''_2 = 11,25, \quad b''_3 = 6,75, \quad b''_4 = 2,25.$$

Ответ: 1) 3, 6, 12, 18; 2) 18,75; 11,25; 6,75; 2,25.

**4.045.** Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим членам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующих арифметическую прогрессию. Найти седьмой член геометрической прогрессии.

*Решение.*

Из условия имеем:

$b_1, b_1q, b_1q^2$  — члены геометрической прогрессии,

$b_1 + 25, b_1q + 27, b_1q^2 + 1$  — члены арифметической прогрессии, тогда получаем

$$\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 91, \\ 2(b_1q + 27) = b_1 + 25 + b_1q^2 + 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 91, \\ b_1(q^2 - 2q + 1) = 28, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{91}{1 + q + q^2}, \quad \frac{91(q^2 - 2q + 1)}{1 + q + q^2} = 28, \quad 3q^2 - 10q + 3 = 0, \quad \text{откуда}$$

$$q_1 = 3, \quad q_2 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Тогда } b'_1 = \frac{91}{1 + 3 + 9} = \frac{91}{13} = 7 \quad \text{или}$$

$$b_1'' = \frac{91}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}} = \frac{819}{9 + 3 + 1} = \frac{819}{13} = 63.$$

$$\text{Отсюда } b_7' = b_1' \cdot q_1^6 = 7 \cdot 3^6 = 5103; \quad b_7'' = b_1'' q_2^6 = 63 \cdot \frac{1}{3^6} = \frac{63}{729} = \frac{7}{81}.$$

*Ответ:* 5103 или  $\frac{7}{81}$ .

**4.046.** Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

*Решение.*

Пусть  $b_1, b_2, b_3$  — члены геометрической прогрессии,  $b_1, b_2 + 2, b_3$  — члены арифметической прогрессии,  $b_1, b_2 + 2, b_3 + 9$  — члены геометрической прогрессии. Тогда  $b_1, b_1q + 2, b_1q^2 + 9$  — члены геометрической прогрессии.

Имеем:

$$\begin{cases} 2(b_1q + 2) = b_1 + b_1q^2, \\ (b_1q + 2)^2 = b_1 \cdot (b_1q^2 + 9), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b_1q + 4 = b_1 + b_1q^2, \\ b_1^2q^2 + 4b_1q + 4 = b_1^2q^2 + 9b_1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1(q^2 - 2q + 1) = 4, \\ b_1(9 - 4q) = 4. \end{cases} \Rightarrow b_1 = \frac{4}{9 - 4q}, \quad \frac{4(q^2 - 2q + 1)}{9 - 4q} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 + 2q - 8 = 0, \text{ откуда } q_1 = -4, \quad q_2 = 2.$$

$$\text{Тогда } b_1' = \frac{4}{9 + 16} = \frac{4}{25}, \quad b_2' = \frac{4}{25}(-4) = -\frac{16}{25}, \quad b_3' = \frac{64}{25} \quad \text{или}$$

$$b_1'' = \frac{4}{9 - 8} = 4, \quad b_2'' = 4 \cdot 2 = 8, \quad b_3'' = 16.$$

*Ответ:* 1) 4, 8, 16; 2)  $\frac{4}{25}, -\frac{16}{25}, \frac{64}{25}$ .

**4.047.** Найти три числа, образующих геометрическую прогрессию, если известно, что их произведение равно 64, а их среднее арифметическое равно  $14/3$ .

*Решение.*

Из условия имеем:

$$\begin{cases} b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 64 \\ \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} = \frac{14}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 = 64, \\ b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b_1 q)^3 = 64, \\ b_1(1 + q + q^2) = 14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q = 4, \\ b_1(1 + q + q^2) = 14, \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b_1 = \frac{4}{q}, \frac{4(1 + q + q^2)}{q} = 14, 2q^2 - 5q + 2 = 0, \text{откуда } q_1 = 2, q_2 = \frac{1}{2}.$$

Тогда  $b'_1 = \frac{4}{2} = 2$ ,  $b'_2 = 2 \cdot 2 = 4$ ,  $b'_3 = 2 \cdot 4 = 8$  или  $b''_1 = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$ ,

$$b''_2 = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4, b''_3 = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2.$$

*Ответ:* 1) 2, 4, 8; 2) 8, 4, 2.

**4.048.** Доказать, что любой член знакоположительной геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему пропорциональному между любыми членами, равноудаленными от него.

*Решение.*

$$\text{Имеем } b_{k-p} = b_1 q^{k-p-1}, b_{k+p} = b_1 q^{k+p-1}.$$

Перемножая эти равенства, получим  $b_{k-p} \cdot b_{k+p} = b_1^2 q^{2(k-1)}$  или  $(b_1 q^{k-1})^2 = b_{k-p} \cdot b_{k+p}$ , откуда  $b_1 q^{k-1} = \sqrt{b_{k-p} \cdot b_{k+p}}$ , т.е.  $b_k = \sqrt{b_{k-p} \cdot b_{k+p}}$ .

**4.049.** Найти сумму семи первых членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем  $|q| < 1$ , если ее второй член равен 4, а отношение суммы квадратов членов к сумме членов равно  $16/3$ .

*Решениею.*

Из условия имеем:

$$\begin{cases} b_2 = 4, \\ \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 \dots} = \frac{16}{3}, \\ |q| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q = 4, \\ \frac{b_1^2(1 + q^2 + q^4 + \dots)}{b_1(1 + q + q^2 + \dots)} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q = 4, \\ b_1 \cdot \frac{1}{1-q^2} = \frac{16}{3}, \\ \frac{1}{1-q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q = 4, \\ \frac{b_1}{1+q} = \frac{16}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16(1+q)q}{3} = 4, \\ b_1 = \frac{16(1+q)}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4q^2 + 4q - 3 = 0, \\ b_1 = \frac{16(1+q)}{3}, \end{cases} \Rightarrow q_1 = -\frac{3}{2}, q_2 = \frac{1}{2}.$$

$$q_1 = -\frac{3}{2} \text{ не подходит, т.к. } |q| < 1. \text{ Следовательно, } b_1 = \frac{16\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{3} = 8;$$

$$S_7 = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{127}{8}.$$

*Ответ:*  $\frac{127}{8}$ .

**4.050.** Найти сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 7.

*Решение.*

Имеем:

$$\begin{cases} a_1 = 105, \\ a_n = 994, \Rightarrow n = \frac{994 - 105}{7} + 1 = 128, \\ d = 7, \end{cases} S_n = \frac{105 + 994}{2} \cdot 128 = 70336.$$

*Ответ:* 70336.

**4.051.** Найти сумму  $\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$ .

*Решение.*

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(4 + 2 + \frac{1}{4}\right) + \left(16 + 2 + \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(2^{2n} + 2 + \frac{1}{2^{2n}}\right) = \\
&= \left(4 + 16 + \dots + 2^{2n}\right) + \underbrace{\left(2 + 2 + \dots + 2\right)}_{n \text{ раз}} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{2n}}\right) = \\
&= \left(4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n\right) + 2n + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}\right) = \\
&= \frac{4 - 4^n \cdot 4}{1 - 4} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} + 2n = \frac{4(4^n - 1)}{3} + \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} + 2n = \\
&= \frac{(4^n - 1)(4^{n+1} + 1)}{3 \cdot 4^n} + 2n.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{(4^n - 1)(4^{n+1} + 1)}{3 \cdot 4^n} + 2n.$

**4.052.** Даны две бесконечные геометрические прогрессии со знаменателем  $|q| < 1$ , различающиеся только знаком их знаменателей. Их суммы соответственно равны  $S_1$  и  $S_2$ . Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии, составленной из квадратов членов любой из данной прогрессий.

*Решение.*

Из условия имеем  $S_1 = \frac{b_1}{1 - q}$ ,  $S_2 = \frac{b_1}{1 + q}$ ,  $|q| < 1$ . Далее,

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots = b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 + \dots = b_1^2 (1 + q^2 + q^4 + \dots).$$

Выражение в скобках — сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первый член равен единице, а знаменатель равен  $q^2$ . По формуле суммы членов геометрической прогрессии имеем

$$b_1^2 (1 + q^2 + q^4 + \dots) = b_1^2 \cdot \frac{1}{1 - q^2} = \frac{b}{1 - q} \cdot \frac{b}{1 + q} = S_1 \cdot S_2.$$

Ответ:  $S_1 \cdot S_2.$

**4.053.** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — последовательные члены геометрической прогрессии,  $S_n$  — сумма ее  $n$  первых членов. Доказать, что

$$S_n = a_1 a_n \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

*Решение.*

$$\text{Из условия } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} a_1 a_n \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) &= a_1 \cdot a_1 q^{n-1} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 q} + \frac{1}{a_1 q^2} + \dots + \frac{1}{a_1 q^{n-1}} \right) = \\ &= a_1^2 q^{n-1} \cdot \frac{1}{a_1} \left( 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{n-1}} \right) = a_1 q^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^n}{1 - \frac{1}{q}} = \\ &= a_1 q^{n-1} \cdot \frac{q^n - 1}{q^n} \cdot \frac{q}{q-1} = a_1 q^{n-1} \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**4.054.** Доказать, что если числа  $a, b$  и  $c$  составляют арифметическую прогрессию, то числа  $a^2 + ab + b^2$ ,  $a^2 + ac + c^2$  и  $b^2 + bc + c^2$  в указанном порядке также составляют арифметическую прогрессию.

*Решение.*

Имеем  $b = a + d, c = a + 2d$ .

Предположим, что  $a^2 + a(a+d) + (a+d)^2$ ,  $a^2 + a(a+2d) + (a+2d)^2$ ,

$(a+d)^2 + (a+d) + (a+2d) + (a+2d)^2$  — члены арифметической прогрессии.

Тогда получим

$$\begin{aligned} 2(a^2 + a(a+2d) + (a+2d)^2) &= (a^2 + a(a+d) + (a+d)^2) + \\ &+ ((a+d)^2 + (a+d)(a+2d) + (a+2d)^2); \end{aligned}$$

$$2(a^2 + a^2 + 2ad + a^2 + 4ad + 4d^2) = a^2 + a^2 + ad + a^2 + 2ad +$$

$$+ d^2 + a^2 + 2ad + d^2 + a^2 + 3ad + 2d^2 + a^2 + 4ad + 4d^2,$$

$$6a^2 + 12ad + 8d^2 = 6a^2 + 12ad + 8d^2.$$

Доказанное тождество подтверждает предположение.

**4.055.** Первый член некоторой бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем  $|q| < 1$  равен 1, а ее сумма  $S$ . Из квадратов членов этой прогрессии составлена новая бесконечная геометрическая прогрессия. Найти ее сумму.

*Решение.*

Из условия имеем  $b_1 = 1$ ,  $|q| < 1$ . Следовательно,  $\frac{1}{1-q} = S$ ,  $1-q = \frac{1}{S}$ ,

$$q = 1 - \frac{1}{S} = \frac{S-1}{S}.$$

Тогда  $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots = b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 + \dots =$

$$= b_1^2 (1 + q^2 + q^4 + \dots) = b_1^2 \cdot \frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{S-1}{S}\right)^2} =$$

$$= \frac{S^2}{S^2 - S^2 + 2S - 1} = \frac{S^2}{2S - 1}.$$

*Ответ:*  $\frac{S^2}{2S - 1}$ .

**4.056.** Найти пятый член возрастающей геометрической прогрессии, зная, что ее первый член равен  $7 - 3\sqrt{5}$  и что каждый ее член, начиная со второго, равен разности двух соседних с ним членов.

*Решение.*

Имеем:

$$\begin{cases} b_1 = 7 - 3\sqrt{5}, \\ b_2 = b_3 - b_1, \Rightarrow b_1 q = b_1 q^2 - b_1, q = q^2 - 1, q^2 - q - 1 = 0, \\ |q| > 1. \end{cases}$$

$$q_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ не подходит, так как } |q_1| < 1; q_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$



Отсюда

$$b_5 = b_1 q^4 = \frac{(7 - 3\sqrt{5})(1 + \sqrt{5})^4}{16} = \frac{(17 - 3\sqrt{5})8(7 + 3\sqrt{5})}{16} = \frac{49 - 45}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

**4.057.** В арифметической прогрессии сумма ее  $m$  первых членов равна сумме  $n$  первых членов ( $m \neq n$ ). Доказать, что в этом случае сумма ее первых  $m + n$  членов равна нулю.

*Решение.*

Из условия  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$ , где  $m \neq n$ ,  $S_m = S_n$ .

$$S_m = \frac{2a_1 + (m-1)d}{2} \cdot m, \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

$$\text{Тогда } \frac{2a_1 + (m-1)d}{2} \cdot m = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n,$$

$$2a_1 m + m(m-1)d = 2a_1 n + n(n-1)d,$$

$$2a_1 m - 2a_1 n = n(n-1)d - m(m-1)d,$$

$$2(m-n)a_1 = (-(m^2 - n^2) + (m-n))d,$$

$$2(m-n)a_1 = (m-n)(-m-n+1)d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 = (-m-n+1)d.$$

$$S_{m+n} = \frac{2a_1 + (m+n-1)d}{2} (m+n) =$$

$$= \frac{(-m-n+1)d + (m+n-1)d}{2} (m+n) =$$

$$= \frac{(-m-n+1+m+n-1)d}{2} (m+n) = 0,$$

что и требовалось доказать.

**4.058.** Известно, что  $L, M, N$  — соответственно  $l$ -й,  $m$ -й,  $n$ -й члены геометрической прогрессии. Показать, что  $L^{m-n} M^{n-l} N^{l-m} = 1$ .

*Решение.*

Пусть  $b_1, b_2, \dots, b_l, \dots, b_m, \dots, b_n, \dots$  — члены геометрической прогрессии и пусть  $L = b_l, M = b_m$  и  $N = b_n$ . Покажем, что  $b_l^{m-n} \cdot b_m^{n-l} \cdot b_n^{l-m} = 1, b_l = b_1 q^{l-1},$

$$b_m = b_1 q^{m-1}, \quad b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & (b_1 q^{l-1})^{m-n} \cdot (b_1 q^{m-1})^{n-l} \cdot (b_1 q^{n-1})^{l-m} = \\ & = b_1^{m-n} \cdot q^{(l-1)(m-n)} \cdot b_1^{n-l} \cdot q^{(m-1)(n-l)} \cdot b_1^{l-m} \cdot q^{(n-1)(l-m)} = \\ & = b_1^{m-n+n-l+l-m} \cdot q^{lm-ln-m+n+mn-m-l-n+l+nl-mn-l+m} = \\ & = b_1^0 \cdot q^0 = 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**4.059.** Числа  $a, b, c$ , одно из которых кратно 7, составляют арифметическую прогрессию с разностью 7. Показать, что число  $abc$  делится на 294.

*Решение.*

Пусть  $a = 7k, b, c$  — члены арифметической прогрессии, где  $k \in \mathbb{Z}$ .

Тогда  $b = 7k + 7, c = 7k + 14$  и  $abc = 7^3 k(k+1)(k+2)$ .

Среди трех последовательных целых чисел  $k, k+1, k+2$  имеется число, которое делится на 3, а среди двух последовательных чисел  $k, k+1$  одно будет четным, следовательно  $n = k(k+1)(k+2)$  делится на 6. Так как  $294 = 7^2 \cdot 6$ , то  $abc = 7^3 n$  кратно 294. Что и требовалось доказать.

**4.060.** Показать, что для всякой арифметической прогрессии при любом  $n$  выполняется равенство  $S_{2n} = S_n + \frac{1}{3} S_{3n}$  ( $S_k$  — сумма  $k$  первых членов прогрессии).

*Решение.*

$$\text{Имеем } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n,$$

$$\frac{1}{3} S_{3n} = \frac{2a_1 + d(3n-1)}{2 \cdot 3} \cdot 3n = \frac{2a_1 + d(3n-1)}{2} \cdot n,$$

$$S_n + \frac{1}{3} S_{3n} = \frac{4a_1 + d(4n-2)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(2n-2)}{2} \cdot 2n = S_{2n}.$$

Что и требовалось доказать.

**4.061.** Решить уравнение

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \dots + \frac{1}{x} = 3,$$

где  $x$  — целое положительное число.

*Решение.*

Домножая обе части уравнения на  $x$ , имеем

$$(x-1) + (x-2) + (x-3) + \dots + 1 = 3x.$$

Левая часть этого уравнения есть сумма членов арифметической прогрессии, у которой  $a_1 = x-1$ ,  $d = -1$ ,  $a_n = 1$ ,

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{1 - x + 1}{-1} + 1 = x - 1. \text{ Так как } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

$$\text{то } \frac{x-1+1}{2} \cdot (x-1) = 3x, \quad x^2 = 7x, \quad x = 7 (x \neq 0).$$

*Ответ:*  $x = 7$ .

**4.062.** Число 180 представить в виде суммы четырех слагаемых так, чтобы они составили геометрическую прогрессию, у которой третий член был бы больше первого на 36.

*Решение.*

Из условия

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 180, \\ b_3 = b_1 + 36, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 = 180, \\ b_1q^2 = b_1 + 36, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q+q^2+q^3) = 180, \\ b_1(q^2-1) = 36. \end{cases} \Rightarrow \frac{b_1(q^3+q^2+q+1)}{b_1(q^2-1)} = \frac{180}{36},$$

$$\frac{q^2(q+1)+(q+1)}{(q+1)(q-1)} = 5, \quad \frac{(q+1)(q^2+1)}{(q+1)(q-1)} = 5, \quad \frac{q^2+1}{q-1} = 5, \quad q^2 - 5q + 6 = 0,$$

$$q_1 = 3, q_2 = 2.$$

Подставляя значение  $q_1 = 3$  во второе уравнение этой системы, получим  $b'_1 = \frac{36}{q^2-1} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$ .

Тогда

$$b'_2 = b_1q = \frac{9}{2} \cdot 3 = \frac{27}{2}, \quad b'_3 = b_1q^2 = \frac{9}{2} \cdot 9 = \frac{81}{2}, \quad b'_4 = b_1q^3 = \frac{9}{2} \cdot 27 = \frac{243}{2}.$$

Подставляя значение  $q_2 = 2$  во второе уравнение этой системы, получим

$$b_1^n = \frac{36}{q^2 - 1} = \frac{36}{4 - 1} = 12, \quad b_2^n = b_1 q = 12 \cdot 2 = 24, \quad b_3^n = b_1 q^2 = 12 \cdot 4 = 48,$$

$$b_4^n = b_1 q^3 = 12 \cdot 8 = 96.$$

Ответ: 1)  $\frac{9}{2} + \frac{27}{2} + \frac{81}{2} + \frac{243}{2}$ ; 2)  $12 + 24 + 48 + 96$ .

**4.063.** Даны две геометрические прогрессии, состоящие из одинакового числа членов. Первый член и знаменатель первой прогрессии равны соответственно 20 и  $3/4$ , а первый член и знаменатель второй прогрессии равны соответственно 4 и  $2/3$ . Если перемножить члены этих прогрессий с одинаковыми номерами, то сумма всех таких произведений составит 158,75. Найти число членов этой прогрессии.

*Решение.*

Пусть  $a_1, a_2, a_3, \dots$  и  $b_1, b_2, b_3, \dots$  члены двух геометрических прогрессий, у которых  $a_1 = 20, q_1 = \frac{3}{4}$ ;  $b_1 = 4, q_2 = \frac{2}{3}$  и  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots = 158,75$ . Найдем  $a_2 = a_1 q_1 = 20 \cdot \frac{3}{4} = 15, a_3 = a_1 q_1^2 = 20 \cdot \frac{9}{16} = \frac{45}{4}, b_2 = b_1 q = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}, b_3 = b_1 q^2 = 4 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{9}$ . Тогда  $20 \cdot 4 + 15 \cdot \frac{8}{3} + \frac{45}{4} \cdot \frac{16}{9} + \dots = 158,75$  или  $80 + 40 + 20 + \dots = \frac{635}{4}$ . Левая часть этого равенства есть сумма членов геометрической прогрессии, у которой первый член равен 80, а знаменатель равен  $\frac{1}{2}$ .

Отсюда имеем

$$\frac{80 \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{635}{4}, \quad \frac{160(2^n - 1)}{2^n} = \frac{635}{4}, \quad \frac{32(2^n - 1)}{2^n} = \frac{127}{4},$$

$$128(2^n - 1) = 127 \cdot 2^n, \quad 2^n = 2^7, \quad n = 7.$$

Ответ: 7.

**4.064.** Три числа, из которых третье равно 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

*Решение.*

Пусть  $b_1, b_2, 12$  — члены геометрической прогрессии, а  $b_1, b_2, 9$  — члены арифметической прогрессии. Тогда

$$\begin{cases} b_1 q^2 = 12, \\ b_1 + 2d = 9, \\ b_1 q = b_1 + d, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9-2d)q^2 = 12, \\ b_1 = 9-2d, \\ (9-2d)(q-1) = d, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9-2d) \cdot \frac{(9-d)^2}{(9-2d)^2} = 12, \\ b_1 = 9-2d, \\ q = \frac{9-d}{9-2d}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(9-d)^2}{9-2d} = 12, \\ b_1 = 9-2d, \\ q = \frac{9-d}{9-2d}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = -9, \\ d_2 = 3, \\ b_1 = 9-2d, \\ q = \frac{9-d}{9-2d}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = -9, \\ b'_1 = 9 - 2(-9) = 27, \\ q_1 = \frac{9+9}{9+18} = \frac{2}{3}; \\ d_2 = 3, \\ b''_1 = 9 - 6 = 3, \\ q_2 = \frac{9-3}{9-6} = 2. \end{cases}$$

В первом случае  $b'_1 = 27$ ,  $b'_2 = b_1 q = 27 \cdot \frac{2}{3} = 18$ ,  $b'_3 = 12$ ; во втором слу-

чае  $b''_1 = 3$ ,  $b''_2 = b_1 q = 3 \cdot 2 = 6$ ,  $b''_3 = 12$ .

*Ответ:* 1) 27, 18, 12; 2) 3, 6, 12.

**4.065.** В конечной геометрической прогрессии известны ее первый член  $a$ , последний член  $b$  и сумма  $S$  всех ее членов. Найти сумму квадратов всех членов этой прогрессии.

*Решение.*

Пусть  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  — члены геометрической прогрессии, у которой  $b_1 = a, b_n = b, S_n = S$ . Тогда

$$\begin{aligned} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots &= b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 + \dots = b_1^2 (1 + q^2 + q^4 + \dots) = \\ &= a^2 (1 + q^2 + q^4 + \dots) = a^2 \cdot \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2}. \quad (1) \end{aligned}$$

Из условия имеем

$$\begin{cases} aq^{n-1} = b, \\ \frac{a(1-q^n)}{1-q} = S \end{cases} \Rightarrow q^{n-1} = \frac{b}{a}, \frac{q^n}{q} = \frac{b}{a}, q^n = \frac{b}{a} \cdot q.$$

Подставив это значение  $q^n$  во второе уравнение системы, получим

$$\frac{a\left(1 - \frac{b}{a} \cdot q\right)}{1-q} = S, \quad a - bq = S - Sq, \quad Sq - bq = S - a, \quad (S-b)q = S - a, \quad q = \frac{S-a}{S-b}.$$

Тогда  $q^n = \frac{b}{a} \cdot \frac{S-a}{S-b}$ . Подставим  $q^n = \frac{b}{a} \cdot \frac{S-a}{S-b}$  в (1):

$$\begin{aligned} a^2 \left( \frac{1 - \frac{b^2(S-a)^2}{a^2(S-b)^2}}{1 - \frac{(S-a)^2}{(S-b)^2}} \right) &= \frac{a^2 - \frac{b^2(S-a)^2}{(S-b)^2}}{1 - \frac{(S-a)^2}{(S-b)^2}} = \frac{a^2(S-b)^2 - b^2(S-a)^2}{(S-b)^2 - (S-a)^2} = \\ &= \frac{(aS - ab - bS + ab)(aS - ab + bS - ab)}{(S-b-S+a)(S-b+S-a)} = \frac{S(a-b)((a+b)S - 2ab)}{(a-b)(2S - (a+b))} = \\ &= \frac{(a+b)S - 2ab}{2S - (a+b)} \cdot S. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{(a+b)S - 2ab}{2S - (a+b)} \cdot S.$

**4.066.** В некоторой геометрической прогрессии, содержащей  $2n$  положительных членов, произведение первого члена на последний равно 1000. Найти сумму десятичных логарифмов всех членов прогрессии.

*Решение.*

Пусть  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  — члены геометрической прогрессии, количество которых равно  $2n$ , и  $b_1 \cdot b_n = 1000$ . Имеем

$$\begin{aligned} X &= \lg b_1 + \lg b_2 + \lg b_3 + \dots + \lg b_n = \lg(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n) = \\ &= \lg((b_1 \cdot b_n) \cdot (b_2 \cdot b_{n-1}) \cdot (b_3 \cdot b_{n-2}) \cdot \dots). \end{aligned}$$

Так как  $b_k \cdot b_m = b_p \cdot b_q$ , где  $k + m = p + q$ , то

$$X = \lg(b_1 b_n)^n = \lg 1000^n = n \lg 1000 = 3n.$$

Ответ:  $3n$ .

**4.067.** Сумма трех чисел равна  $11/18$ , а сумма обратных им чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна  $18$ . Найти эти числа.

Решение.

Из условия имеем  $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{11}{18}$ ,  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 18$ , где  $\frac{1}{a_1}$ ,  $\frac{1}{a_2}$ ,  $\frac{1}{a_3}$  — члены арифметической прогрессии.

Отсюда

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = \frac{11}{18}, \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 18, \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = \frac{11}{18}, \\ a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2 = 18 a_1 a_2 a_3, \Leftrightarrow \\ 2 a_1 a_3 = a_2 a_3 + a_1 a_2, \end{cases} \\ \frac{2}{a_2} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3}, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = \frac{11}{18}, \\ (18 a_1 a_2 - a_1 - a_2) a_3 = a_1 a_2, \Rightarrow 18 a_1 a_2 - a_1 - a_2 = 2 a_1 - a_2, \\ (2 a_1 - a_2) a_3 = a_1 a_2. \end{cases}$$

$$18 a_1 a_2 = 3 a_1, a_2 = \frac{1}{6}.$$

Далее из второго уравнения системы получим

$$\left(2 a_1 - \frac{1}{6}\right) a_3 = \frac{a_1}{6}, a_3 = \frac{a_1}{12 a_1 - 1}.$$

Затем, подставив  $a_2, a_3$  в первое уравнение системы, после упрощений

получим  $27 a_1^2 - 12 a_1 + 1 = 0$ , откуда  $a_1' = \frac{1}{9}, a_1'' = \frac{1}{3}$ . Тогда  $a_3' = \frac{1}{3}, a_3'' = \frac{1}{9}$ .

Имеем  $a_1' = \frac{1}{9}, a_2' = \frac{1}{6}, a_3' = \frac{1}{3}$  или  $a_1'' = \frac{1}{3}, a_2'' = \frac{1}{6}, a_3'' = \frac{1}{9}$ . По условию

подходят значения  $a_1 = \frac{1}{9}, a_2 = \frac{1}{6}, a_3 = \frac{1}{3}$ .

Ответ:  $\frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ .

**4.068.** Разность арифметической прогрессии отлична от нуля. Числа, равные произведениям первого члена этой прогрессии на второй, второго члена на третий и третьего на первый в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

*Решение.*

Пусть  $a_1, a_2, a_3, \dots$  — члены арифметической прогрессии с разностью  $d \neq 0$  и  $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_1$  — члены геометрической прогрессии.

По условию

$$\frac{a_2 a_3}{a_1 a_2} = \frac{a_3 a_1}{a_2 a_3} = q, \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = q, \quad \frac{a_1 + 2d}{a_1} = \frac{a_1}{a_1 + d} = q.$$

Запишем эти равенства в систему

$$\begin{cases} \frac{a_1 + 2d}{a_1} = \frac{a_1}{a_1 + d}, \\ \frac{a_1}{a_1 + d} = q, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + d)(a_1 + 2d) = a_1^2, \\ \frac{a_1}{a_1 + d} = q, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 3a_1 d + 2d^2 = a_1^2, \\ \frac{a_1}{a_1 + d} = q. \end{cases} \Rightarrow a_1 = -\frac{2}{3}d.$$

Из второго уравнения системы имеем

$$\frac{-\frac{2}{3}d}{-\frac{2}{3}d + d} = q, \quad q = -2.$$

*Ответ:*  $-2$ .



## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Для любых  $a$ ,  $b$  и  $c$  верны равенства:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (6.1)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (6.2)$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \quad (6.3)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (6.4)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \quad (6.5)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \quad (6.6)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \quad (6.7)$$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , где  $x_1, x_2$  — корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (6.8)$$

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Уравнением с одним неизвестным называется равенство

$$f_1(x) = g_1(x), \quad (6.9)$$

где  $f_1(x)$  и  $g_1(x)$  — некоторые заданные функции переменной  $x$  над числовым множеством  $M$ .

Решением (корнем) уравнения (6.9) с одним неизвестным называется такое численное значение неизвестного, взятое из множества чисел, указан-

ных в условии уравнения, которое обращает данное уравнение в тождество (верное равенство).

Решить уравнение — это значит найти множество всех его решений или показать, что решений нет.

*Областью допустимых значений неизвестного* (ОДЗ) уравнения (6.9), называется множество всех значений, взятых из числового множества, над которым задано уравнение, при которых существуют обе функции (части уравнения)  $f_1(x)$  и  $g_1(x)$ .

Пусть в результате преобразования уравнения (6.9) получено уравнение

$$f_2(x) = g_2(x) \quad (6.10)$$

Если все решения уравнения (6.9) являются решениями уравнения (6.10), то уравнение (6.10) называется следствием уравнения (6.9).

Два уравнения (6.9) и (6.10) с одним и тем же неизвестным называются равносильными (эквивалентными), если уравнение (6.10) является следствием уравнения (6.9) и, наоборот, уравнение (6.9) является следствием уравнения (6.10) или если оба уравнения решений не имеют.

При преобразованиях уравнения область его допустимых значений может изменяться, полученное уравнение в общем случае неравносильно данному. Если при некоторых преобразованиях ОДЗ уравнения расширяется, то полученное уравнение может иметь корни, *посторонние* для данного уравнения.

Если обе части данного уравнения возвести в одну и ту же степень, то все его корни будут корнями полученного уравнения, т.е. полученное уравнение всегда будет следствием данного, обратное утверждение не всегда имеет место.

Всякое *целое рациональное алгебраическое уравнение  $n$ -й степени с одним неизвестным* может быть записано в виде

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0), \quad (6.11)$$

где  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  — заданные числа (коэффициенты уравнения),  $x$  — неизвестное,  $n$  — натуральное число.

Коэффициенты  $a_n$  и  $a_0$  называются соответственно *старшим коэффициентом* и *свободным членом* уравнения (6.11).

## Уравнение первой степени с одним неизвестным

Целое рациональное алгебраическое уравнение первой степени называют просто *уравнением первой степени*.

Любое уравнение первой степени с одним неизвестным может быть приведено к каноническому виду

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0) \quad (6.12)$$

Уравнение (6.12) является частным случаем уравнения (6.11), если в последнем положить  $n = 1$ ,  $a_1 = 1$  и  $a_0 = b$ .

Уравнение  $ax + b = 0$  ( $a \neq 0$ ) в множестве действительных чисел всегда имеет решение, и притом только одно:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

## Уравнение второй степени с одним неизвестным

Целое рациональное алгебраическое уравнение второй степени называется *уравнением второй степени*, или *квадратным уравнением*.

Всякое квадратное уравнение с одним неизвестным можно привести к каноническому виду

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (6.13)$$

Уравнение (6.13) является частным случаем уравнения (6.11), если в последнем положить  $n = 2$ ,  $a_2 = a$ ,  $a_1 = b$  и  $a_0 = c$ .

Квадратное уравнение (6.13), записанное в канонической форме, называется *неполным*, если хотя бы один из его коэффициентов, кроме старшего  $a$ , равен нулю.

Если все коэффициенты квадратного уравнения, записанного в каноническом виде, отличны от нуля, то оно называется *полным*.

Полное квадратное уравнение, старший коэффициент которого равен 1 ( $a = 1$ ), называется *приведенным квадратным уравнением*; оно имеет вид

$$x^2 + px + q = 0. \quad (6.14)$$

## Формулы корней полного квадратного уравнения

Если  $D = b^2 - 4ac \geq 0$  (*дискриминант* уравнения), то уравнение (6.13) в множестве действительных чисел имеет два и только два действительных корня, которые определяются по формулам

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (6.15)$$

Если  $b^2 - 4ac > 0$ , то  $x_1 \neq x_2$ , а если  $b^2 - 4ac = 0$ , то  $x_1 \equiv x_2$ . Если  $b^2 - 4ac < 0$ , то уравнение (6.13) действительных решений не имеет.

В частном случае, когда  $b$  — четное число, т.е.  $b = 2k$ , уравнение (6.13) принимает вид  $ax^2 + 2kx + c = 0$ , а формулы (6.15) преобразуются в следующую:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \quad (6.16)$$

Если уравнение приведенное, т.е. имеет вид  $x^2 + px + q = 0$ , то для определения его корней получим

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \quad (6.17)$$

## Разложение квадратного трехчлена на множители

Выражение  $ax^2 + bx + c$  при  $a \neq 0$  называется *квадратным трехчленом*.

Выражение  $D = b^2 - 4ac$  называется *дискриминантом квадратного трехчлена*.

Если  $D \geq 0$ , то квадратный трехчлен разлагается на множители, с действительными коэффициентами:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (6.18)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — корни квадратного трехчлена, определяемые по формулам нахождения корней полного квадратного уравнения.

## Биквадратные уравнения

*Биквадратным уравнением* называется целое рациональное алгебраическое уравнение четвертой степени, которое может быть приведено к каноническому виду

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0). \quad (6.19)$$

Заменив  $x^2$  на  $t$ , получим  $at^2 + bt + c = 0$ , из которого находим

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad t_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если  $t_1 > 0$  и  $t_2 > 0$  ( $a > 0, c > 0, b^2 - 4ac \geq 0, b < 0$  или  $a < 0, c < 0, b^2 - 4ac \geq 0, b > 0$ ), то биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

### Уравнения, содержащие взаимно обратные выражения

Уравнения, содержащие взаимно обратные выражения и имеющие вид

$$a \cdot \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + b \cdot \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = c, \quad (6.20)$$

решаются с помощью подстановки

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = t. \quad (6.21)$$

Тогда  $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{1}{t}$  и относительно  $t$  получается уравнение

$$at + b \cdot \frac{1}{t} = c \quad \text{или} \quad at^2 - ct + b = 0 \quad (t \neq 0).$$

### Теорема Виета

Корни уравнения  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  ( $a_n \neq 0$ ) с его коэффициентами связаны следующими соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \dots \\ x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{array} \right.$$

Например, для уравнений четвертой степени  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$  ( $a \neq 0$ ) теорема Виета имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}, \\ x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}; \end{array} \right.$$

для кубического уравнения  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}; \end{array} \right.$$

для квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

## Иррациональные уравнения

*Иррациональным уравнением* называется алгебраическое уравнение, если хотя бы один из членов которого иррационален относительно неизвестного, т.е. это есть уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала.

Общий метод решения иррациональных уравнений заключается в следующем: сначала изолируется один радикал, затем обе части уравнения возводят в степень, потом снова изолируют радикал и т.д. При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень получается уравнение, в общем случае равносильное данному; поэтому проверка найденных значений неизвестного по условию исходного уравнения обязательна, т.е. является составной частью решения.

Если обе части уравнения  $f_1(x) = f_2(x)$  возвести в четную степень  $n$ , то корнями полученного уравнения  $(f_1(x))^n = (f_2(x))^n$  будут все корни исходного уравнения  $f_1(x) = f_2(x)$  и уравнения  $f_1(x) = -f_2(x)$ .

При переходе от уравнения  $f_1(x) = f_2(x)$  к уравнению  $(f_1(x))^n = (f_2(x))^n$  потери корней не произойдет, но могут появиться посторонние корни, а именно: корни сопряженного с исходным уравнения  $f_1(x) = -f_2(x)$ .

Если обе части уравнения  $f_1(x) = f_2(x)$  возвести в нечетную степень  $k$ , то получим уравнение  $(f_1(x))^k = (f_2(x))^k$ , равносильное исходному в множестве действительных чисел.

При возведении в нечетную степень обеих частей уравнения, рассматриваемого в множестве действительных чисел, посторонние корни не появляются.

Приступая к решению иррационального уравнения, целесообразно предварительно определить ОДЗ, так как может оказаться, что это уравнение не определено в области действительных чисел.

При решении иррациональных уравнений следует иметь в виду, что не принадлежащие к ОДЗ значения неизвестного всегда посторонние для решаемого уравнения; их можно отбросить без проверки по условию. Найденные значения неизвестного из области допустимых обязательно следует проверить по условию уравнения, так как они также могут оказаться посторонними.

## СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

*Системой  $n$  уравнений с  $t$  неизвестными* называется  $n$  уравнений, в каждом из которых неизвестные, обозначенные одной и той же буквой, означают одну и ту же неизвестную величину.

*Решением системы  $n$  уравнений с  $t$  неизвестными* называется всякая упорядоченная совокупность из  $t$  таких чисел, которые, будучи подставлены в систему вместо неизвестных, обращают каждое уравнение системы в тождество.

Решить систему уравнений — значит найти множество всех ее решений или показать, что она решений не имеет.

Если система не имеет решений, то ее называют *несовместной* или *противоречивой*, в противном случае — *совместной*.

Система  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  может либо иметь единственное решение, либо

иметь бесконечно много решений, либо не иметь решений. При графическом способе решения каждому уравнению данной системы ставится в соответствие некоторая прямая на плоскости  $XOY$ ; таким образом, данной системе на плоскости соответствует пара прямых. Две прямые на плоскости могут либо пересекаться в одной точке, либо совпадать, либо не иметь общих точек.

При пересечении прямых данная система имеет единственное решение; при совпадении прямых данная система имеет бесконечно много решений; если прямые не имеют ни одной общей точки, то данная система решений не имеет.

Решить уравнения (6.136—6.182):

$$6.136. \frac{x^2 + 1}{x + 1} + \frac{x^2 + 2}{x - 2} = -2.$$



*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

После приведения всех членов уравнения к общему знаменателю, имеем

$$\frac{(x^2 + 1)(x - 2) + (x^2 + 2)(x + 1) + 2(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3 + x^2 + x - 4}{(x + 1)(x - 2)} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 + x - 4 = 0 \text{ при } x \neq -1 \text{ и } x \neq 2.$$

Перепишем это уравнение в виде  $(2x^3 - 2) + (x^2 - 1) + (x - 1) = 0$ ,

$$2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1)(x + 1) + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 3x + 4) = 0, \text{ от-}$$

куда  $x - 1 = 0$ , или  $2x^2 + 3x + 4 = 0$ ;  $x_1 = 1$ , у квадратного уравнения  $D < 0$ .

*Ответ:*  $x = 1$ .

$$6.137. \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x} = \frac{25}{6}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Приведем все члены уравнения к общему знаменателю:

$$\frac{6x^2(x+2) + 6x(x+1)^2 + 6(x+1)(x+2)^2 - 25x(x+1)(x+2)}{6x(x+1)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x^3 + 21x^2 - 4x - 24}{6x(x+1)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow 7x^3 + 21x^2 - 4x - 24 = 0 \text{ при } x \neq 0, x \neq -1,$$

$x \neq -2$ . Проверкой убеждаемся, что  $x_1 = 1$ , так как  $7 + 21 - 4 - 24 = 0$ . Делим

левую часть уравнения на  $x - 1$ : 
$$\frac{7x^3 + 21x^2 - 4x - 24}{x - 1} = 7x^2 + 28x + 24,$$

следовательно, исходное уравнение можно представить в виде

$$(x-1)(7x^2 + 28x + 24) = 0.$$

Решая уравнение  $7x^2 + 28x + 24 = 0$ , находим еще два корня:

$$x_2 = -2 - \frac{2\sqrt{7}}{7}; \quad x_3 = -2 + \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Ответ:  $x_1 = 1, x_{2,3} = -2 \pm \frac{2\sqrt{7}}{7}$ .

**6.138.**  $(x^2 - 6x)^2 - 2(x-3)^2 = 81$ .

*Решение.*

Из условия  $(x^2 - 6x)^2 - 2(x^2 - 6x + 9) - 81 = 0$ . Обозначим  $x^2 - 6x = y$ .

Имеем:  $y^2 - 2(y+9) - 81 = 0, y^2 - 2y - 99 = 0 \Rightarrow y_1 = -9; y_2 = 11$ . Тогда

1)  $x^2 - 6x = -9, (x-3)^2 = 0, x_{1,2} = 3$ ; 2)  $x^2 - 6x = 11, x^2 - 6x - 11 = 0,$

$$x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{20} = 3 \pm 2\sqrt{5}.$$

Ответ:  $x_{1,2} = 3; x_{3,4} = 3 \pm 2\sqrt{5}$ .

**6.139.**  $(x+1)^5 + (x-1)^5 = 32x$ .

*Решение.*

Так как  $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \dots + b^{n-1})$ , то

$$\begin{aligned} & (x+1+x-1)\left((x+1)^4 - (x+1)^3(x-1) + (x+1)^2(x-1)^2 - (x+1)(x-1)^3 + \right. \\ & \left. + (x-1)^4\right) = 32x, \quad 2x\left((x+1)^4 + (x-1)^4 - (x+1)^3(x-1) - (x+1)(x-1)^3 + \right. \\ & \left. + (x+1)^2(x-1)^2\right) - 32x = 0; \quad x\left((x+1)^4 + (x-1)^4 - (x+1)^3(x-1) - (x+1) \times \right. \\ & \left. \times (x-1)^3 + (x+1)^2(x-1)^2 - 16\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad \text{или } (x+1)^4 + (x-1)^4 - \\ & - (x+1)^3(x-1) - (x+1)(x-1)^3 + (x+1)^2(x-1)^2 - 16 = 0. \end{aligned}$$

Так как  $a^4 + b^4 = ((a-b)^2 + 2ab)^2 - 2a^2b^2$ , то имеем:

$$\begin{aligned} & \left( (x+1-x+1)^2 + 2(x+1)(x-1) \right)^2 - 2(x+1)^2(x-1)^2 - (x+1)(x-1) \times \\ & \times \left( (x+1)^2 + (x-1)^2 \right) + (x+1)^2(x-1)^2 - 16 = 0, \quad (4+2(x+1)(x-1))^2 - \\ & - (x+1)^2(x-1)^2 - (x+1)(x-1) \left( (x+1)^2 + (x-1)^2 \right) - 16 = 0, \quad (4+2(x+1) \times \\ & \times (x-1))^2 - (x+1)^2(x-1)^2 - (x+1)(x-1) \left( (x+1-x+1)^2 + 2(x+1)(x-1) \right) - \\ & - 16 = 0, \text{ или } (4+2(x^2-1))^2 - (x^2-1)^2 - (x^2-1)(4+2(x^2-1)) - 16 = 0. \end{aligned}$$

Обозначим  $x^2 - 1 = y$ . Имеем  $(4+2y)^2 - y^2 - y(4+2y) - 16 = 0$ ,  
 $16 + 16y + 4y^2 - y^2 - 4y - 2y^2 - 16 = 0$ ,  $y^2 + 12y = 0$ ,  $y(y+12) = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow y_1 = 0$ ,  $y_2 = -12$ . Тогда  $x^2 - 1 = 0$ ,  $x_{2,3} = \pm 1$ , или  $x^2 - 1 = -12$ , откуда  
 $x^2 = -11 < 0$ , не подходит.

Ответ:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 1$ .

**6.140.**  $\frac{z^2 - z}{z^2 - z + 1} - \frac{z^2 - z + 2}{z^2 - z - 2} = 1.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } z^2 - z - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1, \\ z \neq 2. \end{cases}$$

Пусть  $z^2 - z = y$ . Имеем:

$$\frac{y}{y+1} - \frac{y+2}{y-2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{y(y-2) - (y+2)(y+1) - (y+1)(y-2)}{(y+1)(y-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(y+4)}{(y+1)(y-2)} = 0, \text{ откуда } y_1 = 0, y_2 = -4. \text{ Тогда } z^2 - z = 0, z_1 = 0,$$

$z_2 = 1$ , или  $z^2 - z + 4 = 0 (D < 0)$  и решений нет.

Ответ:  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ .

$$6.141. \frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 + 2x - 8 \neq 0, \\ x^2 + 2x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4, \\ x \neq 2, \\ x \neq -3, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Пусть  $x^2 + 2x = y$ .

$$\text{Имеем } \frac{24}{y-8} - \frac{15}{y-3} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{y(2y-31)}{(y-8)(y-3)} = 0, \quad \text{откуда } y_1 = 0,$$

$$y_2 = \frac{31}{2}. \quad \text{Тогда } x^2 + 2x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -2, \quad \text{или } x^2 + 2 = \frac{31}{2}, \quad \text{откуда}$$

$$x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{66}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 0, \quad x_2 = -2, \quad x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{66}}{2}.$$

$$6.142. \quad x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0.$$

Решение.

Проверкой убеждаемся, что  $x_1 = a$ , так как  $a^3 - a^2 - a^2b - a^2c + a^2b + a^2c + abc - abc = 0$ . Делим левую часть уравнения на  $x - a$ :

$$\frac{x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc}{x-a} = x^2 - (b+c)x + bc.$$

Данное уравнение можно представить в виде:

$$(x-a)(x^2 - (b+c)x + bc) = 0.$$

Решая уравнение  $x^2 - (b+c)x + bc = 0$ , находим два его корня:

$$x_{2,3} = \frac{b+c \pm \sqrt{(b+c)^2 - 4bc}}{2} = \frac{b+c \pm \sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 4bc}}{2} =$$

$$= \frac{b+c \pm \sqrt{b^2 - 2bc + c^2}}{2} = \frac{b+c \pm \sqrt{(b-c)^2}}{2} = \frac{b+c \pm (b-c)}{2};$$

$$x_2 = \frac{b+c-b+c}{2} = c, \quad x_3 = \frac{b+c+b-c}{2} = b.$$

Ответ:  $x_1 = a$ ,  $x_2 = c$ ,  $x_3 = b$ .

**6.143.**  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{10}{9}$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -2. \end{cases}$

Из условия  $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x+2}\right)^2 - \frac{10}{9} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x+2-x}{x(x+2)}\right)^2 + \frac{2}{x(x+2)} - \frac{10}{9} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{x(x+2)}\right)^2 + \frac{2}{x(x+2)} - \frac{10}{9} = 0$ .

Пусть  $\frac{2}{x(x+2)} = y$ . Имеем  $9y^2 + 9y - 10 = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{10}{9}$ ,  $y_2 = \frac{2}{3}$ . Тогда

или  $\frac{2}{x(x+2)} = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{x(x+2)} = -\frac{10}{9} \Rightarrow x_1 = -3$ ,  $x_2 = 1$ ; второе уравнение корней не имеет, т.к.  $D < 0$ .

Ответ:  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 1$ .

**6.144.**  $(x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2 = 55$ .

Решение.

Из условия имеем  $(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x + 1) = 55$ . Пусть  $x^2 + 2x = y$ .

Относительно уравнение принимает вид  $y^2 - y - 56 = 0 \Rightarrow y_1 = -7$ ,  $y_2 = 8$ .

Тогда  $x^2 + 2x = -7$  или  $x^2 + 2x = 8$ ,  $x^2 + 2x + 7 = 0$  или  $x^2 + 2x - 8 = 0$ , откуда  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 2$ . Первое уравнение решений не имеет, т.к.  $D < 0$ .

Ответ:  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 2$ .

$$6.145. (x+1)^2(x+2) + (x-1)^2(x-2) = 12.$$

*Решение.*

Имеем:

$$(x^2 + 2x + 1)(x + 2) + (x^2 - 2x + 1)(x - 2) - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 2x^2 + 4x + x + 2 + x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 4x + x - 2 - 12 = 0,$$

$$2x^3 + 10x - 12 = 0, x^3 + 5x - 6 = 0.$$

Последнее уравнение перепишем в виде:

$$x^3 + 5x - 5 - 1 = 0, (x^3 - 1) + 5(x - 1) = 0, (x - 1)(x^2 + x + 1) + 5(x - 1) = 0,$$

$(x - 1)(x^2 + x + 6) = 0$ , откуда  $x - 1 = 0$ ,  $x_1 = 1$ , или  $x^2 + x + 6 = 0$ ,  $D < 0$  и корней нет.

*Ответ:*  $x = 1$ .

$$6.146. \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} = 1.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq -2, \\ x \neq -3, \\ x \neq -4. \end{cases}$$

$$\text{Из условия } \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-4)(x-2)(x-3) - (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)} = 0.$$

Имеем  $(x-1)(x-4)(x-2)(x-3) - (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = 0$  при  $x \neq -1$ ,

$$x \neq -2, x \neq -3, x \neq -4; (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) - (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 0,$$

$$(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 - (x^2 + 5x)^2 - 10(x^2 + 5x) - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -20x(x^2 + 5) = 0, \text{ откуда } x_1 = 0, x^2 + 5 \neq 0.$$

*Ответ:*  $x = 0$ .

$$6.147. \quad \frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \neq -2, \\ x \neq -4. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде  $\frac{6}{x^2+3x+2} + \frac{8}{x^2+3x-4} - 1 = 0$  и обо-

значим  $x^2 + 3x = y$ , тогда имеем:

$$\frac{6}{y+2} + \frac{8}{y-4} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{y(y-16)}{(y+2)(y-4)} = 0, \text{ откуда } y_1 = 0, y_2 = 16.$$

Тогда  $x^2 + 3x = 0$  или  $x^2 + 3x = 16$ ;  $x_1 = 0, x_2 = -3, x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$ .

$$\text{Ответ: } x_1 = 0, x_2 = -3, x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}.$$

$$6.148. \quad 3\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 4.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $x \neq 0$ .

Перепишем уравнение в виде  $3\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) = 0$  и положим

$x - \frac{1}{x} = y$ . Тогда получим  $2y^2 + 3y = 0$ , откуда  $y_1 = 0, y_2 = -\frac{3}{2}$ . Зна-

чит,  $x - \frac{1}{x} = 0$  или  $x - \frac{1}{x} = -\frac{3}{2}$ .

Решив эти уравнения, находим  $x_{1,2} = \pm 1, x_3 = -2, x_4 = 0,5$ .

$$\text{Ответ: } x_{1,2} = \pm 1, x_3 = -2, x_4 = 0,5.$$

$$6.149. \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = -2,5.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $x \neq 0$ .

Пусть  $\frac{x^2+1}{x} = y$ . Получаем  $y + \frac{1}{y} = -2,5 \Leftrightarrow y^2 + 2,5y + 1 = 0$ , откуда

$$y_1 = -2, y_2 = -\frac{1}{2}. \text{ Тогда } \frac{x^2+1}{x} = -2 \text{ или } \frac{x^2+1}{x} = -\frac{1}{2}. \text{ Отсюда}$$

$x^2 + 2x + 1 = 0$  или  $2x^2 + x + 2 = 0$  при  $x \neq 0$ . Решая эти уравнения, получим  $x_{1,2} = -1$ ; второе уравнение корней не имеет, т.к.  $D < 0$ .

*Ответ:*  $x_{1,2} = -1$ .

$$6.150. \frac{u^2}{2-u^2} + \frac{u}{2-u} = 2.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} u \neq 2, \\ u \neq \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\text{Из условия имеем } \frac{u^2(2-u) + u(2-u^2) - 2(2-u^2)(2-u)}{(2-u^2)(2-u)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2u^3 - 3u^2 - 3u + 4}{(2-u^2)(2-u)} = 0 \Leftrightarrow 2u^3 - 3u^2 - 3u + 4 = 0.$$

Представим уравнение в виде  $(2u^3 - 2u^2) - (u^2 - u) - (4u - 4) = 0$ ,

$$2u^2(u-1) - u(u-1) - 4(u-1) = 0, (u-1)(2u^2 - u - 4) = 0, \text{ тогда } u-1 = 0,$$

$$\text{или } 2u^2 - u - 4 = 0, \text{ откуда } u_1 = 1; u_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

$$\text{Ответ: } u_1 = 1; u_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}.$$



$$6.151. \frac{x-m}{x-1} + \frac{x+m}{x+1} = \frac{x-2m}{x-2} + \frac{x+2m}{x+2} - \frac{6(m-1)}{5}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

$$\text{Из условия имеем } \frac{(x-m)(x+1) + (x+m)(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{(x-2m)(x+2) + (x+2m)(x-2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{6(m-1)}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2m}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - 8m}{x^2 - 4} - \frac{6(m-1)}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - m}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 4m}{x^2 - 4} - \frac{3(m-1)}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - m}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - 4m}{x^2 - 4} = -\frac{3(m-1)}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - m)(x^2 - 4) - (x^2 - 4m)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)} = -\frac{3(m-1)}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3mx^2 - 3x^2}{x^4 - 5x^2 + 4} = -\frac{3(m-1)}{5} \Leftrightarrow \frac{3x^2(m-1)}{x^4 - 5x^2 + 4} + \frac{3(m-1)}{5} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(m-1)}{x^4 - 5x^2 + 4} + \frac{m-1}{5} = 0 \Leftrightarrow (m-1) \left( \frac{x^2}{x^4 - 5x^2 + 4} + \frac{1}{5} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m-1)(5x^2 + x^4 - 5x^2 + 4)}{5(x^4 - 5x^2 + 4)} = 0 \Leftrightarrow \frac{(m-1)(x^4 + 4)}{x^4 - 5x^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(x^4 + 4) = 0, \\ x^4 - 5x^2 + 4 \neq 0. \end{cases}$$

1) Если  $m-1 \neq 0$  или  $m \neq 1$ , то  $x^4 + 4 = 0$ , корней нет.

2) Если  $m-1 = 0$  или  $m = 1$ , то  $x \in R$ ,  $x \neq \pm 1$ ,  $x \neq \pm 2$ .

Ответ: если  $m = 1$ , то  $x \in R$ , кроме  $\pm 1, \pm 2$ ; если  $m \neq 1$ , то корней нет.

$$6.152. \frac{z+4}{z-1} + \frac{z-4}{z+1} = \frac{z+8}{z-2} + \frac{z-8}{z+2} + 6.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} z \neq \pm 1, \\ z \neq \pm 2. \end{cases}$$

Из условия получаем:

$$\begin{aligned} \frac{(z+4)(z+1) + (z-4)(z-1)}{(z-1)(z+1)} &= \frac{(z+8)(z+2) + (z-8)(z-2)}{(z-2)(z+2)} + 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2z^2+8}{z^2-1} &= \frac{2z^2+32}{z^2-4} + 6 \Leftrightarrow \frac{z^2+4}{z^2-1} = \frac{z^2+16}{z^2-4} + 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{z^2+4}{z^2-1} - \frac{z^2+16}{z^2-4} &= 3 \Leftrightarrow \frac{(z^2+4)(z^2-4) - (z^2+16)(z^2-1)}{(z^2-1)(z^2-4)} = 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-15z^2}{z^4-5z^2+4} &= 3 \Leftrightarrow \frac{5z^2}{z^4-5z^2+4} = -1 \Leftrightarrow \frac{5z^2}{z^4-5z^2+4} + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{5z^2+z^4-5z^2+4}{z^4-5z^2+4} &= 0, \quad \frac{z^4+4}{z^4-5z^2+4} = 0, \end{aligned}$$

откуда  $z^4 + 4 = 0$  и решений нет.

Ответ: корней нет.

$$6.153. (2x+a)^5 - (2x-a)^5 = 242a^5.$$

Решение.

$$\begin{aligned} a^5 - b^5 &= (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = (a-b)\left((a^4 + b^4) + \right. \\ &+ (a^3b + ab^3) + a^2b^2) = (a-b)\left(\left((a-b)^2 + 2ab\right)^2 - 2a^2b^2 + ab(a^2 + b^2) + \right. \\ &+ a^2b^2) = (a-b)\left(\left((a-b)^2 + 2ab\right)^2 - a^2b^2 + ab\left((a-b)^2 + 2ab\right)\right). \end{aligned}$$

$$(2x+a-2x+a)\left(\left((2x+a-2x+a)^2+2(2x+a)(2x-a)\right)^2-(2x+a)^2 \times\right. \\ \left.\times(2x-a)^2+(2x+a)(2x-a)\left((2x+a-2x+a)^2+2(2x+a)(2x-a)\right)\right)=242a^5$$

$$\text{или } 2a\left(\left(4a^2+2(4x^2-a^2)\right)^2-(4x^2-a^2)^2+(4x^2-a^2)\left(4a^2+2(4x^2-a^2)\right)\right)- \\ -242a^5=0 \Leftrightarrow a\left(\left(4a^2+2(4x^2-a^2)\right)^2-(4x^2-a^2)^2+(4x^2-a^2) \times\right. \\ \left.\times\left(4a^2+2(4x^2-a^2)\right)-121a^4\right)=0.$$

Отсюда

1) если  $a=0$ , то  $x$  — любое число;

$$2) \text{ если } a \neq 0, \text{ то } \left(4a^2+2(4x^2-a^2)\right)^2-(4x^2-a^2)^2+(4x^2-a^2) \times \\ \times\left(4a^2+2(4x^2-a^2)\right)-121a^4=0.$$

Пусть  $4x^2-a^2=y$ , тогда относительно  $y$  уравнение имеет вид:

$$\left(4a^2+2y\right)^2-y^2+y\left(4a^2+2y\right)-121a^4=0,$$

$$16a^4+16a^2y+4y^2-y^2+4a^2y+2y^2-121a^4=0.$$

Отсюда  $5y^2+20a^2y-105a^4=0$ ,  $y^2+4a^2y-21a^4=0$ , откуда

$$y_{1,2}=-2a^2 \pm \sqrt{4a^4+21a^4}=-2a^2 \pm 5a^2; y_1=-7a^2, y_2=3a^2. \text{ Тогда}$$

$$1) 4x^2-a^2=-7a^2, x^2=-\frac{3}{2}a^2, \text{ нет решений при } a \neq 0;$$

$$2) 4x^2-a^2=3a^2, x^2=a^2, \text{ откуда } x_{1,2}=\pm a.$$

Ответ: если  $a=0$ , то  $x$  — любое число; если  $a \neq 0$ , то  $x_{1,2}=\pm a$ .

$$6.154. \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6}.$$

Решение.

Пусть  $x^2+2x=y$ , тогда относительно  $y$  уравнение принимает вид

$$\frac{y+1}{y+2} + \frac{y+2}{y+3} - \frac{7}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{6(y+1)(y+3)+6(y+2)^2-7(y+2)(y+3)}{6(y+2)(y+3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5y^2 + 13y}{(y+2)(y+3)} = 0, 5y^2 + 13y = 0 \text{ при } y \neq -2 \text{ и } y \neq -3; y(5y+13) = 0, \text{ от-}$$

куда  $y_1 = 0, y_2 = -\frac{13}{5}$ . Тогда  $x^2 + 2x = 0$  или  $x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,$

$x_2 = -2; x^2 + 2x = -\frac{13}{5}, 5x^2 + 10x + 13 = 0$ , решений нет, т.к.  $D < 0$ .

*Ответ:*  $x_1 = 0, x_2 = -2$ .

**6.155.**  $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$ .

*Решение.*

Имеем  $(ax^4 - x^3) + (a^2x - a) = 0 \Leftrightarrow x^3(ax - 1) + a(ax - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (ax - 1)(x^3 + a) = 0$ . Тогда  $ax - 1 = 0$ , откуда  $x_1 = \frac{1}{a}$ , или  $x^3 + a = 0$ , от-

куда  $x_3 = \sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$  при  $a \neq 0; x = 0$  при  $a = 0$ .

*Ответ:*  $x_1 = \frac{1}{a}, x_2 = -\sqrt[3]{a}$  при  $a \neq 0; x = 0$  при  $a = 0$ .

**6.156.**  $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $x \neq \pm 1$ .

Разделив уравнение на  $\frac{x^2-4}{x^2-1} \neq 0$ , имеем

$$20 \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-4} - 5 \frac{(x+2)^2}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-4} + 48 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 \frac{(x-2)^2(x-1)(x+1)}{(x+1)^2(x-2)(x+2)} - 5 \frac{(x+2)^2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x-2)(x+2)} + 48 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} - 5 \frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} + 48 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} - \frac{5}{\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}} + 48 = 0.$$

Пусть  $\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = y$ , где  $y \neq 0$ . Относительно  $y$  уравнение принимает

вид  $20y - \frac{5}{y} + 48 = 0 \Leftrightarrow 20y^2 + 48y - 5 = 0$ , откуда  $y_1 = -\frac{5}{2}$ ,  $y_2 = -\frac{1}{10}$ .

Тогда

1)  $\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 7x^2 + 9x + 14 = 0$ , решений нет, т.к.  $D < 0$ ;

2)  $\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = -\frac{1}{10} \Leftrightarrow 9x^2 - 33x + 18 = 0$ , откуда  $x_3 = \frac{2}{3}$ ,  $x_4 = 3$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{2}{3}$ ,  $x_2 = 3$ .

**6.157.**  $2(x-1)^2 - 5(x-1)(x-a) + 2(x-a)^2 = 0$ .

*Решение.*

Разделив уравнение на  $(x-a)^2 \neq 0$ , имеем

$$2\left(\frac{x-1}{x-a}\right)^2 - 5\left(\frac{x-1}{x-a}\right) + 2 = 0.$$

Пусть  $\frac{x-1}{x-a} = y$ .

Относительно  $y$  уравнение принимает вид  $2y^2 - 5y + 2 = 0$ , откуда

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = 2.$$

Тогда  $\frac{x-1}{x-a} = \frac{1}{2}$ ,  $x_1 = 2-a$ ; или  $\frac{x-1}{x-a} = 2$ ,  $x_2 = 2a-1$ .

Если  $x-a=0$ , то  $a-1=0$  и  $x=a=1$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2-a$ ;  $x_2 = 2a-1$ .

$$6.158. \sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x+1 \geq 0 \text{ или } x \geq -1.$$

Пусть  $\sqrt{x+1} = y \geq 0$ . Относительно  $y$  уравнение принимает вид

$$\sqrt[3]{9-y} + \sqrt[3]{7+y} = 4. \text{ Возведя обе части уравнения в куб, получим}$$

$$9-y + \sqrt[3]{(9-y)^2(7+y)} + 3\sqrt[3]{(9-y)(7+y)^2} + 7+y = 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(9-y)^2(7+y)} + 3\sqrt[3]{(9-y)(7+y)^2} = 48 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(9-y)(7+y)} \times (\sqrt[3]{9-y} + \sqrt[3]{7+y}) = 48.$$

Так как по условию  $\sqrt[3]{9-y} + \sqrt[3]{7+y} = 4$ , то

$$12\sqrt[3]{(9-y)(7+y)} = 48 \Leftrightarrow (9-y)(7+y) = 64, y^2 - 2y + 1 = 0, (y-1)^2 = 0,$$

откуда  $y_{1,2} = 1$ .

$$\text{Тогда } \sqrt{x+1} = 1, x = 0.$$

*Ответ:*  $x = 0$ .

$$6.159. \sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2} = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x+2 \geq 0, x \geq -2.$$

$$\text{Из условия } \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{3x+2} \Rightarrow (x+2)^3 = (3x+2)^2,$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 9x^2 + 12x + 4 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) - 3(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) = 0,$$

$$(x+1)(x-2)^2 = 0. \text{ Отсюда } x+1 = 0, x_1 = -1, \text{ или } (x-2)^2 = 0, x_{2,3} = 2.$$

При подстановке в исходное уравнение убеждаемся, что  $x_1 = -1$  — посторонний корень.

*Ответ:*  $x = 2$ .

$$6.160. \sqrt{\frac{20+x}{x}} + \sqrt{\frac{20-x}{x}} = \sqrt{6}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{20+x}{x} \geq 0, \\ \frac{20-x}{x} \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+20) \geq 0, \\ x(x-20) \geq 0, \\ x \neq 0, 0 < x \leq 20. \end{cases}$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$\frac{20+x}{x} + 2\sqrt{\frac{(20+x)(20-x)}{x^2}} + \frac{20-x}{x} = 6 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{400-x^2}}{x} = \frac{3x-20}{x} \Rightarrow$$

$$\sqrt{400-x^2} = 3x-20, \text{ где } 3x-20 \geq 0, x \geq \frac{20}{3}.$$

Далее:  $400-x^2 = 9x^2 - 120x + 400 \Leftrightarrow x(x-12) = 0$ , откуда  $x_1 = 0$ ,

$x_2 = 12$ ;  $x_1 = 0 < \frac{20}{3}$  не подходит.

*Ответ:*  $x = 12$ .

$$6.161. (x-1)x(x+1) + x(x+1)(x+2) = 3x^2 + x + 18x\sqrt{x} - 16.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $x \geq 0$ .

Из условия имеем:

$$x(x+1)(x-1+x+2) = 3x^2 + x + 18x\sqrt{x} - 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x)(2x+1) = 3x^2 + x + 18x\sqrt{x} - 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 + x = 3x^2 + x + 18x\sqrt{x} - 16 \Leftrightarrow x^3 - 9x\sqrt{x} + 8 = 0.$$

Пусть  $\sqrt{x} = y \geq 0$ .

Относительно  $y$  уравнение принимает вид  $y^6 - 9y^3 + 8 = 0$ , откуда  $y^3 = 1, y^3 = 8 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 2$ .

Получили  $\sqrt{x} = 1$  или  $x_1 = 1$ ;  $\sqrt{x} = 2, x_2 = 4$ .

*Ответ:*  $x_1 = 1; x_2 = 4$ .

$$6.162. \sqrt[7]{(ax-b)^3} - \sqrt[7]{(b-ax)^{-3}} = \frac{65}{8} \quad (a \neq 0).$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{b}{a}.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt[7]{(ax-b)^3} - \frac{1}{\sqrt[7]{(b-ax)^3}} = \frac{65}{8} \Leftrightarrow \sqrt[7]{(ax-b)^3} + \frac{1}{\sqrt[7]{(ax-b)^3}} - \frac{65}{8} = 0.$$

Пусть  $\sqrt[7]{(ax-b)^3} = y \neq 0$ . Относительно  $y$  уравнение принимает вид

$$y + \frac{1}{y} - \frac{65}{8} = 0 \Leftrightarrow 8y^2 - 65y + 8 = 0, \text{ откуда } y_1 = \frac{1}{8}, y_2 = 8. \text{ Тогда:}$$

$$\sqrt[7]{(ax-b)^3} = \frac{1}{8}, \quad \sqrt[7]{(ax-b)^3} = 8 \Leftrightarrow ax-b = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{7}{3}} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^{\frac{7}{3}} = \frac{1}{2^7},$$

$$ax-b = 8^{\frac{7}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{7}{3}} = 2^7 \Rightarrow x_1 = \frac{\frac{1}{2^7} + b}{a} = \frac{1+128b}{128a}, \quad x_2 = \frac{2^7 + b}{a} = \frac{128+b}{a}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{1+128b}{128a}, \quad x_2 = \frac{128+b}{a}.$$

$$6.163. 5\sqrt[15]{x^{22}} + \sqrt[15]{x^{14}} \cdot \sqrt{x} - 22\sqrt[15]{x^7} = 0.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x \geq 0.$$

$$\text{Из условия } 5x^{\frac{22}{15}} + x^{\frac{27}{30}} - 22x^{\frac{7}{15}} = 0 \Leftrightarrow 5x^{\frac{44}{30}} + x^{\frac{27}{30}} - 22x^{\frac{14}{30}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{14}{30}} \left( 5x + x^{\frac{1}{2}} - 22 \right) = 0. \text{ Тогда } x^{\frac{14}{30}} = 0, \quad x_1 = 0 \text{ или } 5x + x^{\frac{1}{2}} - 22 = 0.$$

Пусть  $x^{\frac{1}{2}} = y \geq 0$ . Относительно  $y$  уравнение принимает вид



$5y^2 + y - 22 = 0$ , откуда  $y_1 = -\frac{11}{5}$ ,  $y_2 = 2$ ;  $y_1 = -\frac{11}{5} < 0$  не подходит. Тогда

$$x_2^{\frac{1}{2}} = 2, x_2 = 4.$$

*Ответ:*  $x_1 = 0, x_2 = 4$ .

**6.164.**  $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}} = 4$ .

*Решение.*

Пусть  $\sqrt{x+7} = y \geq 0$ ,  $x+7 = y^2$ ,  $x = y^2 - 7$ .

Относительно  $y$  уравнение принимает вид

$$\sqrt{y^2 + 2y + 1} + \sqrt{y^2 - y - 6} = 4, \sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{y^2 - y - 6} = 4,$$

$$|y+1| + \sqrt{y^2 - y - 6} = 4.$$

Так как  $y \geq 0$ , то  $y+1 + \sqrt{y^2 - y - 6} = 4$ ,  $\sqrt{y^2 - y - 6} = 3 - y$ , где

$3 - y \geq 0$ ,  $y \leq 3$ . Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$y^2 - y - 6 = 9 - 6y + y^2, y = 3. \text{ Тогда } \sqrt{x+7} = 3, x+7 = 9, x = 2.$$

*Ответ:*  $x = 2$ .

**6.165.**  $\sqrt{\frac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}} + \sqrt{\frac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}} = \frac{13}{6}$ .

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{\frac{x^2+7x-18}{x^2-6x+8}} + \sqrt{\frac{x^2-6x+8}{x^2+7x-18}} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(x+9)(x-2)}{(x-4)(x-2)}} + \sqrt{\frac{(x-4)(x-2)}{(x+9)(x-2)}} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x+9}{x-4}} + \sqrt{\frac{x-4}{x+9}} = \frac{13}{6}, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -\frac{x+9}{x-4} > 0, \\ x \neq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)(x-4) < 0, \\ x \neq 2, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-9; 2) \cup (2; 4).$$

Пусть  $\sqrt{-\frac{x+9}{x-4}} = y$ , где  $y > 0$ . Относительно  $y$  уравнение принимает

$$\text{вид } y + \frac{1}{y} - \frac{13}{6} = 0 \Leftrightarrow 6y^2 - 13y + 6 = 0, \text{ откуда } y_1 = \frac{2}{3}, y_2 = \frac{3}{2}. \text{ Тогда}$$

$$\sqrt{-\frac{x+9}{x-4}} = \frac{2}{3} \text{ или } \sqrt{-\frac{x+9}{x-4}} = \frac{3}{2}. \text{ Отсюда } -\frac{x+9}{x-4} = \frac{4}{9}, \text{ или } -\frac{x+9}{x-4} = \frac{9}{4},$$

откуда  $x_1 = 0, x_2 = -5$ .

*Ответ:*  $x_1 = 0, x_2 = -5$ .

$$6.166. (x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6.$$

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде  $x^2 + 5x + 4 - \sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 2 - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 0$ . Пусть  $\sqrt{x^2 + 5x + 2} = y$ , где  $y \geq 0$ ,  $x^2 + 5x + 2 = y^2$ ,  $x^2 + 5x = y^2 - 2$ . Относительно  $y$  уравнение имеет вид  $y^2 - 3y - 4 = 0$ , откуда  $y_1 = -1, y_2 = 4$ ;  $y_1 = -1 < 0$  не подходит.

Тогда  $\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 4$ ,  $x^2 + 5x + 2 = 16$ ,  $x^2 + 5x - 14 = 0$ , откуда  $x_1 = -7, x_2 = 2$ .

*Ответ:*  $x_1 = -7, x_2 = 2$ .

$$6.167. \sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}.$$

*Решение.*

$$\text{Из условия } \sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2(x^2+x)+9}.$$

Пусть  $x^2 + x = y$ . Относительно  $y$  уравнение принимает вид

$$\sqrt{y+4} + \sqrt{y+1} = \sqrt{2y+9}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$y + 4 + 2\sqrt{(y+4)(y+1)} + y + 1 = 2y + 9 \Leftrightarrow \sqrt{(y+4)(y+1)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 5y + 4 = 4, y^2 + 5y = 0, \text{ откуда } y_1 = 0, y_2 = -5.$$

Тогда  $x^2 + x = 0$  или  $x^2 + x = -5$ . Решая каждое из полученных уравнений, находим  $x_1 = 0, x_2 = -1$ ; второе уравнение решений не имеет, т.к.  $D < 0$ .

*Ответ:*  $x_1 = 0, x_2 = -1$ .

**6.168.**  $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7.$

*Решение.*

Пусть  $3x^2 - 2x = y$ . Относительно  $y$  уравнение принимает вид  $\sqrt{y+15} + \sqrt{y+8} = 7$ . Возведя обе части уравнения в квадрат, получим  $y + 15 + 2\sqrt{(y+15)(y+8)} + y + 8 = 49 \Leftrightarrow \sqrt{(y+15)(y+8)} = 13 - y$ , где  $13 - y \geq 0, y \leq 13$ . Отсюда  $(y+15)(y+8) = (13-y)^2, y = 1$ .

Тогда  $3x^2 - 2x = 1, 3x^2 - 2x - 1 = 0$ , откуда  $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1$ .

*Ответ:*  $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1$ .

**6.169.**  $\sqrt{x} + \frac{2x+1}{x+2} = 2.$

*Решение.*

ОДЗ:  $x \geq 0$ .

Из условия имеем  $\sqrt{x} = 2 - \frac{2x+1}{x+2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2x+4-2x-1}{x+2}, \sqrt{x} = \frac{3}{x+2}.$

Возведя обе части уравнения в квадрат, имеем  $x = \frac{3}{x^2 + 4x + 4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 + 4x^2 + 4x - 9}{x^2 + 4x + 4} = 0, \text{ откуда } x^3 + 4x^2 + 4x - 9 = 0 \text{ при } x \neq -2.$$

Перепишем уравнение в виде  $(x^3 - 1) + (4x^2 - 4) + (4x - 4) = 0,$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) + 4(x-1)(x+1) + 4(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 5x + 9) = 0.$$

Отсюда  $x - 1 = 0$  или  $x^2 + 5x + 9 = 0$ . Из последних двух уравнений имеем  $x_1 = 1$ ; второе уравнение решений не имеет, т.к.  $D < 0$ .

Ответ:  $x = 1$ .

$$6.170. \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 16} - 6.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+4 \geq 0, \\ x-4 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$\frac{x+4+2\sqrt{(x+4)(x-4)}+x-4}{4} = \left(x + \sqrt{x^2 - 16}\right)^2 - 12\left(x + \sqrt{x^2 - 16}\right) + 36,$$

$$2\left(x + \sqrt{x^2 - 16}\right) - 25\left(x + \sqrt{x^2 - 16}\right) + 72 = 0.$$

Пусть  $x + \sqrt{x^2 - 16} = y$ . Относительно  $y$  уравнение принимает вид

$$2y^2 - 25y + 72 = 0, \text{ откуда } y_1 = \frac{9}{2}, y_2 = 8.$$

Тогда

$$1) x + \sqrt{x^2 - 16} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 16} = 9 - 2x, \text{ где } 9 - 2x \geq 0, x \leq 4,5.$$

После возведения уравнения в квадрат получим

$$4x^2 - 64 = 81 - 36x + 4x^2, 36x = 145, x_1 = \frac{145}{36}; \text{ не подходит;}$$

2)  $x + \sqrt{x^2 - 16} = 8, \sqrt{x^2 - 16} = 8 - x$ , где  $8 - x \geq 0, x \leq 8$ . После возведения уравнения в квадрат, получим  $x^2 - 16 = 64 - 16x + x^2, x = 5$ .

Ответ:  $x = 5$ .

$$6.171. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}.$$

Решение.

После возведения обеих частей уравнения в куб имеем

$$x + 3\sqrt[3]{x^2(x-16)} - 3\sqrt[3]{x(x-16)^2} + x - 16 = x - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x(x-16)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16}) = 8 - x.$$

Так как по условию  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$ , то имеем

$$3\sqrt[3]{x(x-16)}(x-8) = 8 - x.$$

Отсюда

$$27x(x-16)(x-8) = (8-x)^3 \Leftrightarrow 27x(x-16)(x-8) + (x-8)^3 = 0,$$

$$(x-8)(27x(x-16) + (x-8)^2) = 0, \quad (x-8)(7x^2 - 112x + 16) = 0 \Rightarrow x-8=0,$$

$$x_1 = 8, \text{ или } 7x^2 - 112x + 16 = 0, \text{ откуда } x_{2,3} = \frac{56 \pm \sqrt{3024}}{7}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 8, \quad x_{2,3} = 8 \pm \frac{12\sqrt{21}}{7}.$$

$$6.172. \quad (x + \sqrt{x^2 - 1})^5 \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1})^3 = 1.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty).$$

Из условия имеем

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})^3 \cdot (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1})^3 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( (x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1}) \right)^3 \cdot (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x^2 + 1)^3 (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 = 1 \Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 = 1.$$

$$\text{Отсюда имеем } x + \sqrt{x^2 - 1} = 1 \text{ или } x + \sqrt{x^2 - 1} = -1.$$

Тогда  $\sqrt{x^2 - 1} = 1 - x$  или  $\sqrt{x^2 - 1} = -1 - x$ . Возведя оба уравнения в квадрат,

получим  $x^2 - 1 = 1 - 2x + x^2$  или  $x^2 - 1 = 1 + 2x + x^2$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ .

$$\text{Ответ: } x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$$

$$6.173. 2\sqrt{5\sqrt{x+1}+4} - \sqrt{2\sqrt{x+1}-1} = \sqrt{20\sqrt{x+1}+5}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2\sqrt{x+1}-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ 2\sqrt{x+1} \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{15}{16}.$$

Пусть  $\sqrt[4]{x+1} = y$ , где  $y \geq 0$ . Относительно  $y$  уравнение принимает вид  $2\sqrt{5y+4} - \sqrt{2y-1} = \sqrt{20y+5}$ . Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$20y+16-4\sqrt{(5y+4)(2y-1)}+2y-1=20y+5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y+5=2\sqrt{(5y+4)(2y-1)} \Leftrightarrow y^2+10y+25=4(10y^2+3y-4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 39y^2+2y-41=0, \text{ откуда } y_1 = -\frac{41}{39}, y_2 = 1; y_1 = -\frac{41}{39} < 0 \text{ не подхо-}$$

дит. Отсюда  $\sqrt[4]{x+1} = 1 \Leftrightarrow x+1=1, x=0$ .

Ответ:  $x=0$ .

$$6.174. \frac{z}{z+1} - 2\sqrt{\frac{z+1}{z}} = 3.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \frac{z+1}{z} > 0 \Leftrightarrow z \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty).$$

Пусть  $\sqrt{\frac{z+1}{z}} = y$ , где  $y > 0$ . Относительно  $y$  уравнение принимает вид

$$\frac{1}{y^2} - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y^3 + 3y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y^3 + 2y^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y^2(y+1) + (y-1)(y+1) = 0 \Leftrightarrow (y+1)(2y^2+y-1) = 0, y+1=0, \text{ от-}$$

куда  $y_1 = -1$ , или  $2y^2+y-1=0$ , откуда находим  $y_2 = -1, y_3 = \frac{1}{2}$ ;

$y_1 = y_2 = -1 < 0$  не подходит.

$$\text{Тогда } \sqrt{\frac{z+1}{z}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{z+1}{z} = \frac{1}{4}, \text{ откуда } z = -\frac{4}{3}.$$

Ответ:  $z = -\frac{4}{3}$ .

$$6.175. \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x-3} = 0.$$

*Решение.*

Из условия  $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$ , возведя обе части в куб, имеем

$$x-1 + 3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)} + 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x-2 = 2x-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)} \left( \sqrt[3]{(x-1)} + \sqrt[3]{(x-2)} \right) = 0.$$

Так как  $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$ , то уравнение принимает вид

$$3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)(2x-3)} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(2x-3) = 0,$$

откуда  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = \frac{3}{2}$ .

*Ответ:*  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = \frac{3}{2}$ .

$$6.176. (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^3 + (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2 = 2.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Пусть  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = y$ , где  $y \geq 0$ . Относительно  $y$  уравнение принимает вид

$$y^3 + y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow y^3 - 1 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y^2 + y + 1) + (y+1)(y-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y^2 + y + 1 + y + 1) = 0, \quad (y-1)(y^2 + 2y + 2) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно двум уравнениям:  $y-1=0$  и  $y^2 + 2y + 2 = 0$ , решив которые, найдем  $y_1 = 1$ ; второе уравнение решений не имеет, т.к.  $D < 0$ .

Тогда  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x+1 + 2\sqrt{(x+1)x} + x = 1, \quad \sqrt{(x+1)x} = -x$ , где

$$x \leq 0. \text{ Отсюда из ОДЗ получаем } \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

*Ответ:*  $x = 0$ .

$$6.177. \sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3} = 0.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x+3 \geq 0, x \geq -3.$$

Из условия  $\sqrt[3]{x+7} = \sqrt{x+3}$  и возведя обе части в шестую степень, получим

$$(x+7)^2 = (x+3)^3 \Leftrightarrow x^2 + 14x + 49 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^3 + 8x^2 + 13x - 22 = 0$ . Проверкой убеждаемся, что  $x_1 = 1$ , так как  $1 + 8 + 13 - 22 = 0$ . Левую часть уравнения разделим на  $x - 1$ :

$$\frac{x^3 + 8x^2 + 13x - 22}{x - 1} = x^2 + 9x + 22.$$

$$\text{Тогда } (x-1)(x^2 + 9x + 22) = 0.$$

Отсюда  $x - 1 = 0$ ,  $x_1 = 1$ , или  $x^2 + 9x + 22 = 0$ , решений нет, т.к.  $D < 0$ .

Ответ:  $x = 1$ .

$$6.178. \frac{\sqrt{(a-x)^2} + \sqrt{(a-x)(b-x)} + \sqrt{(b-x)^2}}{\sqrt{(a-x)^2} - \sqrt{(a-x)(b-x)} + \sqrt{(b-x)^2}} = \frac{7}{3}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } (a-x)(b-x) > 0.$$

Перепишем исходное уравнение в следующем виде

$$\frac{3\sqrt{(a-x)^2} + 3\sqrt{(a-x)(b-x)} + 3\sqrt{(b-x)^2}}{3\left(\sqrt{(a-x)^2} - \sqrt{(a-x)(b-x)} + \sqrt{(b-x)^2}\right)} + \frac{-7\sqrt{(a-x)^2} + 7\sqrt{(a-x)(b-x)} - 7\sqrt{(b-x)^2}}{3\left(\sqrt{(a-x)^2} - \sqrt{(a-x)(b-x)} + \sqrt{(b-x)^2}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\sqrt{(a-x)^2} + 10\sqrt{(a-x)(b-x)} - 4\sqrt{(b-x)^2} = 0$$

$$\text{при } \sqrt{(a-x)^2} - \sqrt{(a-x)(b-x)} + \sqrt{(b-x)^2} \neq 0.$$



Разделив обе части последнего уравнения на  $-2\sqrt{(b-x)^2} \neq 0$ , имеем

$$2\sqrt{\left(\frac{a-x}{b-x}\right)^2} - 5\sqrt{\frac{a-x}{b-x}} + 2 = 0.$$

Пусть  $\sqrt{\frac{a-x}{b-x}} = y$ , где  $y > 0$ . Относительно  $y$  уравнение принимает вид

$$2y^2 - 5y + 2 = 0, \text{ откуда находим } y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 2. \text{ Тогда } \sqrt{\frac{a-x}{b-x}} = \frac{1}{2} \text{ или}$$

$$\sqrt{\frac{a-x}{b-x}} = 2. \text{ Значит, } \frac{a-x}{b-x} = \frac{1}{4} \text{ или } \frac{a-x}{b-x} = 4, \text{ откуда находим}$$

$$x_1 = \frac{4a-b}{3}, x_2 = \frac{4b-a}{3}.$$

*Ответ:*  $x_1 = \frac{4a-b}{3}, x_2 = \frac{4b-a}{3}$ ; если  $a = b$ , то решений нет.

$$6.179. |x| + |x-1| = 1.$$

*Решение.*

Нанесем на числовую ось корни модулей и рассмотрим уравнение на полученных трех промежутках оси. Имеем три случая:

1) если  $x < 0$ , то  $-x - x + 1 = 1$ , откуда находим  $x = 0$ ; решений нет, поскольку  $x < 0$  не принадлежит рассматриваемому промежутку;

2) если  $0 \leq x < 1$ , то уравнение принимает вид  $x - x + 1 = 1$  или  $1 = 1$ ; решением будет  $x \in [0; 1)$ ;

3) если  $x \geq 1$ , то получаем  $x + x - 1 = 1$ , откуда  $x = 1$ .

*Ответ:*  $x \in [0; 1]$ .

$$6.180. (x^2 + x + 1) + (x^2 + 2x + 3) + (x^2 + 3x + 5) + \dots$$

$$\dots + (x^2 + 20x + 39) = 4500.$$

*Решение.*

Количество слагаемых равно 20. Запишем уравнение в виде

$$(x^2 + x^2 + \dots + x^2) + (x + 2x + 3x + \dots + 20x) + (1 + 3 + 5 + \dots + 39) = 4500 \Leftrightarrow$$

$$20x^2 + x(1 + 2 + 3 + \dots + 20) + (1 + 3 + 5 + \dots + 39) = 4500.$$

По формуле суммы членов арифметической прогрессии имеем

$$20x^2 + x \cdot \frac{1+20}{2} \cdot 20 + \frac{1+39}{2} \cdot 20 = 4500 \Leftrightarrow 2x^2 + 21x - 410 = 0,$$

откуда  $x_1 = -\frac{41}{2}$ ,  $x_2 = 10$ .

Ответ:  $x_1 = -\frac{41}{2}$ ,  $x_2 = 10$ .

**6.181.**  $\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+a+1} + \sqrt[3]{x+a+2} = 0$ .

*Решение.*

Перепишав уравнение в виде  $\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+a+1} = -\sqrt[3]{x+a+2}$  и возведя обе части в куб, получим

$$x+a+3\sqrt{(x+a)^2(x+a+1)} + 3\sqrt{(x+a)(x+a+1)^2} + x+a+1 = -(x+a+2),$$

$$\sqrt[3]{(x+a)(x+a+1)}(\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+a+1}) = -(x+a+1).$$

Так как  $\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+a+1} = -\sqrt[3]{x+a+2}$ , то имеем

$$-\sqrt[3]{(x+a)(x+a+1)(x+a+2)} = -(x+a+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+a)(x+a+1)(x+a+2)} = (x+a+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+a)(x+a+1)(x+a+2) = (x+a+1)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+a+1)((x+a)(x+a+2) - (x+a+1)^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+a+1)(-1) = 0, \text{ откуда } x = -(a+1).$$

Ответ:  $x = -(a+1)$ .

**6.182.**  $|x|^3 + |x-1|^3 = 9$ .

*Решение.*

Как и в № 6.179, имеем три случая

$$1) \begin{cases} x < 0, \\ -x^3 - (x-1)^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 2x^3 - 3x^2 + 3x + 8 = 0. \end{cases}$$

Проверкой убеждаемся, что  $x_1 = -1$ , так как  $-2 - 3 - 3 + 8 = 0$ . Делим

левую часть уравнения на  $x+1$ :  $\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 8}{x+1} = 2x^2 - 5x + 8$ .

Уравнение можно записать в виде  $(x+1)(2x^2 - 5x + 8) = 0$ . В уравнении

$2x^2 - 5x + 8 = 0$   $D < 0$  и корней нет.

$$2) \begin{cases} 0 \leq x < 1, \\ x^3 - (x-1)^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1, \\ 3x^2 - 3x - 8 = 0. \end{cases}$$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{6}$ . На втором промежутке решений нет, потому что ни

$x_1 = \frac{3 - \sqrt{105}}{6}$ , ни  $x_2 = \frac{3 + \sqrt{105}}{6}$  не принадлежат  $[0; 1]$ ;

$$3) \begin{cases} x \geq 1, \\ x^3 + (x-1)^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = 0. \end{cases}$$

Проверкой убеждаемся, что  $x_1 = 2$ , так как  $16 - 12 + 6 - 10 = 0$ . Делим

левую часть уравнения на  $x - 2$ :  $\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 10}{x - 2} = 2x^2 + x + 5$ .

Уравнение можно представить в виде  $(x-2)(2x^2 + x + 5) = 0$ , откуда корень  $x_1 = 2$  данного уравнения найден подбором. В уравнении  $2x^2 + x + 5 = 0$   $D < 0$  и корней нет.

*Ответ:*  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$ .

Решить системы уравнений (6.183—6.243):

$$6.183. \begin{cases} xy(x+1)(y+1) = 72, \\ (x-1)(y-1) = 2. \end{cases}$$

*Решение.*

Из условия  $\begin{cases} xy(xy + x + y + 1) = 72, \\ xy - (x + y) = 1. \end{cases}$

Пусть  $\begin{cases} xy = u, \\ x + y = v. \end{cases}$  Относительно  $u$  и  $v$  система принимает вид

$$\begin{cases} u(u + v + 1) = 72, \\ u - v = 1 \end{cases} \Rightarrow v = u - 1. \text{ Подставив это значение } v \text{ в первое уравнение}$$

нение системы, получим  $u(u+u-1+1) = 72$ ,  $2u^2 = 72$ , откуда  $u_1 = -6$ ,  $u_2 = 6$  и  $v_1 = -7$ ,  $v_2 = 5$ .

Тогда данная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} xy = -6, \\ x + y = -7 \text{ или} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 6, \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_3 = \frac{-7 + \sqrt{73}}{2}, \\ y_3 = -\frac{7 + \sqrt{73}}{2}; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -\frac{7 + \sqrt{73}}{2}, \\ y_4 = \frac{-7 + \sqrt{73}}{2}. \end{cases}$$

Ответ:  $(2;3), (3;2), \left(\frac{-7 + \sqrt{73}}{2}; -\frac{7 + \sqrt{73}}{2}\right), \left(-\frac{7 + \sqrt{73}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{73}}{2}\right)$ .

6.184. 
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

*Решение.*

Так как левые части уравнений однородны относительно  $x$  и  $y$ , введем замену  $y = tx$ ; система уравнений примет вид

$$\begin{cases} x^2(2 - 3t + t^2) = 3, \\ x^2(1 + 2t - 2t^2) = 6. \end{cases}$$

Разделив левые и правые части уравнений ( $x \neq 0$ ), получим

$$\frac{2 - 3t + t^2}{1 + 2t - 2t^2} = \frac{1}{2} \left( t \neq \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \right), 4t^2 - 8t + 3 = 0, \text{ откуда } t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{3}{2};$$

1)  $t_1 = \frac{1}{2}$ . Из уравнения  $x^2(1 + 2t - 2t^2) = 6$  находим  $x^2 \left(1 + 1 - \frac{1}{2}\right) = 6$ ,

$x^2 = 4$ , откуда  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$ ; тогда  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = -1$ ;

2)  $t_2 = \frac{3}{2}$ . Тогда  $x^2 \left(1 + 3 - \frac{9}{2}\right) = 6$ ,  $x^2 = -12$ , решений нет.

Ответ:  $(2; 1), (-2; -1)$ .

$$6.185. \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3. \end{cases}$$

*Решение.*

Так как левые части системы однородны, то делаем подстановку

$$y = tx. \text{ Тогда система примет вид } \begin{cases} x^2(1 + 2t^2) = 17, \\ x^2(1 - 2t) = -3. \end{cases}$$

Разделив левые и правые части уравнений ( $x \neq 0$ ), получаем

$$\frac{1 + 2t^2}{1 - 2t} = -\frac{17}{3} \left( t \neq \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow 3t^2 - 17t + 10 = 0, \quad t_1 = \frac{2}{3}, \quad t_2 = 5;$$

$$1) \quad t_1 = \frac{2}{3}. \text{ Из уравнения } x^2(1 - 2t) = -3 \text{ имеем } x^2 \left( 1 - \frac{4}{3} \right) = -3, \quad x^2 = 9,$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3; \quad y_1 = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2, \quad y_2 = \frac{2}{3}(-3) = -2;$$

$$2) \quad t_2 = 5. \text{ Тогда } x^2(1 - 10) = -3, \quad x^2 = \frac{1}{3}, \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad y_1 = 5 \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$= -\frac{5}{\sqrt{3}}, \quad y_2 = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ: } (3; 2), (-3; -2), \left( \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3} \right), \left( -\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3} \right).$$

$$6.186. \begin{cases} ax + by + cz = k, \\ a^2x + b^2y + c^2z = k^2, \\ a^3x + b^3y + c^3z = k^3, \quad a \neq b, b \neq c, c \neq a. \end{cases}$$

*Решение.*

Решение системы получаем по правилу Крамера. Вычислим определители системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = ab^2c^3 + a^3bc^2 + a^2b^3c - a^3b^2c - a^2bc^3 - ab^3c^2,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} k & b & c \\ k^2 & b^2 & c^2 \\ k^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = kb^2c^3 + k^3bc^2 + k^2b^3c - k^3b^2c - k^2bc^3 - kb^3c^2,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & k & c \\ a^2 & k^2 & c^2 \\ a^3 & k^3 & c^3 \end{vmatrix} = k^2ac^3 + k^3a^2c + ka^3c - k^2a^3c - ka^2c^3 - k^3ac^2,$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a & b & k \\ a^2 & b^2 & k^2 \\ a^3 & b^3 & k^3 \end{vmatrix} = k^3ab^2 + k^2a^3b + ka^2b^3 - ka^3b^2 - k^2ab^3 - k^3a^2b.$$

Решением системы будет

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{kb^2c^3 + k^3bc^2 + k^2b^3c - k^3b^2c - k^2bc^3 - kb^3c^2}{ab^2c^3 + a^3bc^2 + a^2b^3c - a^3b^2c - a^2bc^3 - ab^3c^2},$$

$$x = \frac{k(k-c)(k-b)}{a(a-c)(a-b)};$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{k^2ac^3 + k^3a^2c + ka^3c^2 - k^2a^3c - ka^2c^3 - k^3ac^2}{ab^2c^3 + a^3bc^2 + a^2b^3c - a^3b^2c - a^2bc^3 - ab^3c^2},$$

$$y = \frac{k(k-c)(k-a)}{b(b-c)(b-a)};$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{k^3ab^2 + k^2a^3b + ka^2b^3 - ka^3b^2 - k^2ab^3 - k^3a^2b}{ab^2c^3 + a^3bc^2 + a^2b^3c - a^3b^2c - a^2bc^3 - ab^3c^2},$$

$$z = \frac{k(k-a)(k-b)}{c(c-a)(c-b)}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{k(k-c)(k-b)}{a(a-c)(a-b)}; y = \frac{k(k-c)(k-a)}{b(b-c)(b-a)}; z = \frac{k(k-a)(k-b)}{c(c-a)(c-b)}.$$

$$6.187. \begin{cases} (x+1)(y+1) = 10, \\ (x+y)(xy+1) = 25. \end{cases}$$

*Решение.*

Перепишем систему уравнений в виде  $\begin{cases} xy + x + y + 1 = 10, \\ (x+y)(xy+1) = 25 \end{cases}$  и введем

подстановку  $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v. \end{cases}$

Относительно  $u$  и  $v$  система принимает вид  $\begin{cases} v + u = 9, \\ u(v + 1) = 25. \end{cases}$

Отсюда  $v = 9 - u \Rightarrow u(9 - u + 1) = 25 \Leftrightarrow u^2 - 10u + 25 = 0, (u - 5)^2 = 0$ , откуда  $u = 5; v = 4$ .

Тогда  $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 4. \end{cases}$

*Ответ:* (4; 1), (1; 4).

$$6.188. \begin{cases} x - ay + a^2z = a^3, \\ x - by + b^2z = b^3, \\ x - cy + c^2z = c^3, \quad a \neq b, b \neq c, c \neq a. \end{cases}$$

*Решение.*

Вычтя из первого уравнения системы второе, имеем

$$\begin{aligned} -(a-b)y + (a-b)(a+b)z &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -y + (a+b)z &= a^2 + ab + b^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Аналогично, вычтя из первого уравнения третье, получим

$$\begin{aligned} -(a-c)y + (a-c)(a+c)z &= (a-c)(a^2 + ac + c^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -y + (a+c)z &= a^2 + ac + c^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Вычтя из уравнения (1) уравнение (2), имеем

$$(a+b)z - (a+c)z = ab + b^2 - ac - c^2 \Leftrightarrow z = a + b + c.$$

Подставив  $z = a + b + c$  в уравнение (1), получим  $y = ab + bc + ca$ . Подставив  $z = a + b + c$  и  $y = ab + bc + ca$  в первое уравнение системы, имеем  $x = abc$ .

Ответ:  $x = abc$ ,  $y = ab + bc + ca$ ,  $z = a + b + c$ .

$$6.189. \begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 5, \\ (x+y)(x^2-y^2) = 9. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - x^2y - y^3 = 5, \\ x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 = 9. \end{cases}$$

Сложив и вычитая первое и второе уравнение, получаем

$$\begin{cases} 2x^3 - 2y^3 = 14, \\ 2xy^2 - 2x^2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ -xy(x-y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)((x-y)^2 + 3xy) = 7, \\ xy(x-y) = 2. \end{cases}$$

Пусть  $\begin{cases} x-y = u, \\ xy = v. \end{cases}$  Относительно  $u$  и  $v$  система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} u(u+3v) = 7, \\ uv = 2. \end{cases} \Rightarrow v = \frac{2}{u}, \text{ откуда}$$

$$u\left(u^2 + 3 \cdot \frac{2}{u}\right) = 7 \Leftrightarrow u^3 = 1, \quad u = 1; \quad v = 2.$$

Тогда  $\begin{cases} x-y = 1, \\ xy = 2, \end{cases}$  откуда  $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -2. \end{cases}$

Ответ:  $(2; 1), (-1; -2)$ .



$$6.190. \begin{cases} xy = a, \\ yz = b, \quad abc > 0. \\ zx = c, \end{cases}$$

*Решение.*

Из третьего уравнения находим  $z = \frac{c}{x}$  и подставляем во второе уравнение

$$\begin{cases} xy = a, \\ y \cdot \frac{c}{x} = b, \\ z = \frac{c}{x}. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим  $y = \frac{b}{c}x$  и подставляем в первое уравнение:

$$\begin{cases} x \cdot \frac{b}{c}x = a, \\ y = \frac{b}{c}x, \\ z = \frac{c}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{ac}{b}, \\ y = \frac{b}{c}x, \\ z = \frac{c}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{ac}{b}}, \\ y = \frac{b}{c}x, \\ z = \frac{c}{x}. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x = \sqrt{\frac{ac}{b}}, \\ y = \frac{b}{c}x, \\ z = \frac{c}{x}, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x = \sqrt{\frac{ac}{b}}, \\ y = \sqrt{\frac{ab}{c}}, \text{ или} \\ z = \sqrt{\frac{bc}{a}}, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{ac}{b}}, \\ y = \frac{b}{c}x, \\ z = \frac{c}{x}, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{ac}{b}}, \\ y = -\sqrt{\frac{ab}{c}}, \\ z = -\sqrt{\frac{bc}{a}}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{ac}{b}}; y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{ab}{c}}; z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{bc}{a}}.$$

$$6.191. \begin{cases} x^2 + y = y^2 + x, \\ y^2 + x = 6. \end{cases}$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - x + y = 0, \\ y^2 + x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) - (x-y) = 0, \\ y^2 + x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-1) = 0, \\ y^2 + x = 6. \end{cases}$$

Полученная система равносильна совокупности двух систем уравнений:

$$1) \begin{cases} x - y = 0, \\ y^2 + x = 6 \end{cases} \text{ или } 2) \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y^2 + x = 6; \end{cases}$$

решив их, найдем

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = -3; \end{cases} \begin{cases} x_3 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}, \\ y_3 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}; \end{cases} \begin{cases} x_4 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}, \\ y_4 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2), (-3; -3), \left(\frac{1 + \sqrt{21}}{2}; \frac{1 - \sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{1 + \sqrt{21}}{2}\right).$$

$$6.192. \begin{cases} \frac{4}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 3, \\ (x+y)^2 + (x-y)^2 = 20. \end{cases}$$

*Решение.*

ОДЗ:  $x \neq \pm y$ .

Пусть  $\begin{cases} x + y = u, \\ x - y = v, \end{cases}$  где  $u \neq 0$  и  $v \neq 0$ . Относительно  $u$  и  $v$  система принимает вид

мает вид

$$\begin{cases} \frac{4}{u} + \frac{4}{v} = 3, \\ u^2 + v^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(u+v) = 3uv, \\ (u+v)^2 - 2uv = 20. \end{cases} \Rightarrow uv = \frac{4}{3}(u+v),$$

Из второго уравнения:

$$(u+v)^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}(u+v) = 20 \Rightarrow 3(u+v)^2 - 8(u+v) - 60 = 0,$$

$$\text{откуда } (u+v)_1 = -\frac{10}{3} \text{ или } (u+v)_2 = 6; (uv)_1 = -\frac{40}{9}, (uv)_2 = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8;$$

$$\begin{cases} u+v = -\frac{10}{3}, \\ uv = -\frac{40}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} u+v = 6, \\ uv = 8. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} u_1 = \frac{-5-\sqrt{65}}{3}, \\ v_1 = \frac{-5+\sqrt{65}}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = \frac{-5+\sqrt{65}}{3}, \\ v_2 = \frac{-5-\sqrt{65}}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} u_3 = 2, \\ v_3 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} u_4 = 4, \\ v_4 = 2. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x+y = \frac{-5-\sqrt{65}}{3}, \\ x-y = \frac{-5+\sqrt{65}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3}, \\ y_1 = -\frac{\sqrt{65}}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{-5+\sqrt{65}}{3}, \\ x-y = \frac{-5-\sqrt{65}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{5}{3}, \\ y_2 = \frac{\sqrt{65}}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = 2, \\ x-y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3, \\ y_3 = -1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = 4, \\ x-y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 3, \\ y_4 = 1. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{5}{3}; -\frac{\sqrt{65}}{3}\right), \left(-\frac{5}{3}; \frac{\sqrt{65}}{3}\right), (3; -1), (3; 1).$$

$$6.193. \begin{cases} x + yz = 2, \\ y + zx = 2, \\ z + xy = 2. \end{cases}$$

*Решение.*

Из третьего уравнения системы находим  $z = 2 - xy$  и подставляем в первое и второе уравнение:

$$\begin{cases} x + y(2 - xy) = 2, \\ y + (2 - xy)x = 2, \\ z = 2 - xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - xy^2 = 2, \\ y + 2x - x^2y = 2, \\ z = 2 - xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - xy^2 = 2, \\ y(1 - x^2) - (2 - 2x) = 0, \\ z = 2 - xy, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - xy^2 = 2, \\ (1 - x)(y(1 + x) - 2) = 0, \\ z = 2 - xy. \end{cases}$$

Второе уравнение равносильно двум уравнениям:  $1 - x = 0$  или  $y(1 + x) - 2 = 0$ . Отсюда, данная система равносильна двум системам уравнений

$$1) \begin{cases} x + 2y - xy^2 = 2, \\ 1 - x = 0, \\ z = 2 - xy \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} x + 2y - xy^2 = 2, \\ y(1 + x) - 2 = 0, \\ z = 2 - xy. \end{cases}$$

1) Из второго уравнения системы

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2y - y^2 = 2, \\ x = 1, \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = 0, \\ x = 1, \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 1)^2 = 0, \\ x = 1, \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = 1, \\ z = 2 - y. \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 1, \\ x_1 = 1, \\ z_1 = 1. \end{cases}$$

2) Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x - xy^2) - (2 - 2y) = 0, \\ y = \frac{2}{1+x}, \\ z = 2 - xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-y)(1+y) - 2(1-y) = 0, \\ y = \frac{2}{1+x}, \\ z = 2 - xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-y)(x(1+y) - 2) = 0, \\ y = \frac{2}{1+x}, \\ z = 2 - xy. \end{cases}$$

Первое уравнение последней системы равносильно двум уравнениям:

$$1 - y = 0 \text{ или } x(1 + y) = 2.$$

Таким образом, система равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases} 1 - y = 0, \\ y = \frac{2}{1+x}, \\ z = 2 - xy \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x(1+y) = 2, \\ y = \frac{2}{1+x}, \\ z = 2 - xy. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 1, \\ z_2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = -2, \\ z_3 = -2; \end{cases} \begin{cases} x_4 = 1, \\ y_4 = 1, \\ z_4 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1; 1; 1), (-2; -2; -2).

$$6.194. \begin{cases} \frac{5}{x^2 - xy} + \frac{4}{y^2 - xy} = -\frac{1}{6}, \\ \frac{7}{x^2 - xy} - \frac{3}{y^2 - xy} = \frac{6}{5}. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0, \\ x \neq y. \end{cases}$$

Пусть  $\frac{1}{x^2 - xy} = u$ ,  $\frac{1}{y^2 - xy} = v$ . Относительно  $u$  и  $v$  система уравнений

$$\text{имеет вид: } \begin{cases} 5u + 4v = -\frac{1}{6}, \\ 7u - 3v = \frac{6}{5}. \end{cases} \Rightarrow v = \frac{35u - 6}{15}.$$

Из системы находим  $u = \frac{1}{10}$ ;  $v = -\frac{1}{6}$ .

Тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2 - xy} = \frac{1}{10}, \\ \frac{1}{y^2 - xy} = -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 10, \\ y^2 - xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - y) = 10, \\ y(x - y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{3}, \\ y(x - y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}y, \\ y(x - y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}y, \\ y\left(\frac{5}{3}y - y\right) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}y, \\ y = \pm 3. \end{cases}$$

Таким образом, данная система равносильна системам уравнений:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3}y, \\ y = -3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{5}{3}y, \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5, \\ y_1 = -3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

Ответ:  $(-5; -3), (5; 3)$ .

**6.195.** 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y - 9 = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 5y - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из условия 
$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 18 = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 5y - 1 = 0. \end{cases}$$

Вычтя второе уравнение системы из первого, будем иметь:

$$-5x + 11y - 17 = 0.$$

Отсюда  $y = \frac{5x + 17}{11}$ ,  $x^2 + \left(\frac{5x + 17}{11}\right)^2 - 2x + 3 \cdot \frac{5x + 17}{11} - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 146x^2 + 93x - 239 = 0, \text{ откуда } x_1 = -\frac{239}{146}, x_2 = 1; y_1 = \frac{117}{146}, y_2 = 2.$$

Ответ:  $\left(-\frac{239}{146}; \frac{117}{146}\right), (1; 2)$ .

$$6.196. \begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + xy = 23. \end{cases}$$

*Решение.*

Перепишем систему уравнений в виде  $\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 34, \\ (x+y) + xy = 23 \end{cases}$  и, обозначив

$$\begin{cases} x+y = u, \\ xy = v, \end{cases} \text{ получаем } \begin{cases} u^2 - 2v = 34, \\ u + v = 23 \end{cases} \Rightarrow v = 23 - u,$$

$$u^2 - 2(23 - u) = 34, u^2 + 2u - 80 = 0, \text{ откуда}$$

$$u_1 = -10, u_2 = 8; v_1 = 23 - 10 = 13, v_2 = 23 - 8 = 15.$$

Данная система равносильна совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases} x+y = -10, \\ xy = 13 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y = 8, \\ xy = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 5; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

*Ответ:* (3;5),(5;3).

$$6.197. \begin{cases} x^2 + y^4 = 20, \\ x^4 + y^2 = 20. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{Из условия имеем } x^2 + y^4 = x^4 + y^2, y^4 - x^4 + x^2 - y^2 = 0,$$

$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2) - (y^2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow (y^2 - x^2)(y^2 + x^2 - 1) = 0,$$

равносильное двум уравнениям:  $y^2 - x^2 = 0$  или  $y^2 + x^2 - 1 = 0$ ,  $y^2 = x^2$

или  $y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^4 + x^2 = 20$  или  $x^4 + (1 - x^2) = 20$ ;  $x^4 + x^2 - 20 = 0$

или  $x^4 - x^2 - 19 = 0$ , откуда  $x_1^2 = 4$ ,  $x_2^2 = -5$ ,  $x_3^2 = \frac{1 - \sqrt{77}}{2}$ ,  $x_4^2 = \frac{1 + \sqrt{77}}{2}$ ;

$x_2^2$  и  $x_3^2$  не подходят. Тогда  $x = \pm 2$  или  $x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{77}}{2}}$ ;  $y_1^2 = 4$ ,

$y_2^2 = \frac{1 - \sqrt{77}}{2}$ , откуда  $y = \pm 2$  (значение  $y_2^2$  не подходит).

*Ответ:* (2 ;2), (-2 ; -2), (2; -2), (-2; 2).

$$6.198. \begin{cases} x+y+\frac{1}{x-y}=\frac{ab+1}{b}, \\ x-y+\frac{1}{x+y}=\frac{ab+1}{a}. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ:  $x \neq \pm y$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ .

Умножив первое уравнение системы на  $x-y \neq 0$ , а второе — на  $x+y \neq 0$ , имеем

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 1 = \frac{ab+1}{b}(x-y), \\ x^2 - y^2 + 1 = \frac{ab+1}{a}(x+y). \end{cases} \Rightarrow 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{(x-y)}{(x+y)},$$

$$y = \frac{a-b}{a+b}x, \text{ где } a \neq -b \Rightarrow x^2 - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}x^2 + 1 = \frac{ab+1}{a} \left( x + \frac{a-b}{a+b}x \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4abx^2 - 2(ab+1)(a+b)x + (a+b)^2 = 0, \text{ откуда}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{(ab+1)(a+b) \pm \sqrt{(ab+1)^2(a+b)^2 - 4ab(a+b)^2}}{4ab} = \\ &= \frac{(ab+1)(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2((ab+1)^2 - 4ab)}}{4ab} = \\ &= \frac{(ab+1)(a+b) \pm (a+b)\sqrt{(ab-1)^2}}{4ab} = \frac{(ab+1)(a+b) \pm (a+b)(ab-1)}{4ab} = \\ &= \frac{(a+b)(ab+1 \pm (ab-1))}{4ab}. \end{aligned}$$

Тогда

$$x_1 = \frac{(a+b)(ab+1-ab+1)}{4ab} = \frac{a+b}{2ab}, \quad x_2 = \frac{(a+b)(ab+1+ab-1)}{4ab} = \frac{a+b}{2};$$

$$y_1 = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2ab} = \frac{a-b}{2ab}, \quad y_2 = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}.$$



Ответ: если  $ab + 1 = 0$ , то  $y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x$  — любое; если  $ab + 1 \neq 0$ , то

$$x_1 = \frac{a+b}{2ab}, y_1 = \frac{a-b}{2ab}; x_2 = \frac{a+b}{2}, y_2 = \frac{a-b}{2}.$$

$$6.199. \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{4}, \\ 2x+3y-5z+19=0. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3}, \\ \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{4}, \\ 2x+3y-5z = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3 = 2y+6, \\ 4y+12 = 3z-3, \\ 2x+3y-5z = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y = 9, \\ 4y-3z = -15, \\ 2x+3y-5z = -19. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{2x+3y+19}{5}.$$

$$\begin{cases} 3x-2y = 9, \\ 4y-3 \cdot \frac{2x+3y+19}{5} = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y = 9, \\ 11y-6x = -18. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-18+6x}{11} \Rightarrow 3x-2 \cdot \frac{-18+6x}{11} = 9, x = 3; \text{ тогда } y = 0; z = 5.$$

Ответ: (3; 0; 5).

$$6.200. \begin{cases} (x+y)^2 + 2x = 35-2y, \\ (x-y)^2 - 2y = 3-2x. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 35 - 2y, \\ x^2 - 2xy + y^2 - 2y = 3 - 2x. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение системы из первого, имеем

$$4xy + 2x + 2y = 32 - 2y + 2x, \quad x = \frac{8-y}{y}.$$

Подставив это значение  $x$  в первое уравнение системы, получим

$$\left(\frac{8-y}{y} + y\right)^2 + 2 \cdot \frac{8-y}{y} = 35 - 2y \Rightarrow y^4 - 20y^2 + 64 = 0,$$

куда  $y_1 = -2, y_2 = 2, y_3 = -4, y_4 = 4; x_1 = -5, x_2 = 3, x_3 = -3, x_4 = 1$ .

Ответ:  $(-5; -2), (3; 2), (-3; -4), (1; 4)$ .

$$6.201. \begin{cases} \frac{4}{x+y-1} - \frac{5}{2x-y+3} + \frac{5}{2} = 0, \\ \frac{3}{x+y-1} + \frac{1}{2x-y+3} + \frac{7}{5} = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+y \neq 1, \\ 2x-y \neq -3. \end{cases}$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} \frac{1}{x+y-1} = u, \\ \frac{1}{2x-y+3} = v. \end{cases}$$

Относительно  $u$  и  $v$  система принимает вид

$$\begin{cases} 4u - 5v = -\frac{5}{2}, \\ 3u + v = -\frac{7}{5}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{2}, \\ v = \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y-1} = -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2x-y+3} = \frac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -1, \\ 2x-y = 7, \text{ откуда } x = 2, y = -3. \end{cases}$$

Ответ:  $(2; -3)$ .

$$6.202. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3, \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 3, \\ \frac{1}{xyz} = 1. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0, \\ z \neq 0. \end{cases}$$

Умножая левую и правую части каждого из уравнений системы на  $xyz \neq 0$ , получим

$$\begin{cases} yz + xz + xy = 3xyz, \\ z + x + y = 3xyz, \\ xyz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz + xz + xy = 3, \\ x + y + z = 3, \\ xyz = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(y+x) + xy = 3, \\ z = 3 - (x+y), \\ xyz = 1. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3 - (x+y))(x+y) + xy = 3, \\ xy(3 - (x+y)) = 1. \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{1}{3 - (x+y)} \Rightarrow (3 - (x+y))(x+y) +$$

$$+ \frac{1}{3 - (x+y)} = 3 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 6(x+y)^2 + 12(x+y) - 8 = 0 \text{ при } x+y \neq 3.$$

Представив полученное уравнение в виде  $((x+y) - 2)^3 = 0$ , откуда

$x+y=2$ ; тогда  $z=1$ ,  $xy=1$ .

$$\text{Отсюда } \begin{cases} x+y=2, \\ xy=1, \end{cases} \Rightarrow y=1, x=1.$$

*Ответ:* (1; 1; 1).

$$6.203. \begin{cases} x + y + z = 0, \\ cx + ay + bz = 0, \\ (x+b)^2 + (y+c)^2 + (z+a)^2 = a^2 + b^2 + c^2, \end{cases} \quad a \neq b \neq c.$$

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ cx + ay + bz = 0, \\ x^2 + 2bx + b^2 + y^2 + 2cy + c^2 + z^2 + 2az + a^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0, \\ cx + ay + bz = 0, \\ (x + y + z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz + 2bx + 2cy + 2az = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0, \\ cx + ay + bz = 0, \\ xy + yz + xz - bx - cy - az = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -(x + y), \\ cx + ay + bz = 0, \\ xy - bx - cy + (y + x - a)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cx + cy - b(x + y) = 0, \\ xy - bx - cy - (y + x - a)(x + y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{c-b}{b-a}x, \\ (x-c+a)y - y^2 - (b+x-a)x = 0. \end{cases}$$

Подставив  $y = \frac{c-b}{b-a}x$  из второго уравнения системы в третье, получим

$$\frac{(x-c+a)(c-b)}{b-a}x - \frac{(c-b)^2}{(b-a)^2}x^2 - x^2 - (b-a)x = 0 \Rightarrow x(x - (a-b)) = 0,$$

откуда  $x_1 = 0, x_2 = a - b; y_1 = 0, z_1 = 0; y_2 = \frac{c-b}{b-a} \cdot (a-b) = b - c,$

$$z_2 = -(a - b + b - c) = c - a.$$

*Ответ:*  $(0; 0; 0), (a - b; b - c; c - a).$

$$6.204. \begin{cases} x + y + \frac{x^2}{y^2} = 7, \\ \frac{(x+y)x^2}{y^2} = 12. \end{cases}$$

*Решение.*

ОДЗ:  $y \neq 0$ .

Из условия имеем

$$\dots \begin{cases} (x+y) + \left(\frac{x^2}{y^2}\right) = 7, \\ (x+y) \cdot \left(\frac{x^2}{y^2}\right) = 12. \end{cases}$$

Пусть  $\begin{cases} x+y = u, \\ \frac{x^2}{y^2} = v. \end{cases}$

Относительно  $u$  и  $v$  система принимает вид  $\begin{cases} u+v = 7, \\ u \cdot v = 12, \end{cases}$  откуда находим

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ v_1 = 4; \end{cases} \begin{cases} u_2 = 4, \\ v_2 = 3. \end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{cases} x+y = 3, \\ \frac{x^2}{y^2} = 4 \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} x+y = 4, \\ \frac{x^2}{y^2} = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6, \\ y_1 = -3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_3 = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}, \\ y_3 = \frac{4}{1-\sqrt{3}}; \end{cases} \begin{cases} x_4 = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}, \\ y_4 = \frac{4}{1+\sqrt{3}}. \end{cases}$$

*Ответ:*  $(6; -3), (2; 1), (6+2\sqrt{3}; -2-2\sqrt{3}), (6-2\sqrt{3}; -2+2\sqrt{3})$ .

$$6.205. \begin{cases} \frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{2y}{x} = 1, \\ x^2 + y^2 + \frac{4x}{y} = 22. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

Пусть  $\begin{cases} x^2 + y^2 = u, \\ \frac{y}{x} = v. \end{cases}$  Тогда относительно  $u$  и  $v$  система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{3}{u-1} + 2v = 1, \\ u + \frac{4}{v} = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{u-1} + 2v = 1, \\ u = 22 - \frac{4}{v}. \end{cases}$$

Подставив значение  $u = 22 - \frac{4}{v}$  из второго уравнения в первое, имеем

$$\frac{3}{22 - \frac{4}{v} - 1} + 2v = 1 \Leftrightarrow 21v^2 - 13v + 2 = 0,$$

откуда  $v_1 = \frac{2}{7}$ ,  $v_2 = \frac{1}{3}$ ;  $u_1 = 8$ ,  $u_2 = 10$ .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ \frac{y}{x} = \frac{2}{7} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ \frac{y}{x} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -14\sqrt{\frac{2}{53}}, \\ y_1 = -4\sqrt{\frac{2}{53}}; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 14\sqrt{\frac{2}{53}}, \\ y_2 = 4\sqrt{\frac{2}{53}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 3, \\ y_3 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -1. \end{cases}$$

*Ответ:*  $\left(\frac{-14\sqrt{106}}{53}; \frac{-4\sqrt{106}}{53}\right), \left(\frac{14\sqrt{106}}{53}; \frac{4\sqrt{106}}{53}\right), (3; 1), (-3; -1)$ .

$$6.206. \begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$$

*Решение.*

Из условия получаем 
$$\begin{cases} (x + y) + xy = 7, \\ (x + y)^2 - xy = 13. \end{cases}$$

Пусть 
$$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v, \end{cases}$$
 тогда имеем 
$$\begin{cases} u + v = 7, \\ u^2 - v = 13. \end{cases}$$

Сложив уравнения системы, получим  $u^2 - 7 + u = 13$ ,  $u^2 + u - 20 = 0$ ,

откуда  $u_1 = -5$ ,  $u_2 = 4$ ; тогда  $v_1 = 12$ ,  $v_2 = 3$ .

Данная система равносильна двум системам уравнений

$$\begin{cases} x + y = -5, \\ xy = 12 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

*Ответ:* (3; 1), (1; 3).

$$6.207. \begin{cases} x + y + z = 6, \\ x(y + z) = 5, \\ y(x + z) = 8. \end{cases}$$

*Решение.*

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + xz = 5, \\ yx + yz = 8. \end{cases} \Rightarrow z = 6 - x - y.$$

$$\begin{cases} xy + x(6 - x - y) = 5, \\ yx + y(6 - x - y) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ y^2 - 6y + 8 = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 1;$$

$y_1 = 2$ ,  $y_2 = 4$ .

Таким образом,

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ y_1 = 2, \\ z_1 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 4, \\ z_2 = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 2, \\ z_3 = 6 - 1 - 2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 1, \\ y_4 = 4, \\ z_4 = 6 - 1 - 4 = 1. \end{cases}$$

*Ответ:* (5; 2; -1), (5; 4; -3), (1; 2; 3), (1; 4; 1).

$$6.208. \begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 3a^3, \\ (x+y)(x^2+y^2) = 15a^3. \end{cases}$$

*Решение.*

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x^3 - xy^2 - x^2y + y^3 = 3a^3, \\ x^2 + xy^2 + x^2y + y^3 = 15a^3. \end{cases}$$

Сложим и вычтем второе и первое уравнения:

$$\begin{cases} 2x^3 + 2y^3 = 18a^3, \\ 2xy^2 + 2x^2y = 12a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 9a^3, \\ xy(x+y) = 6a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)((x+y)^2 - 3xy) = 9a^3, \\ xy(x+y) = 6a^3. \end{cases}$$

Пусть  $\begin{cases} x+y = u, \\ xy = v. \end{cases}$  Относительно  $u$  и  $v$  система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} u(u^2 - 3v) = 9a^3, \\ uv = 6a^3 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{6a^3}{u}, u\left(u^2 - 3 \cdot \frac{6a^3}{u}\right) = 9a^3, u^3 = 27a^3,$$

$$u = 3a, v = \frac{6a^3}{3a} = 2a^2 \Rightarrow \begin{cases} x+y = 3a, \\ xy = 2a^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a, \\ y_1 = 2a; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2a, \\ y_2 = a. \end{cases}$$

*Ответ:*  $(a; 2a), (2a; a)$ .

$$6.209. \begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ x^2y + xy^2 = -6. \end{cases}$$

*Решение.*

Из условия имеем  $\begin{cases} (x+y)((x+y)^2 - 3xy) = 19, \\ xy(x+y) = -6. \end{cases}$

Пусть  $\begin{cases} x+y = u, \\ xy = v. \end{cases}$  Относительно  $u$  и  $v$  система принимает вид

$$\begin{cases} u(u^2 - 3v) = 19, \\ uv = -6. \end{cases} \Rightarrow u^3 = 1, \text{ откуда } u = 1, v = -6.$$

$$\text{Получаем } \begin{cases} x+y = 1, \\ xy = -6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = -2. \end{cases}$$

*Ответ:*  $(-2; 3), (3; -2)$ .



$$6.210. \begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

*Решение.*

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 17, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - 2x^2y^2 = 17, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = \pm 2, \\ (x+y)^2 - 2xy = 5. \end{cases}$$

Данная система равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases} xy = -2, \\ (x+y)^2 - 2xy = 5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} xy = 2, \\ (x+y)^2 - 2xy = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_4 = 1, \\ y_4 = -2; \end{cases} \begin{cases} x_5 = 2, \\ y_5 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_6 = -1, \\ y_6 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_7 = -2, \\ y_7 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_8 = -1, \\ y_8 = -2. \end{cases}$$

*Ответ:* (2; 1), (1; 2), (-2; 1), (1; -2), (2; -1), (-1; 2), (-2; -1), (-1; -2).

$$6.211. \begin{cases} xy - \frac{x}{y} = \frac{16}{3}, \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим

$$-\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{6}.$$

Пусть  $\frac{x}{y} = t$ . Тогда имеем  $6t^2 + 5t - 6 = 0$ , откуда  $t_1 = -\frac{3}{2}$ ,  $t_2 = \frac{2}{3}$ . Тогда

$$\text{да } \frac{x}{y} = -\frac{3}{2} \text{ или } \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \text{ и } x_1 = -\frac{3}{2}y, x_2 = \frac{2}{3}y.$$

Из первого уравнения системы имеем:  $-\frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2} = \frac{16}{3}$ , или  $y^2 = -\frac{23}{9}$  (нет решений), и  $\frac{2}{3}y^2 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$ ,  $y^2 = 9 \Rightarrow y_1 = -3, y_2 = 3$ . Тогда  $x_1 = -2, x_2 = 2$ .

Ответ: (2; 3), (-2; -3).

$$6.212. \begin{cases} \frac{3}{uv} + \frac{15}{vw} = 2, \\ \frac{15}{vw} + \frac{5}{wi} = 2, \\ \frac{5}{wi} + \frac{3}{uv} = 2. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} u \neq 0, \\ v \neq 0, \\ w \neq 0. \end{cases}$$

Пусть  $\frac{3}{uv} = x, \frac{15}{vw} = y, \frac{5}{wi} = z$ .

Относительно  $x, y$  и  $z$  система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ y + z = 2, \Rightarrow z = 2 - x. \\ z + x = 2. \end{cases}$$

Подставив это значение  $z$  во второе уравнение, получим

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ y + 2 - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2, \\ y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 2, \\ 2x = 2. \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 1.$$

Тогда  $z = 2 - 1 = 1$ .

$$\text{Таким образом } \begin{cases} \frac{3}{uv} = 1, \\ \frac{15}{vw} = 1, \\ \frac{5}{wi} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 3, \\ vw = 15, \\ wi = 5 \end{cases} \Rightarrow w = \frac{5}{u}.$$

Подставив это значение  $w$  во второе уравнение, имеем

$$\begin{cases} uv = 3, \\ v \cdot \frac{5}{u} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 3, \\ v = 3u \end{cases} \Rightarrow u \cdot 3u = 3, \quad u^2 = 1, \text{ откуда } u_1 = -1, u_2 = 1.$$

Тогда  $v_1 = -3, v_2 = 3; w_1 = -5, w_2 = 5$ .

*Ответ:*  $(-1; -3; -5), (1; 3; 5)$ .

**6.213.** 
$$\begin{cases} x^6 + y^6 = 65, \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13. \end{cases}$$

*Решение.*

По формуле суммы кубов получаем

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) = 65, \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)13 = 65, \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 25 - 3x^2y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2y^2 = 4. \end{cases}$$

Система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y^2 = 5 - x^2, \\ x^2 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y^2 = 5 - x^2, \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_5 = 1, \\ y_5 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_6 = -1, \\ y_6 = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 = 1, \\ y_7 = -2; \end{cases} \begin{cases} x_8 = -1, \\ y_8 = 2. \end{cases}$$

*Ответ:*  $(2; 1), (-2; -1), (2; -1), (-2; 1), (1; 2), (-1; -2), (1; -2), (-1; 2)$ .

$$6.214. \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14. \end{cases}$$

*Решение.*

Из первого уравнения системы находим  $z = -x - y$  и подставляем во второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} 2x + 3y - x - y = 0, \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 + (-x-y+3)^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0, \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 + (-x-y+3)^2 = 14. \end{cases}$$

$$\text{Отсюда } x = -2y, (-2y+1)^2 + (y+2)^2 + (2y-y+3)^2 = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y = 0, \text{ откуда } y_1 = 0, y_2 = -1; x_1 = 0, x_2 = 2; z_1 = 0, z_2 = -1.$$

*Ответ:* (0; 0; 0), (2; -1; -1).

$$6.215. \begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 158, \\ 3x^2y + y^3 = -185. \end{cases}$$

*Решение.*

Сложим и вычтем первое и второе уравнения:

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + y^3 = -27, \\ x^3 + 3xy^2 - 3x^2y - y^3 = 343 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 = -27, \\ (x-y)^3 = 343 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -5. \end{cases}$$

*Ответ:* (2; -5).

$$6.216. \begin{cases} x^2 + y - 20 = 0, \\ x + y^2 - 20 = 0. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{Из условия } \begin{cases} x^2 + y = 20, \\ x + y^2 = 20, \end{cases} \text{ откуда } x^2 + y = x + y^2, x^2 - y^2 - x + y = 0,$$

$$(x-y)(x+y) - (x-y) = 0, (x-y)(x+y-1) = 0.$$

Следовательно, данная система равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y^2 - 20 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x + y^2 - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5, \\ y_1 = -5; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 4; \end{cases} \begin{cases} x_3 = \frac{1 + \sqrt{77}}{2}, \\ y_3 = \frac{1 - \sqrt{77}}{2}; \end{cases} \begin{cases} x_4 = \frac{1 - \sqrt{77}}{2}, \\ y_4 = \frac{1 + \sqrt{77}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-5; -5), (4; 4), \left( \frac{1 + \sqrt{77}}{2}; \frac{1 - \sqrt{77}}{2} \right), \left( \frac{1 - \sqrt{77}}{2}; \frac{1 + \sqrt{77}}{2} \right).$$

$$6.217. \begin{cases} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 91, \\ x^2 + xy + y^2 = 13. \end{cases}$$

*Решение.*

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} (x^4 + y^4) + x^2 y^2 = 91, \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - x^2 y^2 = 91, \\ x^2 + y^2 = 13 - xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (13 - xy)^2 - x^2 y^2 = 91, \\ x^2 + y^2 = 13 - xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 3, \\ (x + y)^2 = 13 + xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 3, \\ (x + y)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 3, \\ x + y = \pm 4. \end{cases}$$

Данная система равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases} xy = 3, \\ x + y = -4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} xy = 3, \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_3 = -1, \\ y_3 = -3; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -1. \end{cases}$$

Ответ: (1; 3), (3; 1), (-1; -3), (-3; -1).

$$6.218. \begin{cases} x^3 + y^3 = 9a^3, \\ x^2 y + xy^2 = 6a^3. \end{cases}$$

*Решение.*

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} (x + y)((x + y)^2 - 3xy) = 9a^3, \\ xy(x + y) = 6a^3. \end{cases}$$

Пусть  $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v. \end{cases}$  Относительно  $u$  и  $v$  система принимает вид

$$\begin{cases} u(u^2 - 3v) = 9a^3, \\ uv = 6a^3 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{6a^3}{u}, u\left(u^2 - 3 \cdot \frac{6a^3}{u}\right) = 9a^3 \Rightarrow u^3 = 27a^3,$$

откуда  $u = 3a$ ;  $v = \frac{6a^3}{3a} = 2a^2$ .

Тогда  $\begin{cases} x + y = 3a, \\ xy = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a, \\ y_1 = 2a; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2a, \\ y_2 = a. \end{cases}$

Ответ:  $(a; 2a), (2a; a)$ .

6.219.  $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2, \\ x + yz + zx = 3. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения системы находим  $z = 3 - x - y$ . Тогда получим

$$\begin{cases} x + 2y - 3 + x + y = 2, \\ x + y(3 - x - y) + (3 - x - y)x = 3, \Rightarrow y = \frac{5 - 2x}{3}, \\ x + yz + zx = 3. \end{cases}$$

$$x + \frac{5 - 2x}{3} \left(3 - x - \frac{5 - 2x}{3}\right) + \left(3 - x - \frac{5 - 2x}{3}\right)x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0,$$

откуда  $x_1 = 1, x_2 = 7$ . Тогда  $y_1 = 1, y_2 = -3; z_1 = 1, z_2 = -1$ .

Ответ:  $(1; 1; 1), (7; -3; -1)$ .

6.220.  $\begin{cases} \frac{x^3}{y} + xy = 40, \\ \frac{y^3}{x} + xy = 10. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$

Умножив первое уравнение системы на  $y \neq 0$ , а второе на  $x \neq 0$ , получим

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 40y, \\ y^3 + x^2y = 10x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + y^2) = 40y, \\ y(y^2 + x^2) = 10x. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение системы на второе, получим

$$\frac{x}{y} = \frac{4y}{x}, \quad x^2 = 4y^2, \quad \text{откуда } x_1 = -2y, \quad x_2 = 2y.$$

1)  $\frac{y^3}{-2y} - 2y \cdot y = 10, \quad y^2 = -4$ , нет решений.

2)  $\frac{y^3}{2y} + 2y \cdot y = 10, \quad y^2 = 4$ , откуда  $y_{1,2} = \pm 2$ . Тогда  $x_{1,2} = \pm 4$ .

Ответ: (4; 2), (-4; -2).

6.221. 
$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9. \end{cases}$$

Решение.

Из первого уравнения системы находим  $z = 2 - x - y$ .

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2 - x - y = 1, \\ x^2 + (y+2)^2 + (2 - x - y - 1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1, \\ x^2 + (y+2)^2 + (1 - x - y)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = -1 - 2y, \quad (-1 - 2y)^2 + (y+2)^2 + (1 + 1 + 2y - y)^2 = 9 \Leftrightarrow 6y^2 + 12y = 0,$$

откуда  $y_1 = 0, y_2 = -2$ ; тогда  $x_1 = -1, x_2 = 3; z_1 = 3, z_2 = 1$ .

Ответ: (-1; 0; 3), (3; -2; 1).

6.222. 
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+1}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{x+1}} = 2, \\ \sqrt{\frac{x+1}{y+2}} - \sqrt{\frac{y+2}{x+1}} = 1,5. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: 
$$\begin{cases} \frac{x+1}{x+y} > 0, \\ \frac{x+1}{y+2} > 0. \end{cases}$$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+1}{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x+y}}} - 2 = 0, \\ \sqrt{\frac{x+1}{y+2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{y+2}}} - 1,5 = 0. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение системы на  $\sqrt{\frac{x+1}{x+y}} \neq 0$ , а второе — на

$\sqrt{\frac{x+1}{y+2}} \neq 0$ , получим

$$\begin{cases} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+y}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{x+1}{x+y}} + 1 = 0, \\ \left(\sqrt{\frac{x+1}{y+2}}\right)^2 - 1,5\sqrt{\frac{x+1}{y+2}} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+y}} - 1\right)^2 = 0, \\ \left(\sqrt{\frac{x+1}{y+2}}\right)^2 - 1,5\sqrt{\frac{x+1}{y+2}} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x+y}} = 1, \frac{x+1}{x+y} = 1, \text{ откуда } x+1 = x+y, y=1.$$

Второе уравнение системы решаем как квадратное уравнение относи-

тельно  $t = \sqrt{\frac{x+1}{y+2}}$ :  $t^2 - 1,5t - 1 = 0$ .

Отсюда  $t_1 = \sqrt{\frac{x+1}{y+2}} = 2$ ;  $t_2 = \sqrt{\frac{x+1}{y+2}} = -\frac{1}{2}$ ;  $2\sqrt{\frac{x+1}{y+2}} = -1$  — не имеет

решений.

Тогда  $\frac{x+1}{y+2} = \frac{x+1}{1+2} = 4$ ,  $x+1 = 12$ ;  $x = 11$ .

Ответ: (11; 1).



$$6.223. \begin{cases} x^2 + 2y + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 1, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x^2 + 2y + 1 \geq 0.$$

Пусть  $\sqrt{x^2 + 2y + 1} = t$ , где  $t \geq 0$ ; тогда  $x^2 + 2y = t^2 - 1 \Leftrightarrow t^2 - 1 + t = 1$ ,  
или  $t^2 + t - 2 = 0$ , откуда  $t_1 = -2$ ,  $t_2 = 1$ ;  $t_1 = -2 < 0$  не подходит. Тогда

$$\sqrt{x^2 + 2y + 1} = 1, \quad x^2 + 2y + 1 = 1, \quad x^2 + 2y = 0. \quad \text{Имеем} \quad \begin{cases} x^2 + 2y = 0, \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = 2 - 2x, \quad x^2 + 2(2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0, \quad (x - 2)^2 = 0, \quad \text{откуда } x = 2.$$

Тогда  $y = -2$ .

*Ответ:* (2; -2).

$$6.224. \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 5, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 4. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+y \geq 0, \\ y+z \geq 0, \\ z+x \geq 0. \end{cases}$$

Сложив все три уравнения системы, получим

$$2\sqrt{x+y} + 2\sqrt{y+z} + 2\sqrt{z+x} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 6.$$

Вычтя из полученного уравнения поочередно первое, второе и третье уравнение системы, имеем

$$\begin{cases} \sqrt{z+x} = 3, \\ \sqrt{x+y} = 1, \\ \sqrt{y+z} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+x = 9, \\ x+y = 1, \\ y+z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = -2, \\ z = 6. \end{cases}$$

*Ответ:* (3; -2; 6).

$$6.225. \begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3, \\ x + y = 17. \end{cases}$$

*Решение.*

Пусть  $\begin{cases} \sqrt[4]{x} = u \geq 0, \\ \sqrt[4]{y} = v \geq 0. \end{cases}$  Относительно  $u$  и  $v$  система принимает вид

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^4 + v^4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3, \\ ((u+v)^2 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (9 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 = 17 \Leftrightarrow u^2v^2 - 18uv + 32 = 0$ . Решая последнее уравнение как квадратное относительно  $uv$ , найдем  $uv = 2$  или  $uv = 16$ .

Таким образом,  $\begin{cases} u + v = 3, \\ uv = 2 \end{cases}$  или  $\begin{cases} u + v = 3, \\ uv = 16. \end{cases}$

По теореме Виета найдем  $\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} u_2 = 2, \\ v_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x} = 1, \\ \sqrt[4]{y} = 2 \end{cases}$  или  $\begin{cases} \sqrt[4]{x} = 2, \\ \sqrt[4]{y} = 1, \end{cases}$

откуда  $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 16; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 16, \\ y_2 = 1. \end{cases}$

*Ответ:* (1; 16), (16; 1).

$$6.226. \begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{y + \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ (x^2 + 1)y + (y^2 + 1)x = 4xy. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{xy+1}{y}} + \sqrt{\frac{xy+1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ x^2y + y + y^2x + x = 4xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xy+1}{y} + 2\sqrt{\frac{(xy+1)^2}{xy}} + \frac{xy+1}{x} = 8, \\ x^2y + y + y^2x + x = 4xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 y + x + xy^2 + y}{xy} + 2\sqrt{\frac{(xy+1)^2}{xy}} = 8, \\ x^2 y + x + xy^2 + y = 4xy. \end{cases} \Rightarrow \frac{4xy}{xy} + 2\sqrt{\frac{(xy+1)^2}{xy}} = 8 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{(xy+1)^2}{xy}} = 2 \Rightarrow \frac{(xy+1)^2}{xy} = 4 \Leftrightarrow (xy-1)^2 = 0, \text{ откуда } xy = 1.$$

Подставив это значение  $xy$  в первое уравнение системы, получим

$$x + x + y + y + 2\sqrt{4} = 8, \text{ откуда } \begin{cases} xy = 1, \\ x + y = 2. \end{cases} \text{ Тогда } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1; 1).

$$6.227. \begin{cases} \sqrt[3]{u+v} + \sqrt[3]{v+w} = 3, \\ \sqrt[3]{v+w} + \sqrt[3]{w+u} = 1, \\ \sqrt[3]{w+u} + \sqrt[3]{u+v} = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{Пусть } \begin{cases} \sqrt[3]{u+v} = x, \\ \sqrt[3]{v+w} = y, \\ \sqrt[3]{w+u} = z. \end{cases}$$

$$\text{Относительно } x, y, z \text{ система принимает вид } \begin{cases} x+y=3, \\ y+z=1, \\ z+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3, \\ y-x=1, \\ z=-x. \end{cases}$$

Сложив и вычтя первое и второе уравнения, получим  $x = 1$ ;  $y = 2$ .

$$\text{Тогда } z = -1. \text{ Отсюда } \begin{cases} \sqrt[3]{u+v} = 1, \\ \sqrt[3]{v+w} = 2, \\ \sqrt[3]{w+u} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1, \\ v+w=8, \\ w+u=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1, \\ v+w=8, \\ w=-1-u \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1, \\ v-1-u=8, \\ w=-1-u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1, \\ v-u=9, \\ w=-1-u, \end{cases} \quad u = -4; \quad v = 5; \quad w = 3.$$

Ответ: (-4; 5; 3).

$$6.228. \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{Пусть } \begin{cases} \sqrt{x} = u \geq 0, \\ \sqrt{y} = v \geq 0. \end{cases}$$

Относительно  $u$  и  $v$  система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} u^2v + v^2u = 30, \\ u^3 + v^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 30, \\ (u+v)((u+v)^2 - 3uv) = 35 \end{cases} \Rightarrow uv = \frac{30}{u+v},$$

$$(u+v)\left((u+v)^2 - 3 \cdot \frac{30}{u+v}\right) = 35, (u+v)^3 = 125, u+v = 5. \text{ Тогда } uv = \frac{30}{5} = 6$$

$$\text{и система уравнений принимает вид } \begin{cases} uv = 6, \\ u+v = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2, \\ v_1 = 3; \end{cases} \begin{cases} u_2 = 3, \\ v_2 = 2. \end{cases}$$

$$\text{Получаем } \begin{cases} \sqrt{x} = 2, \\ \sqrt{y} = 3; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x} = 3, \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 9; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 9, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Ответ: (4; 9), (9; 4).

$$6.229. \begin{cases} x + \sqrt{y} - 56 = 0, \\ \sqrt{x} + y - 56 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Вычтя второе уравнение системы из первого, получим

$$x + \sqrt{y} - \sqrt{x} - y = 0, (x-y) - (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0,$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1) = 0,$$

откуда  $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$  или  $\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = 0$ .

Тогда  $\sqrt{y} = \sqrt{x}$  или  $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{y}$ .

Подставив значение  $\sqrt{y} = \sqrt{x}$  в первое уравнение системы, получим  $x + \sqrt{x} - 56 = 0$ . Решая это уравнение как квадратное относительно  $\sqrt{x}$ , получим  $\sqrt{x} = -8$ ,  $\sqrt{x} = 7$ ;  $\sqrt{x} = -8$  не подходит. Тогда  $x_1 = 49$ ;  $y_1 = 49$ .

Подставив значение  $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{y}$  во второе уравнение системы, получим  $y - \sqrt{y} - 56 = 0$ . Решая это уравнение как квадратное относительно  $\sqrt{y}$ , получим  $\sqrt{y_2} = 8$  или  $y_2 = 64$ ,  $\sqrt{y_3} = -7$  не подходит. Тогда  $\sqrt{x_2} = 1 - 8 = -7$ ;  $\sqrt{x_2} = -7$  не подходит.

*Ответ:* (49; 49).

$$6.230. \begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ 2x+y = 7. \end{cases}$$

*Решение.*

Возведя первое уравнение системы в куб, получим

$$x+2y + 3\sqrt[3]{(x+2y)^2(x-y+2)} + 3\sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)^2} + x-y + 2 = 27 \Leftrightarrow 2x+7 + 3\sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)}(\sqrt[3]{x+2y} + 3\sqrt[3]{x-y+2}) = 25.$$

Используя уравнения системы, получаем

$$7 + 9\sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)} = 25 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)(x-y+2) = 8. \text{ Имеем } \begin{cases} (x+2y)(x-y+2) = 8, \\ 2x+y = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = 7 - 2x, (x+2(7-2x))(x-7+2x+2) = 8, 9x^2 - 57x + 78 = 0,$$

откуда  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = \frac{13}{3}$ . Тогда  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = -\frac{5}{3}$ .

*Ответ:* (2; 3),  $(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3})$ .

$$6.231. \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7, \\ 3x+2y = 23. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+y \geq 0, \\ 2x+y+2 \geq 0. \end{cases}$$

Возведя первое уравнение системы в квадрат, получим

$$x+y+2\sqrt{(x+y)(2x+y+2)}+2x+y+2=49 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+2y+2\sqrt{(x+y)(2x+y+2)}=47 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 23+2\sqrt{(x+y)(2x+y+2)}=47, \quad \sqrt{(x+y)(2x+y+2)}=12.$$

Возведя в квадрат, имеем  $(x+y)(2x+y+2)=144$ . Система уравн

$$\text{принимает вид } \begin{cases} (x+y)(2x+y+2)=144, \\ 3x+2y=23 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{23-3x}{2}$$

$$\text{и } \left(x + \frac{23-3x}{2}\right) \left(2x + \frac{23-3x}{2} + 2\right) = 144 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 45 = 0,$$

откуда  $x_1 = -9$ ,  $x_2 = 5$ . Тогда  $y_1 = 25$ ,  $y_2 = 4$ .

*Ответ:*  $(-9; 25)$ ,  $(5; 4)$ .

$$6.232. \begin{cases} \sqrt{\frac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\frac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+y \geq 0, \\ x-y \geq 0, \\ x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\sqrt{\frac{20y}{x} \cdot \frac{5y}{16x}} = \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{25y^2}{4x^2}} = \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5y}{2x} = \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}, \text{ а после умножения числителя и знаменателя}$$

правой части уравнения на выражение, сопряженное со знаменателем,

$$\frac{5y}{2x} = \frac{(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})}{(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y})(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5y}{2x} = \frac{x+y+2\sqrt{x^2-y^2}+x-y}{x+y-x+y} \Leftrightarrow \frac{5y^2}{2x} - x = \sqrt{x^2-y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25y^4}{4x^2} - 5y^2 + x^2 = x^2 - y^2 \Leftrightarrow \frac{25y^4}{4x^2} - 4y^2 = 0 \Rightarrow 25y^2 = 16x^2, y = \frac{4}{5}x.$$

Таким образом,  $\sqrt{\frac{20}{x} \cdot \frac{4}{5}x} = \sqrt{x + \frac{4}{5}x} + \sqrt{x - \frac{4}{5}x}, 4 = \sqrt{\frac{9}{5}x} + \sqrt{\frac{x}{5}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{5}} = 1, \text{ откуда } x = 5; y = 4.$$

*Ответ:* (5; 4).

$$6.233. \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1, \\ 2x+2y=4. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x+y+1 \geq 0, \\ x+y \geq 0. \end{cases}$$

Возведя первое уравнение в квадрат, имеем

$$2x+y+1 - 2\sqrt{(2x+y+1)(x+y)} + x+y = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+2y - 2\sqrt{(2x+y+1)(x+y)} = 0.$$

Так как  $3x+2y=4$ , то из второго уравнения системы получаем

$$4 - 2\sqrt{(2x+y+1)(x+y)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(2x+y+1)(x+y)} = 2.$$

После возведения в квадрат имеем  $(2x+y+1)(x+y) = 4$ .

$$y = \frac{4-3x}{2} \Rightarrow \left(2x + \frac{4-3x}{2} + 1\right) \left(x + \frac{4-3x}{2}\right) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0, x_1 = -4,$$

$x_2 = 2$ . Тогда  $y_1 = 8, y_2 = -1$ .

Проверкой убеждаемся, что  $x_1$  и  $u_1$  являются посторонними решениями

Ответ: (2; -1).

$$6.234. \begin{cases} u^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{u} + v^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{v} = 1,5, \\ uv = 64. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде 
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[6]{u}} + \frac{1}{\sqrt[6]{v}} = 1,5, \\ uv = 64. \end{cases}$$

Пусть  $\begin{cases} \sqrt[6]{u} = x > 0, \\ \sqrt[6]{v} = y > 0. \end{cases}$  Относительно  $x$  и  $y$  система принимает вид

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1,5, \\ (xy)^6 = 64, \end{cases} \text{ откуда получаем при } xy \neq 0, \begin{cases} x + y = 1,5xy, \\ xy = \pm 2. \end{cases}$$

Данная система равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 1,5xy, \\ xy = -2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + y = 1,5xy, \\ xy = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Тогда  $\begin{cases} \sqrt[6]{u} = 1, \\ \sqrt[6]{v} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 64; \end{cases} \begin{cases} \sqrt[6]{u} = 2, \\ \sqrt[6]{v} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 64, \\ v_2 = 1. \end{cases}$

Ответ: (1; 64), (64; 1).

$$6.235. \begin{cases} 3\sqrt{\frac{y+1}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{y+1}} = 1, \\ \sqrt{x+y+1} + \sqrt{x-y+10} = 5. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq -1, \\ x + y + 1 \geq 0, \\ x - y + 10 \geq 0. \end{cases}$$



Перепишем первое уравнение системы в виде

$$\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}} - 1 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}\right)^2 - 3\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}} - 2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}$ , имеем  $\sqrt[3]{\frac{y+1}{x}} = -1$ , откуда

$$\frac{y+1}{x} = -1, y = -x - 1 \text{ или } \sqrt[3]{\frac{y+1}{x}} = 2, \text{ откуда } \frac{y+1}{x} = 8, y = 8x - 1.$$

Из второго уравнения системы  $\sqrt{x-x-1+1} + \sqrt{x+x+1+10} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{2x+11} = 5,$

$$\sqrt{x+8x-1+1} + \sqrt{x-8x+1+10} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{9x} + \sqrt{-7x+11} = 5. \quad x_1 = 7, \quad x_2 = \frac{49}{64},$$

$$x_3 = 1. \text{ Тогда } y_1 = -8, y_2 = \frac{41}{8}, y_3 = 7.$$

*Ответ:*  $(7; -8), \left(\frac{49}{64}; \frac{41}{8}\right), (1; 7).$

6.236. 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - y^2} = 6, \\ xy^2 = 6\sqrt{10}. \end{cases}$$

*Решение.*

ОДЗ: 
$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - y^2 \geq 0. \end{cases}$$

Возводим первое уравнение системы в квадрат, тогда

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^4 - y^4} + x^2 - y^2 = 36 \Leftrightarrow \sqrt{x^4 - y^4} = 18 - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - y^4 = 324 - 36x^2 + x^4, y^4 - 36x^2 + 324 = 0.$$

Из второго уравнения системы имеем

$$x = \frac{6\sqrt{10}}{y^2} \Rightarrow y^4 - 36 \cdot \frac{360}{y^4} + 324 = 0, y^8 + 324y^4 - 12960 = 0,$$

где  $y \neq 0 \Rightarrow y^4 = 36, y_1 = -\sqrt{6}, y_2 = \sqrt{6}$ . Тогда  $x_{1,2} = \frac{6\sqrt{10}}{6} = \sqrt{10}$ .

*Ответ:*  $(\sqrt{10}; -\sqrt{6}), (\sqrt{10}; \sqrt{6}).$

$$6.237. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} = 5. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Перепишем систему уравнений в виде } \begin{cases} \sqrt{x} = 3 - \sqrt{y}, \\ \sqrt{x+5} = 5 - \sqrt{y+3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 9 - 6\sqrt{y} + y, \\ x + 5 = 25 - 10\sqrt{y+3} + y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 - 6\sqrt{y} + y, \\ x = 23 - 10\sqrt{y+3} + y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 9 - 6\sqrt{y} + y, 9 - 6\sqrt{y} + y = 23 - 10\sqrt{y+3} + y \Leftrightarrow 5\sqrt{y+3} = 7 + 3\sqrt{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25y + 75 = 49 + 42\sqrt{y} + 9y, 8y + 13 = 21\sqrt{y} \Rightarrow 64y^2 - 233y + 169 = 0,$$

$$\text{откуда } y_1 = 1, y_2 = \frac{169}{64}. \text{ Тогда } x_1 = 4, x_2 = \frac{121}{64}.$$

$$\text{Ответ: } (4; 1), \left(\frac{121}{64}; \frac{169}{64}\right).$$

$$6.238. \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 1\right)^2} = 1,6, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

Будем преобразовывать первое уравнение системы

$$\sqrt{\left(\frac{x^2 - y^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2} = 1,6 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{-2y^2}{x^2 + y^2}\right)^2} = 1,6 \Rightarrow \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = 1,6,$$

$$\frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{5}{4}, \frac{x^2}{y^2} + 1 = \frac{5}{4}, \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{4}. \text{ Тогда } \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$$

или  $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$  и данная система уравнений равносильна двум системам урав-

нений:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}, \\ y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \\ y = 2 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = -2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Ответ:  $(-1; -2), (1; 2)$ .

6.239. 
$$\begin{cases} |2x + 3y| = 5, \\ |2x - 3y| = 1. \end{cases}$$

Решение.

Данная система равносильна четырем системам уравнений:

1) 
$$\begin{cases} 2x + 3y = -5, \\ 2x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}, \\ y_1 = -\frac{2}{3}; \end{cases}$$

2) 
$$\begin{cases} 2x + 3y = -5, \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -1; \end{cases}$$

3) 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 2x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 1; \end{cases}$$

4) 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = \frac{3}{2}, \\ y_4 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ:  $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right), (-1; -1), (1; 1), \left(\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$ .

6.240. 
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ |x + y| = 5. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: 
$$\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение системы

$$\sqrt{\frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x+y)^2}}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{|x+y|}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2}.$$

Таким образом получили:

$$\begin{cases} \frac{|x+y|}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2}, \\ |x+y| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2}, \\ |x+y| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy} = 2, \\ |x+y| = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = 4, \\ |x+y| = 5. \end{cases}$$

Получаем два случая:

$$1) \begin{cases} xy = 4, \\ x + y = -5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} xy = 4, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

По теореме Виета получаем  $\begin{cases} x_1 = -4, \\ y_1 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -4; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 4; \end{cases} \begin{cases} x_4 = 4, \\ y_4 = 1. \end{cases}$

Ответ:  $(-4; -1), (-1; -4), (1; 4), (4; 1)$ .

$$6.241. \begin{cases} u - v + \sqrt{\frac{u-v}{u+v}} = \frac{12}{u+v}, \\ u^2 + v^2 = 41. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{u-v}{u+v} \geq 0, \\ u+v \neq 0. \end{cases}$$

Данная система равносильна двум системам уравнений:

$$1) \begin{cases} u - v \geq 0, \\ u + v > 0, \\ u - v + \sqrt{\frac{u-v}{u+v}} = \frac{12}{u+v}, \\ u^2 + v^2 = 41; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} u - v \leq 0, \\ u + v < 0, \\ -(u - v) + \sqrt{\frac{u - v}{u + v}} = \frac{12}{-(u + v)}, \\ u^2 + v^2 = 41; \end{cases}$$

1) Умножив первое уравнение системы уравнений 1) на  $u + v > 0$ , имеем  $u^2 - v^2 + \sqrt{u^2 - v^2} - 12 = 0 \Rightarrow \sqrt{u^2 - v^2} = 3$ ,  $u^2 - v^2 = 9$  или

$$\sqrt{u^2 - v^2} = -4 \text{ (нет решений)}. \text{ Тогда система 1) имеет вид } \begin{cases} u^2 - v^2 = 9, \\ u^2 + v^2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 25, \\ v^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \pm 5, \\ v = \pm 4. \end{cases}$$

Получили:

$$\begin{cases} u = -5, \\ v = -4; \end{cases} \begin{cases} u = -5, \\ v = 4; \end{cases} \begin{cases} u = 5, \\ v = -4; \end{cases} \begin{cases} u = 5, \\ v = 4. \end{cases}$$

Так как  $u - v \geq 0$  и  $u + v > 0$ , то  $\begin{cases} u_1 = 5, \\ v_1 = -4; \end{cases} \begin{cases} u_2 = 5, \\ v_2 = 4. \end{cases}$

2) Умножив первое уравнение системы уравнений 2) на  $u + v < 0$ , имеем

$$u^2 - v^2 - \sqrt{u^2 - v^2} - 12 = 0 \Rightarrow \sqrt{u^2 - v^2} = 4, \quad u^2 - v^2 = 16$$

или  $\sqrt{u^2 - v^2} = -3$  (нет решений).

$$\text{Система 2) имеет вид } \begin{cases} u^2 - v^2 = 16, \\ u^2 + v^2 = 41. \end{cases}$$

Отсюда, с учетом  $u - v \leq 0$  и  $u + v < 0$ ,

$$\begin{cases} u_3 = -\sqrt{28,5}, \\ v_3 = -\sqrt{12,5}; \end{cases} \begin{cases} u_4 = -\sqrt{28,5}, \\ v_4 = \sqrt{12,5}. \end{cases}$$

**Ответ:**  $(5; -4)$ ,  $(5; 4)$ ,  $(-\sqrt{28,5}; -\sqrt{12,5})$ ,  $(-\sqrt{28,5}; \sqrt{12,5})$ .

$$6.242. \begin{cases} \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 2, \\ x^2 - 18 = 2y(4y-9). \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \frac{3x-2y}{2x} > 0.$$

Преобразуем первое уравнение системы

$$\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left( \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} \right)^2 - 2\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + 1 = 0,$$

$$\text{где } \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} \neq 0, \left( \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} - 1 \right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} = 1, \frac{3x-2y}{2x} = 1, x = 2y.$$

Из второго уравнения системы имеем  $(2y)^2 - 18 = 2y(4y-9) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 9y + 9 = 0, \text{ откуда } y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = 3; x_1 = 3, x_2 = 6.$$

*Ответ:*  $(3; \frac{3}{2}), (6; 3)$ .

$$6.243. \begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 88} + \sqrt{x + 6y} = 19, \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 88} = 1 + 2\sqrt{x + 6y}. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{Пусть } \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y - 88} = u \geq 0, \\ \sqrt{x + 6y} = v \geq 0. \end{cases}$$

Относительно  $u$  и  $v$  система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 5u + v = 19, \\ 3u = 1 + 2v \end{cases} \Rightarrow u = \frac{1+2v}{3}, 5\left(\frac{1+2v}{3}\right) + v = 19 \Rightarrow v = 4, u = \frac{1+2 \cdot 4}{3} = 3.$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y - 88} = 3, \\ \sqrt{x + 6y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3y - 88 = 9, \\ x + 6y = 16 \end{cases} \Rightarrow x = 16 - 6y,$$

$$(16-6y)^2 - 3y = 97 \Leftrightarrow 36y^2 - 195y + 159 = 0, \text{ откуда } y_1 = 1, y_2 = \frac{53}{12}.$$

Тогда  $x_1 = 10, x_2 = -\frac{21}{2}$ .

Ответ:  $(10; 1), \left(-\frac{21}{2}; \frac{53}{12}\right)$ .

**6.244.** Решить уравнение

$$x(x+1) + (x+1)(x+2) + (x+2)(x+3) + (x+3)(x+4) + \dots \\ \dots + (x+8)(x+9) + (x+9)(x+10) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 8 \cdot 9 + 9 \cdot 10.$$

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде

$$(x^2 + x) + (x^2 + 3x + 2) + (x^2 + 5x + 6) + (x^2 + 7x + 12) + \dots \\ \dots + (x^2 + 17x + 72) + (x^2 + 19x + 90) = 2 + 6 + 12 + \dots + 72 + 90 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2 + x) + (x^2 + 3x) + (x^2 + 5x) + (x^2 + 7x) + \dots + (x^2 + 17x) + \\ + (x^2 + 19x) = 0 \Leftrightarrow x(x + 1 + x + 3 + x + 5 + x + 7 + \dots + x + 17 + x + 19) = 0, \\ x((x + x + \dots + x) + (1 + 3 + 5 + \dots + 19)) = 0, \text{ откуда } x_1 = 0, \text{ или } (x + x + \dots + x) + \\ + (1 + 3 + 5 + \dots + 19) = 0 \Leftrightarrow 10x + \frac{1+19}{2} \cdot 10 = 0, 10x + 100 = 0, \text{ откуда} \\ x_2 = -10.$$

Ответ:  $x_1 = 0, x_2 = -10$ .

**6.245.** Найти коэффициенты  $m$  и  $n$  квадратного трехчлена  $x^2 + mx + n$ , если известно, что его остатки при делении на двучлены  $x - m$  и  $x - n$  равны соответственно  $m$  и  $n$ .

*Решение.*

Разделив  $x^2 + mx + n$  на  $x - m$ , имеем решение

$$\begin{array}{r|l} x^2 + mx + n & x - m \\ -x^2 - mx & \hline \hline 2mx + n & \\ -2mx + 2m^2 & \\ \hline 2m^2 + n & \end{array}$$

Таким образом,  $2m^2 + n = m$ .

Разделив  $x^2 + mx + n$  на  $x - n$ , получим

$$\begin{array}{r} x^2 + mx + n \\ -x^2 - nx \\ \hline (m+n)x + n \\ -(m+n)x - n(m+n) \\ \hline n + n(m+n) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x - n \\ x + (m+n) \end{array} \right.$$

Отсюда имеем  $n + n(m+n) = n$ .

Получили систему уравнений

$$\begin{cases} 2m^2 + n = m, \\ n + n(m+n) = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - m + n = 0, \\ n(m+n) = 0 \end{cases} \Rightarrow n = 0 \text{ или } n + m = 0.$$

Поэтому данная система равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases} 2m^2 - m + n = 0, \\ n = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2m^2 - m + n = 0, \\ m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 0, \\ n_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} m_2 = \frac{1}{2}, \\ n_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} m_3 = 1, \\ n_3 = -1. \end{cases}$$

Ответ:  $(0; 0)$ ,  $(\frac{1}{2}; 0)$ ,  $(1; -1)$ .

**6.246.** Квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет два корня. Составить новое квадратное уравнение, у которого один из корней на единицу меньше большего корня, а другой на единицу больше меньшего корня данного уравнения.

Решение.

Пусть  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  — больший корень, а  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  —

меньший корень уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Тогда  $y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - 1$ ,  $y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + 1$  — корни квад-

ратного уравнения  $y^2 + py + q = 0$ .



По теореме Виета имеем

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - 1 + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + 1 = -\frac{b}{a}, \\ y_1 \cdot y_2 = \left( \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - 1 \right) \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + 1 \right) = \frac{c - a + \sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = p, \\ q = \frac{c - a + \sqrt{b^2 - 4ac}}{a}, \end{cases} \text{ откуда имеем } y^2 + \frac{b}{a}y + \frac{c - a + \sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$ay^2 + by + (c - a + \sqrt{b^2 - 4ac}) = 0.$$

*Ответ:*  $ay^2 + by + (c - a + \sqrt{b^2 - 4ac}) = 0.$

**6.247.** Определить, при каких значениях  $m$  один из корней уравнения  $z^3 - (m^2 - m + 7)z - (3m^2 - 3m - 6) = 0$  равен  $-1$ . Отыскать два остальных корня уравнения при этих значениях  $m$ .

*Решение.*

Пусть  $z_1 = -1$ , тогда  $(-1)^3 - (m^2 - m + 7)(-1) - (3m^2 - 3m - 6) = 0$ ,  $m^2 - m - 6 = 0$ , откуда  $m_1 = -2$ ,  $m_2 = 3$ . При  $m_1 = -2$  и  $m_2 = 3$  уравнение принимает вид  $z^3 - 13z - 12 = 0$ . Делим левую часть уравнения на  $z + 1$ :  $\frac{z^3 - 13z - 12}{z + 1} = z^2 - z - 12$ ,  $z^2 - z - 12 = 0$ , откуда  $z_2 = -3$ ,  $z_3 = 4$ .

*Ответ:*  $m_1 = -2$  и  $m_2 = 3$ ; при этих значениях  $m$  будет  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = -3$ ,  $z_3 = 4$ .

**6.248.** Показать, что если коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  связаны условием  $2b^2 - 9ac = 0$ , то отношение корней уравнения равно 2.

*Решение.*

Пусть  $\frac{x_1}{x_2} = 2$ .

Из теоремы Виета получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \\ \frac{x_1}{x_2} = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_2, \begin{cases} 2x_2 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ 2x_2 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{b}{3a}, \\ x_2^2 = \frac{c}{2a}. \end{cases}$$

Таким образом  $\frac{b^2}{9a^2} = \frac{c}{2a}$ ,  $2b^2 = 9ac$ ,  $2b^2 - 9ac = 0$ .

Что и требовалось доказать.

**6.249.** Показать, что если  $a$  и  $b$  — корни уравнения  $x^2 + px + 1 = 0$ , а  $b$  и  $c$  — корни уравнения  $x^2 + qx + 2 = 0$ , то  $(b-a)(b-c) = pq - 6$ .

*Решение.*

По теореме Виета имеем 
$$\begin{cases} a + b = -p, \\ ab = 1, \\ b + c = -q, \\ bc = 2. \end{cases}$$

Отсюда, умножая первое уравнение системы на третье,

$$(a+b)(b+c) = pq, \quad b^2 + ab + bc + ac = pq,$$

$$b^2 + ab + bc + ac - 2ab - 2bc = pq - 2ab - 2bc,$$

$$b^2 - ab - bc + ac = pq - 2ab - 2bc, \text{ учитывая } ab = 1, bc = 2,$$

$$b^2 - ab - bc + ac = pq - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2, \quad b^2 - ab - bc + ac = pq - 6,$$

$$(b-a)(b-c) = pq - 6.$$

Что и требовалось доказать.

**6.250.** При каких значениях  $a$  уравнения  $x^2 + ax + 1 = 0$  и  $x^2 + x + a = 0$  имеют общий корень?

*Решение.*

Если при каких-то  $a$  и  $x$  левые части уравнений равны 0, то они равны и между собой:

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 = 0, \\ x^2 + x + a = 0. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение системы из первого, получим  $ax - x + 1 - a = 0$ ,  $(a-1)x - (a-1) = 0$ ,  $(a-1)(x-1) = 0$ , откуда:

1) если  $a-1 = 0$ , то  $a = 1$  и каждое уравнение примет вид  $a^2 + a + 1 = 0$ , т.е. оно не имеет корней;

2) если  $a-1 \neq 0$ , то  $x = 1$ , откуда  $1 + a + 1 = 0$ , т.е.  $a = -2$ .

Ответ:  $a = -2$ .

**6.251.** При каком положительном  $p$  корни уравнения

$$5x^2 - 4(p+3)x + 4 = p^2$$

противоположны по знаку? Найти эти корни.

Решение.

Рассмотрим квадратное уравнение  $5x^2 - 4(p+3)x + 4 - p^2 = 0$ .

Корни квадратного уравнения противоположны по знаку, когда выполняется совокупность следующих систем неравенств:

$$1) \begin{cases} 16(p+3)^2 - 4 \cdot 5(4-p^2) > 0, \\ p > 0, \\ (p+3) > 0, \\ 4-p^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3p+4)^2 > 0, \\ p > 0, \\ p > -3, \\ p^2 > 4; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 16(p+3)^2 - 4 \cdot 5(4-p^2) > 0, \\ p > 0, \\ (p+3) < 0, \\ 4-p^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3p+4)^2 > 0, \\ p > 0, \\ p < -3, \\ p^2 > 4, \end{cases}$$

откуда  $p > 2$ . Решим квадратное уравнение:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2(p+3) \pm \sqrt{4(p+3)^2 - 5(4-p^2)}}{5} = \frac{2(p+3) \pm \sqrt{9p^2 + 24p + 16}}{5} = \\ &= \frac{2(p+3) \pm \sqrt{9(p+4)^2}}{5} = \frac{2(p+3) \pm 3(p+4)}{5}. \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{2p+6-3p-4}{5} = \frac{-p+2}{5}, \quad x_2 = \frac{2p+6+3p+4}{5} = p+2.$$

Ответ:  $p > 2$ ;  $x_1 = \frac{-p+2}{5}$ ,  $x_2 = p+2$ .

**6.252.** Найти коэффициенты уравнения  $x^2 + px + q = 0$  при условии, что разность корней уравнения равна 5, а разность их кубов равна 35.

*Решение.*

Из условия имеем

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ (x_1 - x_2)((x_1 - x_2)^2 + 3x_1x_2) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ 5(25 + 3x_1x_2) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ x_1x_2 = -6, \end{cases} \text{откуда } \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -2. \end{cases}$$

По теореме Виета имеем:

$$1) \begin{cases} p_1 = -(x_1 + x_2) = 1, \\ q_1 = x_1 \cdot x_2 = -6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} p_2 = -1, \\ q_2 = -6. \end{cases}$$

*Ответ:*  $p_1 = 1, q_1 = -6; p_2 = -1, q_2 = -6.$

**6.253.** Составить квадратное уравнение с корнями  $(a+b)^2$  и  $(a-b)^2$ , если  $a$  и  $b$  — корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$ .

*Решение.*

Составим квадратное уравнение  $y^2 + Py + Q = 0$ .

По теореме Виета и условию имеем

$$\begin{cases} P = -((a-b)^2 + (a+b)^2) = -(a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + 2ab + b^2), \\ Q = (a-b)^2 \cdot (a+b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} P = -2(a^2 + b^2) = -2((a+b)^2 - 2ab), \\ Q = (a-b)^2 \cdot (a+b)^2. \end{cases}$$

Для нахождения значений  $a+b$ ,  $a-b$  и  $ab$  еще раз используем теорему Виета:

$$\begin{cases} a+b = -p, \\ ab = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = p^2, \\ ab = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = p^2, \\ ab = q \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = p^2, \\ -4ab = -4q. \end{cases} \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = p^2 - 4q, (a-b)^2 = p^2 - 4q.$$

Таким образом 
$$\begin{cases} P = -2(p^2 - 2q), \\ Q = (p^2 - 4q)p^2. \end{cases}$$

Искомое уравнение имеет вид  $y^2 - 2(p^2 - 2q)y + (p^2 - 4q)p^2 = 0$ .

Ответ:  $y^2 - 2(p^2 - 2q)y + (p^2 - 4q)p^2 = 0$ .

**6.254.** Обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$  корни уравнения  $3x^2 + 7x + 4 = 0$ . Не решая данного уравнения, составить новое квадратное уравнение с числовыми коэффициентами, корни которого равны  $\frac{\alpha}{\beta-1}$  и  $\frac{\beta}{\alpha-1}$ .

*Решение.*

По теореме Виета имеем 
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{7}{3}, \\ \alpha \cdot \beta = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Пусть  $y^2 + py + q = 0$  — новое квадратное уравнение. Из условия по теореме Виета получаем

$$\begin{cases} p = -\left(\frac{\alpha}{\beta-1} + \frac{\beta}{\alpha-1}\right) = -\left(\frac{\alpha^2 - \alpha + \beta^2 - \beta}{(\beta-1)(\alpha-1)}\right) = -\frac{\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\ q = \frac{\alpha}{\beta-1} \cdot \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} p = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1}, \\ q = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1}. \end{cases}$$

Так как  $\alpha + \beta = -\frac{7}{3}$  и  $\alpha\beta = \frac{4}{3}$ , то получим  $p = -\frac{23}{21}$ ,  $q = \frac{2}{7}$ .

Искомое уравнение имеет вид

$$y^2 - \frac{23}{21}y + \frac{2}{7} = 0 \Leftrightarrow 21y^2 - 23y + 6 = 0.$$

Ответ:  $21y^2 - 23y + 6 = 0$ .

**6.255.** Показать, что среди корней уравнения  $x^4 + 5x^3 + 15x - 9 = 0$  есть только один положительный и только один отрицательный корень (сами корни находить не обязательно).

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде

$$(x^4 - 9) + (5x^3 + 15x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 3) + 5x(x^2 + 3) = 0,$$

$$(x^2 + 3)(x^2 + 5x - 3) = 0.$$

Отсюда  $x^2 + 5x - 3 = 0$  ( $x^2 + 3 \neq 0$ ).

Квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ , у которого

$$\begin{cases} a > 0, \\ D > 0, \\ b > 0, \\ c < 0 \end{cases} \text{ имеет } x_1 < 0, x_2 > 0 \text{ (} x_2 > x_1 \text{)}.$$

# ЛОГАРИФМЫ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

## ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ФОРМУЛЫ

### Степени с действительными показателями

$$a^0 \equiv 1, \quad (7.1)$$

где  $0^0$  не имеет смысла;

$$a^{-n} \equiv \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0), \quad (7.2)$$

где  $n$  — действительное число;

$$a^{\frac{m}{n}} \equiv \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0), \quad (7.3)$$

где  $m$  и  $n$  — натуральные числа;

$$a^\alpha \cdot a^\beta \equiv a^{\alpha+\beta}, \quad (7.4)$$

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} \equiv a^{\alpha-\beta}, \quad (7.5)$$

$$(a^\alpha)^\beta \equiv a^{\alpha\beta}, \quad (7.6)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — действительные числа.

### Показательная функция

Показательной функцией переменной  $x$  называется функция

$$y = a^x,$$

где  $a$  — данное число.

Если  $a < 0$ , то функция  $a^x$  определена только при целых и при дробных значениях  $x$  (если знаменатель дробного показателя – нечетное число). Если  $a = 0$ , то выражение  $0^x$  определено при  $x > 0$ . Если  $a > 0$ , то функция  $a^x$  определена при всех действительных значениях  $x$ , причем при  $a = 1$  имеем  $1^x = 1$ , т.е. функция равна постоянному.

В дальнейшем показательную функцию  $a^x$  будем рассматривать при  $a > 0$  и  $a \neq 1$ .

### **Основные свойства показательной функции**

$$y = a^x \text{ при } a > 0, a \neq 1:$$

1. Показательная функция определена при всех действительных значениях  $x$  ( $x \in R$ ).

2. Областью изменения показательной функции служит множество всех положительных действительных чисел, т.е.  $y \in (0, +\infty)$ .

3. При  $a > 1$  показательная функция строго возрастает, т.е. из неравенства  $x_1 < x_2$  следует неравенство  $a^{x_1} < a^{x_2}$ . Причем если  $x \in (-\infty; 0)$ , то  $y \in (0; 1)$ ; если  $x = 0$ , то  $y = 1$ ; если  $x \in (0; \infty)$ , то  $y \in (1; +\infty)$ , т.е. если  $x \in (-\infty; +\infty)$ , то  $y \in (0; +\infty)$ ;  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$  и  $y \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

4. При  $a \in (0; 1)$  показательная функция строго убывает, т.е. из неравенства  $x_1 < x_2$  следует неравенство  $a^{x_1} > a^{x_2}$ . Причем если  $x \in (-\infty; 0)$ , то  $y \in (1; +\infty)$ ; если  $x = 0$ , то  $y = 1$ ; если  $x \in (0; +\infty)$ , то  $y \in (0; 1)$ , т.е. если  $x \in (-\infty; +\infty)$ , то  $y \in (0; +\infty)$ ;  $y \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow -\infty$  и  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

5. Характеристическое свойство: значение показательной функции от суммы равно произведению значений этой функции от слагаемых, т.е.

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}.$$

### **Логарифмы и их свойства**

Логарифмом числа  $b$  по основанию  $a$  называется показатель степени, в которую надо возвести число  $a$ , чтобы получить число  $b$ :  $\log_a b = x$ , если  $a^x = b$ , или

$$a^{\log_a b} = b. \quad (7.7)$$



В дальнейшем основание логарифмов будем считать положительным и отличным от единицы ( $a > 0, a \neq 1$ ).

Приведем некоторые свойства логарифмов (при любом положительном основании, отличном от единицы).

1. Логарифм единицы равен нулю, т.е.  $\log_a 1 = 0$ .
2. Логарифм основания равен единице, т.е.  $\log_a a = 1$ .
3. Для любого положительного числа  $b$  существует, и притом только одно, такое действительное число  $\alpha$ , что  $\log_a b = \alpha$ .
4. Из равенства  $\log_a x_1 = \log_a x_2$  следует  $x_1 = x_2$  (и наоборот).

### *Основные правила логарифмирования*

1. Логарифм произведения двух или нескольких положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c. \quad (7.8)$$

*Замечание.* Логарифм произведения нескольких чисел, если оно положительно, равен сумме логарифмов модулей этих чисел, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\begin{aligned} \log_a (b_1 \cdot b_2 \dots b_n) \equiv \log_a |b_1| + \log_a |b_2| + \dots + \\ + \log_a |b_n| \quad (b_1 \cdot b_2 \dots b_n > 0). \end{aligned} \quad (7.9)$$

2. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c. \quad (7.10)$$

*Замечание.* Логарифм частного двух чисел, если оно положительно, равен разности логарифмов модулей делимого и делителя, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a \frac{b}{c} \equiv \log_a |b| - \log_a |c| \quad (b \cdot c > 0). \quad (7.11)$$

3. Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм ее основания (логарифмы взяты по тому же основанию), т.е.

$$\log_a b^c = c \log_a b. \quad (7.12)$$

*Замечание.* Логарифм положительной степени числа, отличного от нуля, равен произведению показателя степени на логарифм модуля ее основания, взятый по тому же основанию, т.е.

$$\log_a b^c \equiv c \log_a |b| \quad (b^c > 0). \quad (7.13)$$

### **Формулы перехода от одного основания логарифма к другому**

1. Логарифм числа по данному основанию равен логарифму этого числа по новому основанию, деленному на логарифм данного основания по новому основанию, т.е.

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}. \quad (7.14)$$

Множитель  $\frac{1}{\log_b a}$  называется *модулем перехода*.

2. Из формулы (7.14) при  $N = b$  получаем

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \quad (7.15)$$

3. Часто в логарифмических преобразованиях пользуются тождествами

$$\log_{a^k} N \equiv \frac{1}{k} \log_{|a|} N \quad (a^k > 0) \quad (7.16)$$

и

$$\log_{ab} N \equiv \frac{\log_{|a|} N}{1 + \log_{|a|} |b|} \quad (ab > 0). \quad (7.17)$$

### **Логарифмическая функция, ее свойства и график**

*Логарифмической функцией* называется функция вида

$$y = \log_a x,$$

где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  и  $x$  – независимая переменная.

По определению логарифма выражение  $y = \log_a x$  означает то же, что и выражение  $a^y = x$ , т.е. логарифмическая функция есть обратная функция по отношению к показательной.

## Основные свойства логарифмической функции

1. Логарифмическая функция определена при всех положительных действительных значениях  $x$  (нуль и отрицательные числа при положительном основании логарифмов не имеют).

2. Областью изменения логарифмической функции служит множество всех действительных чисел  $y \in (-\infty; +\infty)$ .

3. При  $a > 0$  логарифмическая функция возрастает, т.е. если  $0 < x_1 < x_2$ , то  $\log_a x_1 < \log_a x_2$ . Причем если  $x \in (0; 1)$ , то  $y \in (-\infty; 0)$ ; если  $x = 1$ , то  $y = 0$ ; если  $x \in (1; +\infty)$ , то  $y \in (0; +\infty)$ , т.е. если  $x \in (0; +\infty)$ , то  $y \in (-\infty; +\infty)$ ;  $y \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow 0$  и  $y \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

4. При  $0 < a < 1$  логарифмическая функция убывает, т.е. если  $0 < x_1 < x_2$ , то  $\log_a x_1 > \log_a x_2$ . Причем если  $x \in (0; 1)$ , то  $y \in (0; +\infty)$ ; если  $x = 1$ , то  $y = 0$ ; если  $x \in (1; +\infty)$ , то  $y \in (-\infty; 0)$ , т.е. если  $x \in (0; +\infty)$ , то  $y \in (-\infty; +\infty)$ ;  $y \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $y \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow 0$ .

5. Характеристическое свойство: значение логарифмической функции от произведений двух положительных чисел равно сумме значений функции от каждого из чисел:

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

## Показательные уравнения

*Показательным* называется уравнение, содержащее неизвестное только в показателе степени.

Рассмотрим несколько типов показательных уравнений, решаемых методами элементарной математики.

Показательные уравнения рассматриваются в множестве действительных чисел. Проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения при решении показательных уравнений в общем случае обязательна.

1. Уравнение вида

$$a^x = b \tag{7.18}$$

называется *простейшим показательным*.

Рассмотрим уравнение (7.18) при  $a > 0$  и  $a \neq 1$ . Если  $b > 0$ , то уравнение имеет единственное решение  $x = \log_a b$ . Если  $b \leq 0$ , то уравнение решений не имеет.

## 2. Показательное уравнение вида

$${}_a f_1(x) = b f_2(x), \quad (7.19)$$

где  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ , а  $f_1(x), f_2(x)$  — заданные элементарные функции, логарифмированием приводится к виду

$$f_1(x) \log_c a = f_2(x) \log_c b.$$

Если последнее уравнение решается методами элементарной математики, то тем самым решается уравнение (7.19).

## Логарифмические уравнения

*Логарифмическим уравнением* называется уравнение, содержащее неизвестные только под знаком логарифма.

Логарифмические уравнения, как и показательные, рассматриваются в множестве действительных чисел. Проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения в общем случае является обязательной.

### 1. Уравнение вида

$$\log_a x = b, \quad (7.20)$$

где  $x$  — неизвестное, а  $a$  и  $b$  — заданные числа, называется *простейшим логарифмическим*.

Если  $a > 0$  и  $a \neq 1$ , то такое уравнение при любом действительном значении  $b$  имеет единственное решение

$$x = a^b. \quad (7.21)$$

### 2. Логарифмическое уравнение вида

$$\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x), \quad (7.22)$$

где  $a > 0$  и  $a \neq 1$ , после потенцирования приводится к виду

$$f_1(x) = f_2(x). \quad (7.23)$$

Корнями уравнения (7.22) будут только те корни уравнения (7.23), при которых  $f_1(x) > 0$  и  $f_2(x) > 0$ , т.е. корни, принадлежащие к области определения уравнения (7.22).

### 3. Логарифмические уравнения вида

$$f(\log_a \psi(x)) = 0, \quad (7.24)$$

где  $f(t)$  и  $\psi(x)$  — некоторые заданные функции, заменой  $\log_a \psi(x) = t$  приводятся к уравнению  $f(t) = 0$ .

## Показательно-логарифмические уравнения

Если неизвестное в уравнении входит в показатель степени и под знак логарифма или в основание логарифма, то такое уравнение называют *показательно-логарифмическим*.

Показательно-логарифмические уравнения чаще всего решают, логарифмируя обе части уравнения, и приводят их к логарифмическим уравнениям.

При решении систем показательных и логарифмических уравнений в основном применяются те же способы, что и при решении систем алгебраических уравнений (подстановки, алгебраического сложения, введения новых неизвестных и др.).

Упростить выражения (7.150 — 7.156):

$$7.150. \left( b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}} \right)^{2 \log_{ab}(a+b)}$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \left( b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}} \right)^{2 \log_{ab}(a+b)} = \left( b^{\frac{1 \lg a}{2 \lg b}} \cdot a^{\frac{1 \lg b}{2 \lg b}} \right)^{2 \log_{ab}(a+b)} = \\ & = \left( (ab)^{\frac{1}{2}} \right)^{2 \log_{ab}(a+b)} = (ab)^{\log_{ab}(a+b)} = a + b. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $a + b$ .

$$7.151. \left( (\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2)^{1/2} + 2 \right)^{1/2} - \log_b a - \log_a b.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} & \left( (\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2)^{1/2} + 2 \right)^{1/2} - \log_b a - \log_a b = \\ & \left( \left( \log_b^4 a + \frac{1}{\log_b^4 a} + 2 \right)^{1/2} + 2 \right)^{1/2} - \log_b a - \frac{1}{\log_b a} = \sqrt{\sqrt{\frac{\log_b^8 a + 2 \log_b^4 a + 1}{\log_b^4 a}} + 2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\log_b^2 a + 1}{\log_b a} &= \sqrt{\left(\frac{\log_b^4 a + 1}{\log_b^2 a}\right)^2} + 2 - \frac{\log_b^2 a + 1}{\log_b a} = \sqrt{\frac{\log_b^4 a + 1}{\log_b^2 a} + 2} - \\ -\frac{\log_b^2 a + 1}{\log_b a} &= \sqrt{\frac{\log_b^4 a + 2\log_b^2 a + 1}{\log_b^2 a}} - \frac{\log_b^2 a + 1}{\log_b a} = \sqrt{\left(\frac{\log_b^2 a + 1}{\log_b a}\right)^2} - \\ -\frac{\log_b^2 a + 1}{\log_b a} &= \frac{\log_b^2 a + 1}{|\log_b a|} - \frac{\log_b^2 a + 1}{\log_b a}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем два случая:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} \log_b a < 0 \text{ или } \begin{cases} 0 < b < 1, \\ a > 1 \end{cases} \cup \begin{cases} b > 1, \\ 0 < a < 1; \end{cases} \\ -\frac{\log_b^2 a + 1}{\log_b a} - \frac{\log_b^2 a + 1}{\log_b a} = \frac{-2(\log_b^2 a + 1)}{\log_b a} = -2(\log_b a + \log_a b); \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} \log_b a > 0 \text{ или } \begin{cases} 0 < b < 1, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} b > 1, \\ a > 1; \end{cases} \\ \frac{\log_b^2 a + 1}{\log_b a} - \frac{\log_b^2 a + 1}{\log_b a} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:  $-2(\log_b a + \log_a b)$ , если  $\begin{cases} a > 1, \\ 0 < b < 1 \end{cases}$  или  $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ b > 1, \end{cases}$  и 0, если

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < b < 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a > 1, \\ b > 1. \end{cases}$$

**7.152.**  $\log_2 2x^2 + \log_2 x \cdot x^{\log_x(\log_2 x + 1)} + \frac{1}{2} \log_4^2 x^4 + 2^{-3 \log_{1/2} \log_2 x}$ .

Решение.

ОДЗ:  $x > 1$ .

$$\begin{aligned} & \log_2 2x^2 + \log_2 x \cdot x^{\log_x(\log_2 x + 1)} + \frac{1}{2} \log_4^2 x^4 + 2^{-3 \log_{1/2} \log_2 x} = \\ & = \log_2 2 + \log_2 x^2 + \log_2 x \cdot (\log_2 x + 1) + 2 \log_2^2 x + 2^{\log_2 \log_2^3 x} = \\ & = 1 + 2 \log_2 x + \log_2^2 x + \log_2 x + 2 \log_2^2 x + \log_2^3 x = \\ & = \log_2^3 x + 3 \log_2^2 x + 3 \log_2 x + 1 = (\log_2 x + 1)^3. \end{aligned}$$

Ответ:  $(\log_2 x + 1)^3$ .

$$7.153. \left( x^{1 + \frac{1}{2\log_4 x}} + 8^{\frac{1}{3\log_x 2^2}} + 1 \right)^{1/2}.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $0 < x \neq 1$ .

$$\begin{aligned} \left( x^{1 + \frac{1}{2\log_4 x}} + 8^{\frac{1}{3\log_x 2^2}} + 1 \right)^{1/2} &= \left( x \cdot x^{\frac{1}{\log_2 x}} + 2^{\frac{1}{\log_x 2^2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( x \cdot x^{\log_x 2} + 2^{\log_2 x^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} = (2x + x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = x+1 \end{aligned}$$

(с учетом ОДЗ:  $0 < x \neq 1$ ).

*Ответ:*  $x+1$ , где  $0 < x \neq 1$ .

$$7.154. \frac{\log_a b - \log \sqrt{a/b^3} \sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b - \log_{a/b^6} b} : \log_b (a^3 b^{-12}).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{\log_a b - \log \sqrt{a/b^3} \sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b - \log_{a/b^6} b} : \log_b (a^3 b^{-12}) &= \frac{\log_a b - \frac{\log_a \sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{\log_a \frac{\sqrt{a}}{b^3}} : \frac{\log_a a^3 \cdot b^{-12}}{\log_a b} = \\ &= \frac{\log_a b - \frac{\log_a b}{2}}{\frac{\log_a b}{1-4\log_a b} - \frac{\log_a b}{1-6\log_a b}} \cdot \frac{\log_a b}{3-12\log_a b} = \\ &= \frac{-3\log_a^2 b(1-4\log_a b)(1-6\log_a b)}{(-6\log_a^2 b + 4\log_a^2 b) \left( \frac{1}{2} - 3\log_a b \right)} \cdot \frac{\log_a b}{3(1-4\log_a b)} = \log_a b. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\log_a b$ .

7.155.  $(6(\log_b a \cdot \log_{a^2} b + 1) + \log_a b^{-6} + \log_a^2 b)^{1/2} - \log_a b$  при  $a > 1$ .

Решение.

$$\begin{aligned} & (6(\log_b a \cdot \log_{a^2} b + 1) + \log_a b^{-6} + \log_a^2 b)^{1/2} - \log_a b = \\ & = \left( 6\left(\frac{1}{2} + 1\right) - 6\log_a b + \log_a^2 b \right)^{1/2} - \log_a b = \sqrt{9 - 6\log_a b + \log_a^2 b} - \\ & - \log_a b = \sqrt{(3 - \log_a b)^2} - \log_a b = |3 - \log_a b| - \log_a b. \end{aligned}$$

Раскрывая модуль, получим два случая:

$$1) |3 - \log_a b| - \log_a b = \begin{cases} 3 - \log_a b \leq 0, \\ -3 + \log_a b - \log_a b = -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \geq a^3, \\ |3 - \log_a b| - \log_a b = -3; \end{cases}$$

$$2) |3 - \log_a b| - \log_a b = \begin{cases} 3 - \log_a b > 0, \\ 3 - \log_a b - \log_a b = 3 - 2\log_a b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < b < a^3, b \neq 1, \\ |3 - \log_a b| - \log_a b = 3 - 2\log_a b. \end{cases}$$

Ответ:  $-3$ , если  $b \geq a^3$ , и  $3 - 2\log_a b$ , если  $0 < b < a^3$ ,  $b \neq 1$ .

7.156.  $\frac{\log_a b + \log_a (b^{1/2 \log_b a^2})}{\log_a b - \log_{ab} b} \cdot \frac{\log_{ab} b \cdot \log_a b}{b^{2 \log_b \log_a b} - 1}$ .

Решение.

$$\frac{\log_a b + \log_a (b^{1/2 \log_b a^2})}{\log_a b - \log_{ab} b} \cdot \frac{\log_{ab} b \cdot \log_a b}{b^{2 \log_b \log_a b} - 1} = \frac{\log_a b + \log_a a}{\log_a b - \frac{\log_a b}{1 + \log_a b}} \times$$

$$\times \frac{\log_a b}{1 + \log_a b} \cdot \log_a b = \frac{(1 + \log_a b)^2}{\log_a^2 b} \cdot \frac{\log_a^2 b}{(1 + \log_a b)(\log_a b - 1)(\log_a b + 1)} = \frac{1}{\log_a b - 1}.$$

Ответ:  $\frac{1}{\log_a b - 1}$ .



7.157. Известно, что  $\log_a x = \alpha$ ,  $\log_b x = \rho$ ,  $\log_c x = \gamma$ ,  $\log_d x = \delta$  и  $x \neq 1$ . Найти  $\log_{abcd} x$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \log_{abcd} x &= \frac{\log_x x}{\log_x abcd} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c + \log_x d} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} + \frac{1}{\log_d x}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}} = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma}. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma}$ .

7.158. Известно, что  $\beta = 10^{\frac{1}{1-\lg\alpha}}$  и  $\gamma = 10^{\frac{1}{1-\lg\beta}}$ . Найти зависимость  $\alpha$  от  $\gamma$ .

*Решение.*

$$\lg\beta = \frac{1}{1-\lg\alpha}; \lg\gamma = \frac{1}{1-\lg\beta} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\lg\alpha}} = \frac{1-\lg\alpha}{-\lg\alpha} = -\frac{1}{\lg\alpha} + 1;$$

$$\frac{1}{\lg\alpha} = 1 - \lg\gamma; \lg\alpha = \frac{1}{1-\lg\gamma}; \alpha = 10^{1/(1-\lg\gamma)}.$$

*Ответ:*  $\alpha = 10^{1/(1-\lg\gamma)}$ .

7.159. Доказать, что  $\log_{ab} c = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \log_{ab} c &= \frac{\log_a c}{\log_a ab} = \frac{\log_a c}{1 + \log_a b} = \frac{\log_a c \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b}}{(1 + \log_a b) \frac{\log_a c}{\log_a b}} = \\ &= \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\frac{\log_a c}{\log_a b} + \log_a c} = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

7.160. Упростить выражение  $\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2 \log_{a+b} m \cdot \log_{a-b} m$ , если известно, что  $m^2 = a^2 - b^2$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2 \log_{a+b} m \cdot \log_{a-b} m &= \log_{a+b} m + \frac{\log_{a+b} m}{\log_{a+b}(a-b)} - \\ - 2 \frac{\log_{a+b} m \cdot \log_{a+b} m}{\log_{a+b}(a-b)} &= \log_{a+b} m \cdot \left( 1 + \frac{1}{\log_{a+b}(a-b)} - \frac{2 \log_{a+b} m}{\log_{a+b}(a-b)} \right) = \\ &= \frac{\log_{a+b} m (\log_{a+b}(a-b) + 1 - 2 \log_{a+b} m)}{\log_{a+b}(a-b)}. \end{aligned}$$

Так как  $m = \sqrt{a^2 - b^2}$ , то имеем

$$\begin{aligned} \frac{\log_{a+b} \sqrt{a^2 - b^2} (\log_{a+b}(a-b) + 1 - 2 \log_{a+b} \sqrt{a^2 - b^2})}{\log_{a+b}(a-b)} &= \\ = \frac{\log_{a+b} \sqrt{a^2 - b^2} (\log_{a+b}(a-b) + 1 - \log_{a+b}(a-b) - 1)}{\log_{a+b}(a-b)} &= \\ = \frac{\log_{a+b} \sqrt{a^2 - b^2} \cdot 0}{\log_{a+b}(a-b)} &= 0. \end{aligned}$$

*Ответ:* 0.

7.161. Найти  $\log_{30} 8$ , если известно, что  $\lg 5 = a$ ,  $\lg 3 = b$ .

*Решение.*

$$\log_{30} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 30} = \frac{3}{\log_2(2 \cdot 5 \cdot 3)} = \frac{3}{1 + \log_2 5 + \log_2 3}.$$

$$\lg 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 10} = \frac{\log_2 5}{\log_2(2 \cdot 5)} = \frac{\log_2 5}{1 + \log_2 5} = a; \quad \log_2 5 = \frac{a}{1-a}.$$

$$\lg 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 10} = \frac{\log_2 3}{\log_2(2 \cdot 5)} = \frac{\log_2 3}{1 + \log_2 5} = \frac{\log_2 3}{1 + \frac{1}{1-a}} = \frac{(1-a)\log_2 3}{1} = b;$$

$$\log_2 3 = \frac{b}{1-a}.$$

Таким образом,  $\log_{30} 8 = \frac{3}{1 + \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-a}} = \frac{3(1-a)}{1+b}$ .

Ответ:  $\frac{3(1-a)}{1+b}$ .

7.162. Доказать, что  $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$ .

Решение.

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \frac{\log_a x}{\frac{\log_a x}{\log_a ab}} = \frac{\log_a x \cdot \log_a ab}{\log_a x} = \log_a ab = \log_a a + \log_a b = 1 + \log_a b.$$

Что и требовалось доказать.

7.163. Зная, что  $\lg 2 = a$  и  $\log_2 7 = b$ , найти  $\lg 56$ .

Решение.

$$\lg 56 = \lg(7 \cdot 8) = \lg 7 + \lg 8 = \lg 7 + 3 \lg 2 = \frac{\log_2 7}{\log_2 10} + 3 \lg 2 = \log_2 7 \cdot \lg 2 + 3 \lg 2 = ab + 3a = a(b + 3).$$

Ответ:  $a(b + 3)$ .

7.164. Зная, что  $b = 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$  и  $c = 8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$ , показать, что  $a = 8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$ .

Решение.

$$\log_8 b = \log_8 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}} = \frac{1}{1-\log_8 a} \Rightarrow 1 - \log_8 a = \frac{1}{\log_8 b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_8 a = 1 - \frac{1}{\log_8 b} \Rightarrow a = 8^{1 - \frac{1}{\log_8 b}} \quad (1).$$

$$\log_8 c = \log_8 8^{\frac{1}{1-\log_8 b}} = \frac{1}{1-\log_8 b} \Rightarrow 1 - \log_8 b = \frac{1}{\log_8 c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_8 b = 1 - \frac{1}{\log_8 c} = \frac{\log_8 c - 1}{\log_8 c} \quad (2).$$

Подставляя (2) в (1), имеем

$$a = 8^{1 - \frac{1}{\left(\frac{\log_8 c - 1}{\log_8 c}\right)}} = 8^{1 - \frac{\log_8 c}{\log_8 c - 1}} = 8^{\frac{\log_8 c - 1 - \log_8 c}{\log_8 c - 1}} = 8^{\frac{1}{1 - \log_8 c}}.$$

Что и требовалось доказать.

Решить уравнения (7.165 — 7.258):

$$7.165. 3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}.$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot 9^x = 6 \cdot 4 \cdot 4^x - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9^x \Rightarrow 3 \cdot 9^x = 2 \cdot 4^x \Rightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{2}{3},$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}, \text{ откуда } x = -\frac{1}{2}.$$

*Ответ:*  $-\frac{1}{2}$ .

$$7.166. \sqrt{\log_{0,04} x + 1} + \sqrt{\log_{0,2} x + 3} = 1.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{1}{2} \log_{0,2} x + 1 \geq 0, \\ \log_{0,2} x + 3 \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 25.$$

Перейдем к основанию 0,2. Имеем

$$\sqrt{\frac{1}{2} \log_{0,2} x + 1} + \sqrt{\log_{0,2} x + 3} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_{0,2} x + 2} + \sqrt{2 \log_{0,2} x + 6} = \sqrt{2}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$\log_{0,2} x + 2 + 2\sqrt{(\log_{0,2} x + 2)(2 \log_{0,2} x + 6)} + 2 \log_{0,2} x + 6 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(\log_{0,2} x + 2)(2 \log_{0,2} x + 6)} = -3 \log_{0,2} x - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(\log_{0,2} x + 2)(2 \log_{0,2} x + 6) = 9(\log_{0,2} x + 2)^2 \text{ при } -3 \log_{0,2} x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{0,2} x + 2 \leq 0.$$

С учетом ОДЗ имеем  $\log_{0,2} x + 2 = 0$ , откуда  $x = 25$ .

*Ответ:* 25.

$$7.167. \sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \log_x \sqrt{5x} \geq 0, \\ -\log_x 5 \geq 0, \text{ или } 0 < x \leq \frac{1}{5}. \\ 0 < x \neq 1 \end{cases}$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$\log_x \sqrt{5x} = \log_x^2 5 \Leftrightarrow 2 \log_x^2 5 - \log_x 5 - 1 = 0 \Rightarrow (\log_x 5)_1 = -\frac{1}{2}, x_1 = \frac{1}{25}$$

или

$$(\log_x 5) = 1, x_2 = 5;$$

$x_2 = 5$  не подходит по ОДЗ.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{25}.$$

$$7.168. \log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < 4x+1 \neq 1, \\ 0 < 9x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq \frac{1}{9}.$$

Перейдем к основанию 7. Имеем

$$\frac{1}{\log_7(4x+1)} + \frac{1}{\log_7 9x} = 0 \Rightarrow \log_7 9x = -\log_7(4x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x = \frac{1}{4x+1} \Leftrightarrow 36x^2 + 9x - 1 = 0,$$

откуда  $x_1 = \frac{1}{12}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{3}$ ;  $x_2 = -\frac{1}{3}$  не подходит по ОДЗ.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{12}.$$

$$7.169. \left(16^{\sin x}\right)^{\cos x} + \frac{6}{4 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} - 4 = 0.$$

*Решение.*

Преобразуем знаменатель второго члена уравнения:

$$\frac{1}{4 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{4 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{1}{4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x)} = \frac{1}{4^2 (1 - \sin 2x)} =$$

$$= 4^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{2}{2 \sin 2x}, \text{ откуда } \frac{6}{4 \sin^2 \left( x - \frac{\pi}{4} \right)} = 3 \cdot 2^{\sin 2x}. \text{ Получаем урав-}$$

нение  $(2^{\sin 2x})^2 + 3 \cdot 2^{\sin 2x} - 4 = 0 \Rightarrow 2^{\sin 2x} = -4$  (нет решений) или  $2^{\sin 2x} = 1$ , откуда  $\sin 2x = 0$ ,  $x = \frac{\pi n}{2}$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\frac{\pi n}{2}$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ .

7.170.  $\log_2(2-x) - \log_2(2-\sqrt{x}) = \log_2 \sqrt{2-x} - 0,5$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} 2-x > 0, \\ 2-\sqrt{x} > 0, \end{cases} \quad 0 \leq x < 2.$

Из условия имеем  $\log_2 \frac{2-x}{2-\sqrt{x}} = \log_2 \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{2-x}{2-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{2-x}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} \left( \frac{\sqrt{2-x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0$ , откуда  $\frac{\sqrt{2-x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ ,  
 $\sqrt{4-2x} = 2-\sqrt{x}$ ,  $4-2x = 4-4\sqrt{x}+x$ ,  $3x-4\sqrt{x} = 0$ ,  $\sqrt{x}(3\sqrt{x}-4) = 0$ .

Таким образом,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{16}{9}$ .

Ответ:  $0; \frac{16}{9}$ .

7.171.  $5^{1+\log_4 x} + 5^{\log_{0,25} x-1} = \frac{26}{5}$ .

Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Перейдем к основанию 4. Имеем  $5 \cdot 5^{\log_4 x} + \frac{1}{5 \cdot 5^{\log_4 x}} - \frac{26}{5} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 25 \cdot (5^{\log_4 x})^2 - 26 \cdot 5^{\log_4 x} + 1 = 0 \Rightarrow (5^{\log_4 x})_1 = 5^{-2}, (5^{\log_4 x})_2 = 5^0$ , отку-  
 да  $(\log_4 x)_1 = -2, (\log_4 x)_2 = 0$ . Следовательно,  $x_1 = \frac{1}{16}, x_2 = 1$ .

Ответ:  $\frac{1}{16}; 1$ .

$$7.172. \sqrt{2 \log_8(-x)} - \log_8 \sqrt{x^2} = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -x > 0, \\ x^2 > 0, \end{cases} \quad x < 0.$$

Из условия имеем

$$\sqrt{2 \log_8(-x)} - \log_8(-x) = 0, \quad \sqrt{\log_8(-x)}(\sqrt{2} - \sqrt{\log_8(-x)}) = 0.$$

Тогда  $\log_8(-x) = 0$ , откуда  $x_1 = -1$  или  $\sqrt{2} - \sqrt{\log_8(-x)} = 0$ , откуда

$$\sqrt{2} = \sqrt{\log_8(-x)}, \quad 2 = \log_8(-x), \quad x_2 = -64.$$

*Ответ:*  $-64; -1$ .

$$7.173. 2 \lg x^2 - (\lg(-x))^2 = 4.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x < 0.$$

Учитывая, что  $x < 0$  имеем

$$4 \lg(-x) - \lg^2(-x) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lg^2(-x) - 4 \lg(-x) + 4 = 0,$$

$$(\lg(-x) - 2)^2 = 0, \quad \text{откуда } \lg(-x) = 2, \quad x = -100.$$

*Ответ:*  $-100$ .

$$7.174. 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } 0 < x \neq 1.$$

Перепишем уравнение в виде

$$(3^{\log_3 x})^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162 \Leftrightarrow x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{\log_3 x} = 81 \Leftrightarrow \log_3^2 x = 4.$$

Тогда  $(\log_3 x)_1 = -2$  или  $(\log_3 x)_2 = 2$ , откуда  $x_1 = \frac{1}{9}$ ,  $x_2 = 9$ .

*Ответ:*  $\frac{1}{9}; 9$ .

$$7.175. \lg(x^3 + 8) - 0,5 \lg(x^2 + 4x + 4) = \lg 7.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x + 2 > 0, \quad x > -2.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\lg(x+2)(x^2 - 2x + 4) - 0,5 \lg(x+2)^2 = \lg 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg(x+2)(x^2 - 2x + 4) - \lg(x+2) = \lg 7 \Leftrightarrow \lg \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x+2} = \lg 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 7, x^2 - 2x - 3 = 0, \text{ откуда } x_1 = -1, x_2 = 3.$$

Ответ:  $-1; 3$ .

7.176.  $2^{\log_5 x^2} - 2^{1+\log_5 x} + 2^{\log_5 x-1} - 1 = 0$ .

Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Перепишем уравнение в виде  $2^{2\log_5 x} - 2 \cdot 2^{\log_5 x} + \frac{2^{\log_5 x}}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2\log_5 x} - 3 \cdot 2^{\log_5 x} - 2 = 0. \text{ Решая это уравнение как квадратное относительно } 2^{\log_5 x}, \text{ найдем } 2^{\log_5 x} = -\frac{1}{2} \text{ (не подходит) или } 2^{\log_5 x} = 2, \text{ откуда}$$

$$\log_5 x = 1, x = 5.$$

Ответ:  $5$ .

7.177.  $\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x} = 1$ .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 9-2^x > 0, \\ 3-x \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow 3 \neq x < \log_2 9.$$

Из условия

$$\log_2(9-2^x) = 3-x \Leftrightarrow 9-2^x = 2^{3-x} \Leftrightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

Решая его как квадратное относительно  $2^x$ , найдем  $(2^x)_1 = 1$ , откуда  $x_1 = 0$  или  $(2^x)_2 = 8$ , откуда  $x_2 = 3$ ;  $x_2 = 3$  не подходит по ОДЗ.

Ответ:  $0$ .

7.178.  $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{1/5} \sqrt{3}$ .

Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Перейдем к основанию 5. Имеем  $\log_5 x + \frac{1}{2} \log_5 x = -\frac{1}{2} \log_5 3 \Leftrightarrow$



$$\Leftrightarrow 2\log_5 x + \log_5 x = \log_5 \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_5 x^3 = \log_5 \frac{1}{3}. \text{ Отсюда имеем } x^3 = \frac{1}{3},$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$

**7.179.**  $\log_{a^2} x^2 + \log_a(x-1) = \log_a \log_{\sqrt{5}} 5.$

*Решение.*

ОДЗ:  $\begin{cases} x > 1, \\ 0 < a \neq 1. \end{cases}$

Из условия имеем

$$\log_a x + \log_a(x-1) = \log_a 2 \Rightarrow \log_a x(x-1) = \log_a 2,$$

откуда  $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1; x_2 = -1$  не подходит по ОДЗ.

*Ответ:* 2.

**7.180.**  $x^{2\lg^2 x} = 10x^3.$

*Решение.*

ОДЗ:  $0 < x \neq 1.$

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим

$$\begin{aligned} \lg x^{2\lg^2 x} &= \lg 10x^3 \Leftrightarrow 2\lg^3 x = 1 + 3\lg x \Leftrightarrow 2\lg^3 x - 3\lg x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\lg^3 x + 2 - 3\lg x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2(\lg x + 1)(\lg^2 x - \lg x + 1) - 3(\lg x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lg x + 1)(2\lg^2 x - 2\lg x - 1) = 0, \end{aligned}$$

откуда  $(\lg x)_1 = -1, (\lg x)_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, (\lg x)_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$  Получили  $x_1 = \frac{1}{10},$

$$x_2 = 10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}, x_3 = 10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{10}, 10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}, 10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}.$

**7.181.**  $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + 0,5.$

*Решение.*

ОДЗ:  $0 < x \neq 1.$

Перейдем к основанию 3. Имеем

$$\frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x = \frac{2}{\log_3 x} + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 x)_1 = -1 \text{ или } (\log_3 x)_2 = 2, \text{ откуда } x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 9.$$

Ответ:  $\frac{1}{3}; 9$ .

7.182.  $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \frac{a^2}{2a-x} = 1$ .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < a \neq 1, \\ x \neq 2a, \\ 0 < x \neq 1. \end{cases}$$

Перейдем к основанию  $a$ . Имеем

$$\frac{\log_a a}{\log_a \sqrt{x}} \cdot \frac{\log_a \frac{a^2}{2a-x}}{\log_a a^2} = 1 \Leftrightarrow \log_a (2a-x) + \log_a x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a x(2a-x) = 2, x(2a-x) = a^2, x^2 - 2ax + a^2 = 0, (x-a)^2 = 0,$$

откуда  $x = a$ .

Ответ:  $x = a$ , где  $0 < a \neq 1$ .

7.183.  $5^{-2\log_{0,04}(3-4x^2)} + 1,5 \log_{1/8} 4^x = 0$ .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } 3 - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из условия

$$5^{\log_5(3-4x^2)} + 1,5x \log_{2^{-3}} 2^2 = 0 \Leftrightarrow 3 - 4x^2 - x = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 3 = 0,$$

откуда  $x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{4}$ ;  $x_1 = -1$  не подходит по ОДЗ.

Ответ:  $\frac{3}{4}$ .

$$7.184. \log_a x + \log_{a^2} x + \log_{a^3} x = 11.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ 0 < a \neq 1. \end{cases}$$

Перейдем к основанию  $a$ . Имеем  $\log_a x + \frac{1}{2} \log_a x + \frac{1}{3} \log_a x = 11 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \log_a x = 6$ , откуда  $x = a^6$ .

*Ответ:*  $a^6$ , где  $0 < a \neq 1$ .

$$7.185. 6 - \left(1 + 4 \cdot 9^{4 - 2 \log_{\sqrt{3}} 3}\right) \log_7 x = \log_x 7.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } 0 < x \neq 1.$$

Перейдем к основанию 7. Имеем  $6 - (1 + 4 \cdot 9^0) \log_7 x = \frac{1}{\log_7 x} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 5 \log_7^2 x - 6 \log_7 x + 1 = 0$ . Решая это уравнение как квадратное относительно  $\log_7 x$ , получим  $(\log_7 x)_1 = \frac{1}{5}$  или  $(\log_7 x)_2 = 1$ , откуда  $x_1 = \sqrt[5]{7}$ ,  $x_2 = 7$ .

*Ответ:*  $\sqrt[5]{7}$ ; 7.

$$7.186. \log_{12} (4^{3x} + 3x - 9) = 3x - x \log_{12} 27.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } 4^{3x} + 3x - 9 > 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\log_{12} (4^{3x} + 3x - 9) + \log_{12} 27^x = 3x \Rightarrow \log_{12} 27^x (4^{3x} + 3x - 9) = 3x,$$

откуда  $27^x (4^{3x} + 3x - 9) = 12^{3x} \Leftrightarrow 4^{3x} + 3x - 9 = 4^{3x}$ ,  $3x - 9 = 0$ ,  $x = 3$ .

*Ответ:* 3.

$$7.187. x^2 \cdot \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } 0 < x \neq 1.$$

Перейдем к основанию 3, тогда

$$\frac{3x^2}{\log_3 x} \cdot \frac{\log_3 x}{2} = x + 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0,$$

откуда  $x_1 = 2, x_2 = -\frac{4}{3}$ ;  $x_2 = -\frac{4}{3}$  не подходит по ОДЗ.

Ответ: 2.

$$7.188. \sqrt{\log_5^2 x + \log_x^2 5 + 2} = 2,5.$$

Решение.

ОДЗ:  $0 < x \neq 1$ .

Перейдем к основанию 5. Из условия получаем

$$\sqrt{\log_5^2 x + \frac{1}{\log_5^2 x} + 2} = 2,5 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\log_5^4 x + 2\log_5^2 x + 1}{\log_5^2 x}} = 2,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{\log_5^2 x + 1}{\log_5 x}\right)^2} = 2,5 \Leftrightarrow \frac{\log_5^2 x + 1}{|\log_5 x|} = 2,5.$$

Получаем 2 случая:

$$1) \begin{cases} \log_5 x < 0, \\ \log_5^2 x + 2,5\log_5 x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (\log_5 x)_1 = -\frac{1}{2} < 0,$$

$$(\log_5 x)_2 = -2 < 0, \text{ откуда } x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, x_2 = \frac{1}{25};$$

$$2) \begin{cases} \log_5 x > 0, \\ \log_5^2 x - 2,5\log_5 x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (\log_5 x)_3 = \frac{1}{2} > 0, (\log_5 x)_4 = 2 > 0,$$

откуда  $x_3 = \sqrt{5}$ ,  $x_4 = 25$ .

Ответ:  $\frac{1}{25}$ ;  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ;  $\sqrt{5}$ ; 25.

$$7.189. \log_x m \cdot \log_{\sqrt{m}} \frac{m}{\sqrt{2m-x}} = 1.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < m \neq 1, \\ 0 < x \neq 1, \\ x < 2m. \end{cases}$$

Перейдем к основанию  $m$ , тогда

$$\frac{1}{\log_m x} \cdot \frac{\log_m \frac{m}{\sqrt{2m-x}}}{\log_m \sqrt{m}} = 1 \Leftrightarrow \log_m x + \log_m (2m-x) = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_m x(2m-x) = 2.$$

Тогда  $x^2 - 2mx + m^2 = 0$ ,  $(x-m)^2 = 0$ , откуда  $x = m$ .

Ответ:  $m$ , где  $0 < m \neq 1$ .

7.190.  $\log_2 3 + 2 \log_4 x = x^{\frac{\log_9 16}{\log_3 x}}$ .

Решение.

ОДЗ:  $0 < x \neq 1$ .

Из условия имеем  $\log_2 3 + \log_2 x = x^{\frac{\log_3 4}{\log_3 x}} \Leftrightarrow \log_2 3 + \log_2 x = x^{\log_x 4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_2 3 + \log_2 x = 4, \log_2 3x = 4, \text{ откуда } 3x = 16, x = \frac{16}{3}.$$

Ответ:  $\frac{16}{3}$ .

7.191.  $\log_{10} x + \log_{\sqrt{10}} x + \log_{\sqrt[3]{10}} x + \dots + \log_{\sqrt[10]{10}} x = 5,5$ .

Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Перейдем к основанию 10. Имеем

$$\lg x + 2 \lg x + 3 \lg x + \dots + 10 \lg x = 5,5, (1+2+3+\dots+10) \lg x = 5,5.$$

В скобках — сумма членов арифметической прогрессии  $S_n$  с  $a_1 = 1$ ,

$$d = 1, a_n = 10, n = 10: S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{1+10}{2} \cdot 10 = 55. \text{ Тогда } 55 \lg x = 5,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x = \frac{1}{10}, \text{ откуда } x = \sqrt[10]{10}.$$

Ответ:  $\sqrt[10]{10}$ .

7.192.  $\sqrt{3 \log_2^2 x - 1 - 9 \log_x^2 2} = 5$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} 3 \log_2^4 x - \log_2^2 x - 9 \geq 0, \\ 0 < x \neq 1. \end{cases}$

Возведем обе части уравнения в квадрат. Тогда

$$\frac{3\log_2^4 x - \log_2^2 x - 9}{\log_2^2 x} = 25 \Leftrightarrow 3\log_2^4 x - 26\log_2^2 x - 9 = 0.$$

Решая это уравнение как биквадратное относительно  $\log_2 x$ , найдем  $(\log_2 x)_1 = -3$  и  $(\log_2 x)_2 = 3$ , откуда  $x_1 = \frac{1}{8}$ ,  $x_2 = 8$ .

Ответ:  $\frac{1}{8}; 8$ .

**7.193.**  $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \dots + \log_{\sqrt[9]{3}} x = 36$ .

Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Перейдем к основанию 3. Получаем

$$\begin{aligned} 2\log_3 x + 4\log_3 x + 6\log_3 x + \dots + 16\log_3 x &= 36 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2+4+6+\dots+16)\log_3 x &= 36 \Leftrightarrow (1+2+3+\dots+8)\log_3 x = 18 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 36\log_3 x &= 18 \Leftrightarrow \log_3 x = \frac{1}{2}, \text{ откуда } x = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\sqrt{3}$ .

**7.194.**  $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$ .

Решение.

ОДЗ:  $0 < x \neq 1$ .

Перейдем к основанию 2. Имеем  $\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{7}{6} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 3\log_2^2 x - 7\log_2 x - 6 = 0$ . Решая это уравнение как квадратное относительно  $\log_2 x$ , найдем  $(\log_2 x)_1 = -\frac{2}{3}$  или  $(\log_2 x)_2 = 3$ , откуда  $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ,  $x_2 = 8$ .

Ответ:  $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; 8$ .

**7.195.**  $\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$ .

Решение.

ОДЗ:  $0 < x \neq 1$ .

Перейдем к основанию 5. Тогда получаем  $\frac{\log_5 125x}{\log_5 x} \cdot \frac{\log_5^2 x}{\log_5^2 25} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_5^2 x + 3 \log_5 x - 4 = 0$ . Решая это уравнение как квадратное относительно  $\log_5 x$ , имеем  $(\log_5 x)_1 = 1$  или  $(\log_5 x)_2 = -4$ , откуда  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = \frac{1}{625}$ .

Ответ:  $\frac{1}{625}; 5$ .

**7.196.**  $3^{\log_3 x + \log_3 x^2 + \log_3 x^3 + \dots + \log_3 x^8} = 27x^{30}$ .

Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Перепишем уравнение в виде  $3^{\log_3 x + 2 \log_3 x + 3 \log_3 x + \dots + 8 \log_3 x} = 27x^{30} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (3^{\log_3 x})^{(1+2+3+\dots+8)} = 27x^{30} \Leftrightarrow x^{1+2+3+\dots+8} = 27x^{30} \Leftrightarrow x^{36} = 27x^{30} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x^6 = 27$ , откуда  $x = \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$ .

Ответ:  $\sqrt{3}$ .

**7.197.**  $5^{\frac{x}{\sqrt{x+2}}} \cdot 0,2^{\frac{4}{\sqrt{x+2}}} = 125^{x-4} \cdot 0,04^{x-2}$ .

Решение.

ОДЗ:  $x \geq 0$ .

Из условия имеем

$$5^{\frac{x}{\sqrt{x+2}}} \cdot 5^{-\frac{4}{\sqrt{x+2}}} = 5^{3x-12} \cdot 5^{-2x+4} \Leftrightarrow 5^{\frac{x}{\sqrt{x+2}} - \frac{4}{\sqrt{x+2}}} = 5^{3x-12-2x+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x+2}} = x-8 \Leftrightarrow x\sqrt{x+2} + x - 8\sqrt{x+2} - 12 = 0.$$

Пусть  $\sqrt{x+2} = y \geq 0$ . Относительно  $y$  уравнение принимает вид  $y^3 + y^2 - 8y - 12 = 0$ ,  $(y-3)(y+2)^2 = 0$ ,

откуда  $y_1 = 3$ ,  $y_{2,3} = -2$ ;  $y_{2,3} = -2$  не подходит. Тогда  $\sqrt{x+2} = 3$ ,  $x = 9$ .

Ответ: 9.

**7.198.**  $\left( 3 \cdot \left( 3^{\sqrt{x+3}} \right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \right)^{\sqrt{x-1}} = \frac{3}{10\sqrt{3}}$ .

Решение.

ОДЗ:  $0 < x \neq 1$ .

Из условия

$$\frac{3(\sqrt{x+1})}{3} \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x-1}} = 3^{10} \Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x-1}} = \frac{9}{10} \Leftrightarrow 3x - 13\sqrt{x} - 10 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $\sqrt{x}$ , получим  $(\sqrt{x})_1 = -\frac{2}{3}$  (не подходит), или  $(\sqrt{x})_2 = 5$ . Тогда  $x = 25$ .

Ответ: 25.

$$7.199. \log_2 \log_3(x^2 - 16) - \log_{1/2} \log_{1/3} \frac{1}{x^2 - 16} = 2.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \log_3(x^2 - 16) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 > 3 \Leftrightarrow x^2 > 19 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{19}) \cup (\sqrt{19}; \infty).$$

Перепишем уравнение в виде

$$\log_2 \log_3(x^2 - 16) + \log_2 \log_3(x^2 - 16) = 2 \Leftrightarrow 2 \log_2 \log_3(x^2 - 16) = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2 \log_3(x^2 - 16) = 1,$$

откуда  $\log_3(x^2 - 16) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 9, x^2 = 25$ . Получили  $x_{1,2} = \pm 5$ .

Ответ: -5; 5.

$$7.200. \frac{1 + 2 \log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2 \log_x 3 \cdot \log_9(12 - x).$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x < 12, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Перейдем к основанию 3. Тогда получаем

$$\frac{1 + \frac{2 \log_3 2}{\log_3 9}}{\frac{\log_3 x}{\log_3 9}} - 1 = \frac{2}{\log_3 x} \cdot \frac{\log_3(12 - x)}{\log_3 9} \Leftrightarrow \frac{2 + 2 \log_3 2}{\log_3 x} - 1 = \frac{\log_3(12 - x)}{\log_3 x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2 + 2 \log_3 2 - \log_3 x}{\log_3 x} = \frac{\log_3(12 - x)}{\log_3 x} \Leftrightarrow 2 + 2 \log_3 2 - \log_3 x = \log_3(12 - x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 + 2 \log_3 2 = \log_3 x + \log_3(12 - x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3 9 + \log_3 4 = \log_3 x + \log_3(12 - x), \log_3 36 = \log_3 x(12 - x)$$

откуда  $36 = x(12 - x)$  или  $x^2 - 12x + 36 = 0, (x - 6)^2 = 0, x = 6$ .

Ответ: 6.



$$7.201. 3\lg 2 + \lg(2^{\sqrt{x-1}-1} - 1) = \lg(0,4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}} + 4) + 1.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2^{\sqrt{x-1}-1} - 1 > 0, \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\lg 8 + \lg(2^{\sqrt{x-1}-1} - 1) = \lg(0,4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}} + 4) + \lg 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg(8 \cdot (2^{\sqrt{x-1}-1} - 1)) = \lg(4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}} + 40) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8(2^{\sqrt{x-1}-1} - 1) = 4(\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}} + 10) \Leftrightarrow \left(2^{\frac{\sqrt{x-1}}{2}}\right)^2 - 2^{\frac{\sqrt{x-1}}{2}} - 12 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $2^{\frac{\sqrt{x-1}}{2}}$ , получим  $2^{\frac{\sqrt{x-1}}{2}} = -3$  (нет решений), или  $2^{\frac{\sqrt{x-1}}{2}} = 2^2$ , откуда  $\frac{\sqrt{x-1}}{2} = 2$ ,  $\sqrt{x-1} = 4$ ,  $x-1=16$ ,  $x=17$ .

*Ответ:* 17.

$$7.202. 5\log_{x/9} x + \log_{9/x} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{9}, \\ x \neq \pm \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Перейдем к основанию 9. Имеем

$$\frac{5\log_9 x}{\log_9 \frac{x}{9}} + \frac{\log_9 x^3}{\log_9 \frac{9}{x}} + \frac{8\log_9 x^2}{\log_9 9x^2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\log_9 x}{\log_9 x - 1} + \frac{3\log_9 x}{1 - \log_9 x} + \frac{16\log_9 x}{1 + 2\log_9 x} = 2 \Leftrightarrow 8\log_9^2 x - 6\log_9 x + 1 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $\log_9 x$ , получим

$$(\log_9 x)_1 = \frac{1}{4} \text{ или } (\log_9 x)_2 = \frac{1}{2}, \text{ откуда } x_1 = \sqrt{3}, x_2 = 3.$$

Ответ:  $\sqrt{3}; 3$ .

**7.203.**  $20 \log_{4x} \sqrt{x} + 7 \log_{16x} x^3 - 3 \log_{x/2} x^2 = 0.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{4}, \\ x \neq \frac{1}{16}, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Перейдем к основанию 2:

$$\frac{20 \log_2 \sqrt{x}}{\log_2 4x} + \frac{7 \log_2 x^3}{\log_2 16x} - \frac{3 \log_2 x^3}{\log_2 \frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10 \log_2 x}{2 + \log_2 x} + \frac{21 \log_2 x}{4 + \log_2 x} - \frac{6 \log_2 x}{\log_2 x - 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$5 \log_2^3 x + 3 \log_2^2 x - 26 \log_2 x = 0 \Leftrightarrow \log_2 x (5 \log_2^2 x + 3 \log_2 x - 26) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \left( \log_2 x + \frac{13}{5} \right) (\log_2 x - 2) = 0,$$

откуда  $(\log_2 x)_1 = 0$ ,  $(\log_2 x)_2 = -\frac{13}{5}$ ,  $(\log_2 x)_3 = 2$ . Итак,

$$x_1 = 1, x_2 = 2^{-\frac{13}{5}} = \frac{1}{4\sqrt[5]{8}}, x_3 = 4.$$

Ответ:  $1; \frac{1}{4\sqrt[5]{8}}; 4$ .

**7.204.**  $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}.$

Решение.

Очевидно, что  $x \neq 3$ , тогда  $|x-3| > 0$ . Перепишем уравнение в виде

$$|x-3|^{\frac{x+1}{4}} = |x-3|^{\frac{x-2}{3}}.$$

Получаем два случая:

$$1) |x-3|=1 \Rightarrow x_1=2, x_2=4;$$

$$2) |x-3| \neq 1 \Rightarrow \frac{x+1}{4} = \frac{x-2}{3} \Leftrightarrow 3x+3=4x-8, x_3=11.$$

Ответ: 2; 4; 11.

$$7.205. |x-3|^{3x^2-10x+3} = 1.$$

Решение.

Очевидно, что  $x \neq 3$ , следовательно,  $|x-3| > 0$ . Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, имеем  $(3x^2 - 10x + 3) \lg|x-3| = 0$ , откуда  $3x^2 - 10x + 3 = 0$  или  $\lg|x-3| = 0$ . Корнями квадратного уравнения  $3x^2 - 10x + 3 = 0$  будут  $x_1 = \frac{1}{3}$  и  $x_2 = 3$ . Из уравнения  $\lg|x-3| = 0$  найдем  $|x-3|=1 \Rightarrow x-3=-1$  или  $x-3=1$ . Тогда  $x_3=2, x_4=4; x_2=3$  не подходит по ОДЗ логарифма.

Ответ:  $\frac{1}{3}; 2; 4$ .

$$7.206. |x-2|^{10x^2-3x-1} = 1.$$

Решение.

Перепишем уравнение в виде  $|x-2|^{10x^2-3x-1} = |x-2|^0$ . Тогда получим два случая:

$$1) |x-2|=1, \text{ откуда } x-2=-1 \text{ или } x-2=1, x_1=1, x_2=3;$$

$$2) \begin{cases} 0 < |x-2| \neq 1, \\ 10x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq 1, x \neq 3, \\ x_3 = -\frac{1}{5}, x_4 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ:  $-\frac{1}{5}; \frac{1}{2}; 1; 3$ .

$$7.207. \log_{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{2a-x}}{a} - \log_{1/a} x = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < a \neq 1, \\ 2a - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, \\ x \leq 2a. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$\frac{\log_a \frac{\sqrt{2a-x}}{a}}{\log_a \sqrt{a}} - \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = 0 \Leftrightarrow \log_a(2a-x) + \log_a x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a x(2a-x) = 2,$$

откуда  $x^2 - 2ax + a^2 = 0$ ,  $(x-a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = a$ .

*Ответ:*  $a$ , где  $0 < a \neq 1$ .

7.208.  $2^{x-1} + 2^{x-4} + 2^{x-2} = 6,5 + 3,25 + 1,625 + \dots$  (выражение в правой части — бесконечная геометрическая прогрессия).

*Решение.*

В правой части — сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии  $S$ , где  $b_1 = 6,5$ ;  $q = \frac{3,25}{6,5} = 0,5 \Rightarrow S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{6,5}{1-0,5} = 13$ .

$$\text{Перепишем уравнение в виде } \frac{2^x}{2} + \frac{2^x}{16} + \frac{2^x}{4} = 13 \Leftrightarrow \frac{13}{16} \cdot 2^x = 13,$$

$2^x = 16$ , откуда  $x = 4$ .

*Ответ:* 4.

$$7.209. 49^{1+\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} = -7.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $x \geq 2$ .

Перепишем уравнение в виде  $49 \cdot 7^{2\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} + 7 = 0$ . Решая его как квадратное относительно  $7^{\sqrt{x-2}}$ , получим  $\left(7^{\sqrt{x-2}}\right)_1 = 7^{-2}$  или

$\left(7^{\sqrt{x-2}}\right)_2 = 7$ , откуда  $\left(\sqrt{x-2}\right)_1 = -2$  (нет решений), или  $\left(\sqrt{x-2}\right)_2 = 1$ ,  $x_2 = 3$ .

*Ответ:* 3.

$$7.210. 5^{x-1} + 5 \cdot 0,2^{x-2} = 26.$$

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{5^x}{5} + \frac{125}{5^x} - 26 = 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 130 \cdot 5^x + 625 = 0.$$

Решая его как квадратное относительно  $5^x$ , получим  $(5^x)_1 = 5$  или

$$(5^x)_2 = 5^3, \text{ откуда } x_1 = 1, x_2 = 3.$$

*Ответ:* 1; 3.

$$7.211. \log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_x 9} + 4 = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 3, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

Перейдем к основанию 3. Получаем

$$2 \log_3 x \cdot \sqrt{2 - \frac{2}{\log_3 x}} + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x \cdot \sqrt{\frac{2 \log_3 x - 2}{\log_3 x}} = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0, \\ \log_3 x < 0. \end{cases}$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $\log_3 x$ , имеем

$$(\log_3 x)_1 = -1 \text{ или } (\log_3 x)_2 = 2; (\log_3 x)_2 = 2 \text{ — постороннее решение.}$$

$$\text{Отсюда } x = 3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3}.$$

$$7.212. \frac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2} + \log_{2x} 2 \cdot \log_{\sqrt{2}} 2x = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{16}, \\ x \neq \frac{1}{2}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Переходим к основанию 2. Имеем

$$\frac{\log_2 2}{\frac{\log_2 4\sqrt{x}}{\log_2 2} + \frac{\log_2 2}{\log_2 2x} \cdot \frac{\log_2 2x}{\log_2 \frac{1}{2}}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \log_2 x}{2 + \frac{1}{2} \log_2 x} - 1 = 0,$$

откуда  $\log_2 x = 2$  и  $x = 4$ .

Ответ: 4.

7.213.  $|\log_{\sqrt{3}} x - 2| - |\log_3 x - 2| = 2$ .

Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Перейдем к основанию 3. Тогда  $|2 \log_3 x - 2| - |\log_3 x - 2| = 2$ . Раскрывая модули получим три случая:

$$1) \begin{cases} \log_3 x < 1, \\ -2 \log_3 x + 2 + \log_3 x - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 1, \\ \log_3 x = -2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 3^{-2} = \frac{1}{9};$$

$$2) \begin{cases} 1 \leq \log_3 x < 2, \\ 2 \log_3 x - 2 + \log_3 x - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq \log_3 x < 2, \\ \log_3 x = 2. \end{cases}$$

$\log_3 x = 2$  не подходит так как  $\log_3 x < 2$ .

$$3) \begin{cases} \log_3 x \geq 2, \\ 2 \log_3 x - 2 - \log_3 x + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x \geq 2, \\ \log_3 x = 2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 3^2 = 9.$$

Ответ:  $\frac{1}{9}; 9$ .

7.214.  $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$ .

Решение.

Перепишем уравнение в виде  $3^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^{2x} = 0$  и разделим его

на  $2^{2x} \neq 0$ . Тогда  $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0 \Rightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)_1 = -2$  (нет решений)

или  $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)_2 = 1 \Rightarrow x = 0$ .

Ответ: 0.

$$7.215. 2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot (\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty).$$

Запишем уравнение в виде  $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - \frac{5}{2} \cdot 2^{\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}} - 6 = 0$ . Решая его

как квадратное относительно  $2^{\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}}$ , имеем  $2^{\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}} = -\frac{3}{2}$  (нет ре-

шений), или  $2^{\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}} = 2^2 \Rightarrow \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} = 2, \sqrt{x^2-4} = 4-x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 16 - 8x + x^2, \\ 4 - x \geq 0, \end{cases} \text{ откуда } x = \frac{5}{2}.$$

*Ответ:*  $\frac{5}{2}$ .

$$7.216. 27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0.$$

*Решение.*

Имеем

$$3^{3x} - 13 \cdot 3^{2x} + 39 \cdot 3^x - 27 = 0 \Leftrightarrow (3^{3x} - 27) - 13 \cdot 3^x(3^x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 3)(3^{2x} + 3 \cdot 3^x + 9) - 13 \cdot 3^x(3^x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 3)(3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9) = 0 \Leftrightarrow (3^x - 3)(3^x - 1)(3^x - 9) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^x - 3 = 0, 3^x - 1 = 0, 3^x - 9 = 0.$$

Таким образом,  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2$ .

*Ответ:* 0; 1; 2.

$$7.217. \left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^z + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^z = 14.$$

*Решение.*

Так как  $\sqrt{7-\sqrt{48}} = \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{48}}}$ , то уравнение имеет вид

$$\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^z + \frac{1}{\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^z} - 14 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{2z} - 14\sqrt{7+\sqrt{48}} + 1 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^z$ , имеем  $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^z = (7+\sqrt{48})^{-1}$ ,  $z_1 = -2$  или  $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^z = 7+\sqrt{48}$ ,  $z_2 = 2$ .

Ответ:  $-2; 2$ .

$$7.218. \left(\frac{3}{5}\right)^{2\log_9(x+1)} \cdot \left(\frac{125}{27}\right)^{\log_{127}(x-1)} = \frac{\log_5 27}{\log_5 243}.$$

Решение.

ОДЗ:  $x > 1$ .

Из условия имеем

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3(x+1)} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3(x-1)} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3(x+1)+\log_3(x-1)} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x+1) + \log_3(x-1) = 1 \Rightarrow \log_3(x^2 - 1) = 1, x^2 - 1 = 3, x^2 = 4.$$

Отсюда  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 2$ ;  $x_1 = -2$  не подходит по ОДЗ.

Ответ:  $2$ .

$$7.219. 5^{1+x^3} - 5^{1-x^3} = 24.$$

Решение.

Имеем  $5 \cdot 5^{x^3} - \frac{5}{5^{x^3}} - 24 = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot (5^{x^3})^2 - 24 \cdot 5^{x^3} - 5 = 0$ . Решая это уравнение как квадратное относительно  $5^{x^3}$ , получим  $5^{x^3} = -\frac{1}{5}$  (нет решений), или  $5^{x^3} = 5 \Rightarrow x^3 = 1, x = 1$ .

Ответ:  $1$ .

$$7.220. 3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0.$$

Решение.

Перепишем уравнение в виде  $81 \cdot 3^{2x} + 45 \cdot 3^x \cdot 2^x - 36 \cdot 2^x = 0$ . Разделив его на  $9 \cdot 2^{2x}$ , получим  $9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = -1$  (нет решений), или  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ , откуда  $x = -2$ .

Ответ:  $-2$ .



$$7.221. 4^{\lg x+1} - 6^{\lg x} - 2 \cdot 3^{\lg x^2+2} = 0.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $x > 0$ .

Из условия имеем  $4 \cdot 2^{2\lg x} - 2^{\lg x} \cdot 3^{\lg x} - 18 \cdot 3^{2\lg x} = 0$ . Разделив его на  $3^{2\lg x}$ , получим  $4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2\lg x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} - 18 = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = -2$  (нет решений), или  $\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Rightarrow \lg x = -2$ . Тогда  $x = 10^{-2} = 0,01$ .

*Ответ:* 0,01.

$$7.222. 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$$

*Решение.*

Имеем  $3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} - 5 \cdot 4^x \cdot 9^x = 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$  или  $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1$ , откуда  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 0$ .

*Ответ:* 0;  $\frac{1}{2}$ .

$$7.223. \log_5(2^{1,5x-2,5} + 2^{1,5x-0,5} - 0,01 \cdot 5^{3x+1}) = 3x - 1.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $2^{1,5x-2,5} + 2^{1,5x-0,5} - 0,01 \cdot 5^{3x+1} > 0$ .

По определению логарифма получаем

$$\begin{aligned} 2^{1,5x-2,5} + 2^{1,5x-0,5} - 0,01 \cdot 5^{3x+1} &= 5^{3x-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2^{1,5x}}{2^{2,5}} + \frac{2^{1,5x}}{2^{0,5}} - 0,05 \cdot 5^{3x} &= \frac{5^{3x}}{5} \Leftrightarrow \frac{2^{1,5x}}{2^{2,5}} + \frac{2^{1,5x}}{2^{0,5}} = \frac{5^{3x}}{5} + \frac{5^{3x}}{20} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2^{1,5x}}{2^{2,5}} &= \frac{5^{3x}}{2^2 \cdot 5} \Leftrightarrow 2^{1,5x-0,5} = 5^{3x-1} \Rightarrow \begin{cases} 1,5x - 0,5 = 0, \\ 3x - 1 = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда  $x = \frac{1}{3}$ .

*Ответ:*  $\frac{1}{3}$ .

$$7.224. \frac{8^x + 2^x}{4^x - 2} = 5.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{1}{2}.$$

Перепишем уравнение в виде  $2^{3x} - 5 \cdot 2^{2x} + 2^x + 10 = 0$ . Пусть  $2^x = y$ . Тогда уравнение принимает вид  $y^3 - 5y^2 + y + 10 = 0$ . Разделим левую часть уравнения на  $y - 2$ :

$$\begin{array}{r|l} y^3 - 5y^2 + y + 10 & y - 2 \\ - y^3 + 2y^2 & \\ \hline -3y^2 + y & \\ - -3y^2 + 6y & \\ \hline -5y + 10 & \\ - -5y + 10 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Уравнение можно представить в виде  $(y - 2)(y^2 - 3y - 5) = 0$ , откуда

$y_1 = 2$ ,  $y_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$ . Получили:  $2^x = 2 \Rightarrow x_1 = 1$ ;  $2^x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2} < 0$  (нет решений);  $2^x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \Rightarrow x_3 = \log_2 \frac{3 + \sqrt{29}}{2} = \log_2(3 + \sqrt{29}) - 1$ .

*Ответ:*  $1; \log_2(3 + \sqrt{29}) - 1$ .

$$7.225. \log_{3x+7}(5x+3) + \log_{5x+3}(3x+7) = 2.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < 5x+3 \neq 1, \\ 0 < 3x+7 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{3}{5}, x \neq -\frac{2}{5}.$$

Умножив уравнение на  $\log_{3x+7}(5x+3) \neq 0$ , получим

$$\begin{aligned} \log_{3x+7}^2(5x+3) - 2\log_{3x+7}(5x+3) + 1 &= 0 \Leftrightarrow (\log_{3x+7}(5x+3) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{3x+7}(5x+3) &= 1 \Leftrightarrow 5x+3 = 3x+7, x = 2. \end{aligned}$$

*Ответ:* 2.

$$7.226. 2,5^{\log_3 x} + 0,4^{\log_3 x} = 2,9.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x > 0.$$

Перепишем уравнение в виде  $\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x} + \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_3 x} - 2,9 = 0$ . Умно-

жив уравнение на  $\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x}$ , получим  $\left(\frac{5}{2}\right)^{2\log_3 x} - 2,9 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x} + 1 = 0$ .

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x}$ , найдем

$$\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x}\right)_1 = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}, \text{ откуда } \log_3 x_1 = -1, x_1 = \frac{1}{3}, \text{ или } \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x}\right)_2 = \frac{5}{2},$$

откуда  $x_2 = 3$ .

Ответ:  $\frac{1}{3}; 3$ .

7.227.  $(\lg(x+20) - \lg x) \log_x 0,1 = -1$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} x+20 > 0, \\ 0 < x \neq 1 \end{cases}$  или  $0 < x \neq 1$ .

Перейдем к основанию 10. Имеем  $(\lg(x+20) - \lg x) \left(-\frac{1}{\lg x}\right) = -1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \lg(x+20) - \lg x = \lg x \Leftrightarrow \lg(x+20) = 2\lg x \Leftrightarrow \lg(x+20) = \lg x^2$ . Тогда  $x+20 = x^2$ ,  $x^2 - x - 20 = 0$ , откуда  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 5$ ;  $x_1 = -4$  не подходит по ОДЗ.

Ответ: 5.

7.228.  $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$ .

Решение.

ОДЗ:  $0 < x \neq 1$ .

Перепишем уравнение в виде  $5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x}$ ,  $2 \cdot 5^{\lg x} = 50$ ,  $5^{\lg x} = 25$ , откуда  $\lg x = 2$ ,  $x = 10^2 = 100$ .

Ответ: 100.

7.229.  $27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^x - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x} = 8$ .

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$27 + 9 \cdot 2^{4x} - 2^{6x} - 27 \cdot 2^{2x} = 8 \cdot 2^{3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{6x} - 9 \cdot 2^{4x} + 8 \cdot 2^{3x} + 27 \cdot 2^{2x} - 27 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{6x} - 2^{4x} - 8 \cdot 2^{4x} + 8 \cdot 2^{3x} + 27 \cdot 2^x - 27 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2^{4x}(2^{2x}-1)-8 \cdot 2^{3x}(2^x-1)+27(2^x-1)=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{4x}(2^x-1)(2^x+1)-8 \cdot 2^{3x}(2^x-1)+27(2^x-1)=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2^x-1)(2^{5x}+2^{4x}-8 \cdot 2^{3x}+27)=0, \end{aligned}$$

откуда  $2^x = 1$ ,  $x_1 = 0$ . Уравнение  $2^{5x} + 2^{4x} - 8 \cdot 2^{3x} + 27 = 0$  решений не имеет.

*Ответ:* 0.

**7.230.**  $\log_{x+1}(x-0,5) = \log_{x-0,5}(x+1)$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $\begin{cases} 0 < x+1 \neq 1, \\ 0 < x-0,5 \neq 1 \end{cases}$  или  $0,5 < x \neq 1,5$ .

Умножив обе части уравнения на  $\log_{x+1}(x-0,5) \neq 0$ , получим

$$\log_{x+1}^2(x-0,5) = 1 \Rightarrow \log_{x+1}(x-0,5) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-0,5 = \frac{1}{x+1}, \quad 2x^2 + x - 3 = 0, \quad x_1 = -\frac{3}{2} \quad (\text{не подходит по ОДЗ}),$$

$x_2 = 1$ ; или  $\log_{x+1}(x-0,5) = 1$ ,  $x-0,5 = x+1$ , нет решений.

*Ответ:* 1.

**7.231.**  $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $\begin{cases} \log_2 x > 0, \\ \log_4 x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$ .

Перейдем к основанию 2. Имеем

$$\frac{1}{2} \log_2 \log_2 x + \log_2 \left( \frac{1}{2} \log_2 x \right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \log_2 x + 2 \log_2 \left( \frac{1}{2} \log_2 x \right) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \log_2 x + \log_2 \left( \frac{1}{4} \log_2^2 x \right) = 4 \Leftrightarrow \log_2 \left( \log_2 x \cdot \frac{1}{4} \log_2^2 x \right) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_2^3 x = 16, \quad \log_2^3 x = 64.$$

Тогда  $\log_2 x = 4$ ,  $x = 2^4 = 16$ .

*Ответ:* 16.

$$7.232. \log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x \neq \frac{1}{2}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Перейдем к основанию 2. Тогда

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} + \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = 3 \Leftrightarrow \frac{4}{2\log_2 x} + \frac{6}{1+\log_2 x} - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\log_2^2 x - 5\log_2 x - 2 = 0, \text{ где } \log_2 x \neq 0 \text{ и } \log_2 x \neq -1.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $\log_2 x$ , получим

$$\log_2 x = -\frac{1}{3}, x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0,5\sqrt[3]{4}; \log_2 x = 2, x_2 = 4.$$

*Ответ:*  $0,5\sqrt[3]{4}; 4.$

$$7.233. (3\log_a x - 2)\log_x^2 a = \log_{\sqrt{a}} x - 3 \quad (a > 0, a \neq 1).$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < a \neq 1, \\ 0 < x \neq 1. \end{cases}$$

Перейдем к основанию  $a$ . Получаем

$$\frac{3\log_a x - 2}{\log_a^2 x} = 2\log_a x - 3 \Leftrightarrow 2\log_a^3 x - 3\log_a^2 x - 3\log_a x + 2 = 0,$$

т.к.  $\log_a x \neq 0$ . Далее имеем

$$2(\log_a^3 x + 1) - 3\log_a x(\log_a x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\log_a x + 1)(\log_a^2 x - \log_a x + 1) - 3\log_a x(\log_a x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_a x + 1)(2\log_a^2 x - 5\log_a x + 2) = 0,$$

откуда  $\log_a x + 1 = 0$  или  $2\log_a^2 x - 5\log_a x + 2 = 0$ . Из первого уравнения

$$\log_a x = -1, x_1 = \frac{1}{a}. \text{ Из второго уравнения } \log_a x = \frac{1}{2} \text{ или } \log_a x = 2, \text{ от-}$$

куда  $x_2 = \sqrt{a}, x_3 = a^2.$

*Ответ:*  $\frac{1}{a}; \sqrt{a}; a^2.$

$$7.234. \frac{10x^{2\lg^2 x}}{x^3} = \frac{x^{3\lg x}}{10}.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $0 < x \neq 1$ .

Из условия имеем  $\frac{x^{2\lg^2 x}}{x^3 \cdot x^{3\lg x}} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow x^{2\lg^2 x - 3\lg x - 3} = 10^{-2}$ . Логариф-

мируя обе части этого уравнения по основанию 10, получим

$$\begin{aligned} \lg x^{2\lg^2 x - 3\lg x - 3} &= \lg 10^{-2} \Leftrightarrow (2\lg^2 x - 3\lg x - 3)\lg x = -2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\lg^3 x - 3\lg^2 x - 3\lg x + 2 &= 0 \Leftrightarrow 2(\lg^3 x + 1) - 3\lg x(\lg x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(\lg x + 1)(\lg^2 x - \lg x + 1) - 3\lg x(\lg x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\lg x + 1)(2\lg^2 x - 5\lg x + 2) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lg x + 1 = 0 \text{ или } 2\lg^2 x - 5\lg x + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения имеем  $\lg x = -1$ ,  $x_1 = \frac{1}{10}$ , а из второго  $\lg x = \frac{1}{2}$ ,

$x_2 = \sqrt{10}$  или  $\lg x = 2$ ,  $x_3 = 100$ .

*Ответ:* 0,1;  $\sqrt{10}$ ; 100.

$$7.235. x \log_{x+1} 5 \cdot \log_{\sqrt[3]{5}}(x+1) = \frac{x-4}{x}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x+1 \neq 1, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \neq 0.$$

Перейдем к основанию 5. Имеем  $\frac{x}{\log_5(x+1)} \cdot (-3)\log_5(x+1) = \frac{x-4}{x}$ ,

$-3x = \frac{x-4}{x}$  при  $\log_5(x+1) \neq 0$ . Отсюда  $3x^2 + x - 4 = 0$ ,  $x_1 = -\frac{4}{3}$ ,  $x_2 = 1$ ;

$x_1 = -\frac{4}{3}$  не подходит по ОДЗ.

*Ответ:* 1.

$$7.236. \quad 3 \lg x^2 - \lg^2(-x) = 9.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 > 0, \\ -x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0.$$

Из условия имеем  $\lg^2(-x) - 6 \lg(-x) + 9 = 0$ ,  $(\lg(-x) - 3)^2 = 0$ , откуда  $\lg(-x) = 3 \Rightarrow -x = 10^3 = 1000$ ,  $x = -1000$ .

*Ответ:*  $-1000$ .

$$7.237. \quad 4 \log_4^2(-x) + 2 \log_4(x^2) = -1.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -x > 0, \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0.$$

Так как по ОДЗ  $x < 0$ , то имеем

$$\begin{aligned} 4 \log_4^2(-x) + 4 \log_4(-x) + 1 = 0 &\Leftrightarrow (2 \log_4(-x) + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \log_4(-x) = -1, \log_4(-x) &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } -x = 4^{-1/2} = \frac{1}{2}, x = -\frac{1}{2}.$$

*Ответ:*  $-\frac{1}{2}$ .

$$7.238. \quad \frac{2}{\sqrt{3 \log_2 \sqrt{x^2}}} - \frac{1}{\sqrt{\log_2(-x)}} = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 > 0, \\ -x > 0, \\ \log_2(-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1.$$

Так как по ОДЗ  $x < 0$ , то имеем

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3 \log_2(-x)}} = \frac{1}{\sqrt{\log_2(-x)}} &\Rightarrow \frac{4}{3 \log_2^2(-x)} = \frac{1}{\log_2(-x)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \log_2^2(-x) - 4 \log_2(-x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2(-x)(3 \log_2(-x) - 4) &= 0 \Leftrightarrow \log_2(-x) = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

так как  $\log_2(-x) \neq 0$ . Отсюда  $-x = 2^{4/3}$ ,  $x = -2^{4/3}$ .

*Ответ:*  $-2^{4/3}$ .

$$7.239. \lg \sqrt{10} - \lg 100 = \sqrt[6]{\lg(390635 - 5^{\sqrt{2x}})} - 2,5.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \lg(390635 - 5^{\sqrt{2x}}) \geq 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} \lg \sqrt{10} - \lg 100 + 2,5 &= \sqrt[6]{\lg(390635 - 5^{\sqrt{2x}})} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,5 - 2 + 2,5 &= \sqrt[6]{\lg(390635 - 5^{\sqrt{2x}})}, 1 = \sqrt[6]{\lg(390635 - 5^{\sqrt{2x}})} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10 &= (390635 - 5^{\sqrt{2x}}) \Leftrightarrow 5^{\sqrt{2x}} = 390625 \Leftrightarrow 5^{\sqrt{2x}} = 5^8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x} &= 8, x = 256. \end{aligned}$$

*Ответ:* 256.

$$7.240. \lg^4(x-1)^2 + \lg^2(x-1)^3 = 25.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x > 1.$$

Из условия имеем  $16\lg^4(x-1) + 9\lg^2(x-1) - 25 = 0$ . Решая это уравнение как биквадратное относительно  $\lg(x-1)$ , получим  $\lg^2(x-1) = 1 \Rightarrow \Rightarrow \lg(x-1) = -1$  или  $\lg(x-1) = 1$ , откуда  $x_1 = 11$ ,  $x_2 = 11$ .

*Ответ:* 1,1; 11.

$$7.241. \frac{\log_2(x^3 + 3x^2 + 2x - 1)}{\log_2(x^3 + 2x^2 - 3x + 5)} = \log_{2x} x + \log_{2x} 2.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 1 > 0, \\ 0 < x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \neq 1, \\ 0 < x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

По формуле замены основания имеем

$$\begin{aligned} \log_{x^3+2x^2-3x+5}(x^3 + 3x^2 + 2x - 1) &= \log_{2x} 2x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{x^3+2x^2-3x+5}(x^3 + 3x^2 + 2x - 1) &= 1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -6; x_2 = -6 \text{ не подходит по ОДЗ.}$$

Ответ: 1.

**7.242.**  $(16 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} - 0,048) \lg(x^3 + 2x + 1) = 0.$

Решение.

ОДЗ:  $x^3 + 2x + 1 > 0.$

Из условия  $16 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} - 0,048 = 0$  или  $\lg(x^3 + 2x + 1) = 0$ . Перепишем первое уравнение в виде

$$\frac{16}{5} \cdot 5^{2x} - \frac{2}{5} \cdot 5^x - 0,048 = 0 \Leftrightarrow 16 \cdot 5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 0,24 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $5^x$ , получим

$$5^x = -\frac{3}{40} \text{ (нет решений), или } 5^x = 5^{-1} \Leftrightarrow x_1 = -1 \text{ (не подходит по ОДЗ).}$$

Из второго уравнения имеем

$$x^3 + 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2) = 0, x_3 = 0, x^2 + 2 \neq 0.$$

Ответ: 0.

**7.243.**  $5^x \cdot \sqrt[3]{8^{x-1}} = 500.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде  $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{3}} = 500 \Leftrightarrow \frac{5^x \cdot 8}{8^{1/x}} = 500 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5^x \cdot 2}{8^{1/x}} = 125 \Leftrightarrow 5^{x-3} = 2^{3/x-1} \Rightarrow \begin{cases} x-3=0, \\ \frac{3}{x}-1=0, \end{cases} \text{ откуда } x=3.$$

Ответ: 3.

**7.244.**  $3 \log_2^2 \sin x + \log_2(1 - \cos 2x) = 2.$

Решение.

ОДЗ:  $0 < \sin x < 1.$

Так как  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ , то имеем

$$3 \log_2^2 \sin x + \log_2 2 \sin^2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3 \log_2^2 \sin x + 2 \log_2 \sin x - 1 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $\log_2 \sin x$ , получим  $\log_2 \sin x = \frac{1}{3}$  или  $\log_2 \sin x = -1$ , откуда  $\sin x = \sqrt[3]{2}$  (нет решений),

или  $\sin x = \frac{1}{2}$ . Тогда  $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Ответ:  $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}.$

$$7.245. \log_{1+x}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 > 0, \\ -1 < x \neq 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned} 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 &= (1+x)^3 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x &= 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 6) = 0, \end{aligned}$$

откуда  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 3$ ;  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -2$  не подходят по ОДЗ.

*Ответ:* 3.

$$7.246. \log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \frac{4}{3}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x > 0.$$

Из условия имеем

$$\frac{1}{3} \log_2 x + \sqrt[3]{\log_2 x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \log_2 x + 3\sqrt[3]{\log_2 x} - 4 = 0.$$

Пусть  $\sqrt[3]{\log_2 x} = y$ . Относительно  $y$  уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} y^3 + 3y - 4 &= 0 \Leftrightarrow (y^3 - 1) + (3y - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + y + 1) + 3(y-1) &= 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + y + 4) = 0, \end{aligned}$$

откуда  $y - 1 = 0$ , так как  $y^2 + y + 4 > 0$ . Тогда  $y = 1$ ,  $\sqrt[3]{\log_2 x} = 1$ ,

$\log_2 x = 1$ ,  $x = 2$ .

*Ответ:* 2.

$$7.247. \sqrt{\log_5 x} + \sqrt[3]{\log_5 x} = 2.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \log_5 x \geq 0 \text{ или } x \geq 1.$$

Перепишем уравнение в виде  $\sqrt[6]{(\log_5 x)^3} + \sqrt[6]{(\log_5 x)^2} - 2 = 0$ . Пусть

$\sqrt[6]{\log_5 x} = y$ . Относительно  $y$  уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} y^3 + y^2 - 2 &= 0 \Leftrightarrow (y^3 - 1) + (y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + y + 1) + (y-1)(y+1) &= 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + 2y + 2) = 0, \end{aligned}$$

откуда  $y - 1 = 0$ , так как  $y^2 + 2y + 2 > 0$ . Получили  $\sqrt[6]{\log_5 x} = 1$ ,  $\log_5 x = 1$ ,  $x = 5$ .

*Ответ:* 5.

$$7.248. \log_2 x \cdot \log_3 x = \log_3(x^3) + \log_2(x^2) - 6.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $x > 0$ .

Перейдем к основанию 2. Имеем

$$\frac{\log_2 x \cdot \log_2 x}{\log_2 3} = \frac{3 \log_2 x}{\log_2 3} + 2 \log_2 x - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - (3 + 2 \log_2 3) \log_2 x + 6 \log_2 3 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $\log_2 x$ , получим

$\log_2 x = \log_2 9$  или  $\log_2 x = 3$ , откуда  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = 8$ .

*Ответ:* 8; 9.

7.249.  $3 \cdot 4^{(x-2)} + 27 = a + a \cdot 4^{(x-2)}$ . При каких значениях  $a$  уравнение имеет решение?

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде

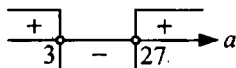
$$3 \cdot 4^{(x-2)} - a \cdot 4^{(x-2)} = a - 27 \Leftrightarrow (3 - a) \cdot 4^{(x-2)} = a - 27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^{(x-2)} = \frac{a - 27}{3 - a}, \text{ где } \frac{a - 27}{3 - a} > 0.$$

Логарифмируя обе части этого уравнения по основанию 4, получим

$$\log_4 4^{(x-2)} = \log_4 \frac{a - 27}{3 - a} \Leftrightarrow x - 2 = \log_4 \frac{a - 27}{3 - a}, \quad x = 2 + \log_4 \frac{a - 27}{3 - a},$$

где  $\frac{a - 27}{3 - a} > 0$ . Решая полученное неравенство методом интервалов, имеем



Таким образом  $a \in (3; 27)$ .

*Ответ:*  $2 + \log_4 \frac{a - 27}{3 - a}$ , где  $a \in (3; 27)$ .

$$7.250. \log_a x + \log_{\sqrt{a}} x + \log_{\sqrt[3]{a^2}} x = 27.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ 0 < a \neq 1. \end{cases}$$

Перейдем к основанию  $a$ . Имеем  $\log_a x + 2 \log_a x + \frac{3}{2} \log_a x = 27 \Leftrightarrow$

$\log_a x = 6$ , откуда  $x = a^6$ .

Ответ:  $a^6$ , где  $0 < a \neq 1$ .

7.251.  $x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} - \frac{1}{x} = 0$ .

Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Запишем уравнение в виде  $x^{2-\lg^2 x - 2 \lg x} = x^{-1}$ . Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим

$$\begin{aligned} \lg x^{2-\lg^2 x - 2 \lg x} &= \lg x^{-1} \Leftrightarrow (2 - \lg^2 x - 2 \lg x) \lg x = -\lg x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2 - \lg^2 x - 2 \lg x) \lg x + \lg x &= 0 \Leftrightarrow \lg x (\lg^2 x + 2 \lg x - 3) = 0, \end{aligned}$$

откуда  $\lg x = 0$  или  $\lg^2 x + 2 \lg x - 3 = 0$ . Из первого уравнения  $x_1 = 10^0 = 1$ .

Решая второе уравнение как квадратное относительно  $\lg x$ , получим

$\lg x = -3$  и  $\lg x = 1$ , откуда  $x_2 = 10^{-3} = 0,001$ ,  $x_3 = 10$ .

Ответ: 0,001; 1; 10.

7.252.  $\frac{2}{15} \left( 16^{\log_3 x + 1} - 16^{\log_3 \sqrt{x}} \right) + 16^{\log_3 x} - \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} = 0$ .

Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Перепишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{2}{15} \left( 16 \cdot 16^{2 \cdot \frac{1}{2} \log_3 x} - 16^{2 \cdot \frac{1}{2} \log_3 x} \right) + 16^{\log_3 x} - 3 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 16^{\log_3 x} + 2 \cdot 16^{\frac{\log_3 x}{2}} - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $16^{\frac{\log_3 x}{2}}$ , получим  $16^{\frac{\log_3 x}{2}} = -3$  (нет решений), или  $16^{\frac{\log_3 x}{2}} = 16^0$ , откуда  $\frac{\log_3 x_2}{2} = 0$ ,  $x = 1$ .

Ответ: 1.

7.253.  $\log_a \sqrt{4+x} + 3\log_{a^2}(4-x) - \log_{a^4}(16-x^2)^2 = 2$ . При каких значениях  $a$  уравнение имеет решение?

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -4 < x < 4, \\ 0 < a \neq 1. \end{cases}$$

Перейдем к основанию  $a$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\log_a(4+x) + \frac{3}{2}\log_a(4-x) - \frac{1}{2}\log_a(4-x) - \frac{1}{2}\log_a(4+x) &= 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_a(4-x) &= 2 \Leftrightarrow 4-x = a^2, \quad x = 4-a^2. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} -4 < 4-a^2 < 4, \\ 0 < a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 2\sqrt{2}, \\ 0 < a \neq 1. \end{cases}$$

*Ответ:*  $x = 4 - a^2$ , где  $a \in (0; 1) \cup (1; 2\sqrt{2})$ .

7.254.  $\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_8(9^{x+1} - 1) = 1 + \log_8(3^{x+1} + 1)$ .

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } 9^{x+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1.$$

Так как  $\log_2 \sqrt[3]{4} = \frac{2}{3}$ , то имеем

$$\begin{aligned} \log_8(9 \cdot 3^{2x} - 1) - \log_8(3 \cdot 3^x + 1) &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_8 \frac{9 \cdot 3^{2x} - 1}{3 \cdot 3^x + 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{9 \cdot 3^{2x} - 1}{3 \cdot 3^x + 1} &= 8^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 3 = 0. \end{aligned}$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $3^x$ , получим

$$3^x = -\frac{1}{3} \text{ (нет решений), или } 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0.$$

*Ответ:* 0.

7.255.  $25^{\log_4 x} - 5^{\log_{16} x^2 + 1} = \log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3} - 25^{\log_{16} x}$ .

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x > 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$5^{\log_2 x} - 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}\log_2 x} = 5 - 5^{\frac{1}{2}\log_2 x} \Leftrightarrow 5^{\log_2 x} - 4 \cdot 5^{\frac{1}{2}\log_2 x} - 5 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $5^{\frac{1}{2}\log_2 x}$ , получим

$$5^{\frac{1}{2} \log_2 x} = -1 \text{ (нет решений)}, \text{ или } 5^{\frac{1}{2} \log_2 x} = 5 \Rightarrow \frac{1}{2} \log_2 x = 1, \log_2 x = 2,$$

$$x = 2^2 = 4.$$

Ответ: 4.

$$7.256. \left(1 + \frac{x}{2}\right) \log_2 3 - \log_2 (3^x - 13) = 2.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } 3^x - 13 > 0 \Leftrightarrow x > \log_3 13.$$

Из условия имеем

$$\log_2 3^{1+\frac{x}{2}} - \log_2 (3^x - 13) = 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{3^{1+\frac{x}{2}}}{3^x - 13} = 2 \Leftrightarrow \frac{3^{1+\frac{x}{2}}}{3^x - 13} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^{\frac{x}{2}} - 52 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $3^{\frac{x}{2}}$ , получим

$$3^{\frac{x}{2}} = -\frac{13}{4} \text{ (нет решений)}, \text{ или } 3^{\frac{x}{2}} = 4 \Rightarrow x = 4 \log_3 2.$$

Ответ:  $4 \log_3 2$ .

$$7.257. \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_n (n+1) = 10 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Решение.

Перейдем к основанию 2.

$$\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \dots \cdot \frac{\log_2 (n+1)}{\log_2 n} = 10 \Leftrightarrow \log_2 (n+1) = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n+1 = 2^{10} \Leftrightarrow n = 1024 - 1 = 1023.$$

Ответ: 1023.

$$7.258. \frac{a+3}{2^{a+2}} \cdot 32^{\frac{1}{x(a+2)}} = 4^{\frac{1}{x}} \text{ (рассмотреть при всех действительных значениях } a \text{)}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0, \\ a \neq -2. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$\frac{a+3}{2^{a+2}} \cdot 2^{\frac{5}{x(a+2)}} = 2^{\frac{2}{x}} \Leftrightarrow 2^{\frac{a+3}{a+2} + \frac{5}{x(a+2)}} = 2^{\frac{2}{x}} \Leftrightarrow \frac{a+3}{a+2} + \frac{5}{x(a+2)} = \frac{2}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2a-1}{a+3},$$

где  $a \neq -3$ , с учетом ОДЗ  $x \neq 0$ ,  $a \neq \frac{1}{2}$ .

Ответ:  $\frac{2a-1}{a+3}$  при  $a \neq -2$ ,  $a \neq -3$  и  $a \neq \frac{1}{2}$ ; нет корней при  $a = -2$ ,  $a = -3$  и  $a = \frac{1}{2}$ .

Решить системы уравнений (7.259 — 7.294):

$$7.259. \begin{cases} 2 - \log_2 y = 2 \log_2(x+y), \\ \log_2(x+y) + \log_2(x^2 - xy + y^2) = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+y > 0, \\ y > 0, \\ x^2 - xy + y^2 > 0. \end{cases}$$

Запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \log_2 4 - \log_2 y = \log_2(x+y)^2, \\ \log_2(x+y) + \log_2(x^2 - xy + y^2) = 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \frac{4}{y} = \log_2(x+y)^2, \\ \log_2(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{y} = (x+y)^2, \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{2}{\sqrt{y}}, \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{y}} - y, \\ \frac{2}{\sqrt{y}} \left( \frac{4}{y} - 3y \left( \frac{2}{\sqrt{y}} - y \right) \right) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{y}} - y, \\ 6y^3 - 14y\sqrt{y} + 8 = 0. \end{cases}$$

Пусть  $y\sqrt{y} = t$ . Тогда второе уравнение имеет вид  $6t^2 - 14t + 8 = 0$ ,

$$3t^2 - 7t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = \frac{4}{3}. \text{ Тогда } y_1 = 1, x_1 = 1; y_2 = \sqrt[3]{\frac{16}{9}},$$

$$x_2 = 2\sqrt[3]{\frac{3}{4}} - \sqrt[3]{\frac{16}{9}} = \frac{2\sqrt[3]{6}}{2} - \frac{2\sqrt[3]{6}}{3} = \frac{2\sqrt[3]{6}}{6} = \frac{\sqrt[3]{6}}{3}.$$

Ответ:  $(1; 1), \left(\frac{\sqrt[3]{6}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{6}}{3}\right).$

$$7.260. \begin{cases} 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y} + 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} - 6 = 0, \\ \lg(3x-y) + \lg(y+x) - 4 \lg 2 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x - y > 0, \\ y + x > 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы как квадратное относительно

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}. \text{ Имеем}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} = -3 \text{ (нет решений),}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2x-y}{2} = 1, y = 2x - 2.$$

Из второго уравнения системы имеем  $\lg(3x-y)(y+x) = \lg 16,$

$(3x-y)(y+x) = 16.$  Получили

$$\begin{cases} y = 2x - 2, \\ (3x - y)(y + x) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2, \\ (3x - (2x - 2))(2x - 2 + x) = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 4x - 20 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{10}{3}, x_2 = 2.$$

Тогда  $y_1 = -\frac{26}{3}, y_2 = 2.$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{10}{3}, \\ y_1 = -\frac{26}{3} \end{cases} \text{ не подходит по ОДЗ.}$$

Ответ:  $(2; 2).$



$$7.261. \begin{cases} (0,48^{x^2+2})^{2x-y} = 1, \\ \lg(x+y) - 1 = \lg 6 - \lg(x+2y) \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+y > 0, \\ x+2y > 0. \end{cases}$$

Перепишем первое уравнение системы в виде

$$0,48^{(x^2+2)(2x-y)} = 0,48^0 \Leftrightarrow (x^2+2)(2x-y) = 0 \Leftrightarrow 2x-y=0, y=2x.$$

Из второго уравнения системы имеем

$$\lg \frac{x+y}{10} = \lg \frac{6}{x+2y} \Leftrightarrow \frac{x+y}{10} = \frac{6}{x+2y} \Rightarrow \frac{x+2x}{10} = \frac{6}{x+4x}, x^2 = 4.$$

Тогда  $x_1 = -2, x_2 = 2; y_1 = -4, y_2 = 4.$

$$\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = -4 \end{cases} \text{ не подходит по ОДЗ.}$$

*Ответ:* (2; 4).

$$7.262. \begin{cases} \log_2(x-y) = 5 - \log_2(x+y), \\ \frac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-y > 0, \\ x+y > 0, \\ x > 0, \\ y > 0, \\ y \neq 3. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$\begin{cases} \log_2(x-y) = \log_2 \frac{32}{x+y}, \\ \lg \frac{x}{4} = \lg \frac{3}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = \frac{32}{x+y}, \\ \frac{x}{4} = \frac{3}{y} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{12}{y}.$$

Из первого уравнения получим

$$\frac{12}{y} - y = \frac{32}{\frac{12}{y} + y} \Leftrightarrow y^4 + 32y^2 - 144 = 0, y_1 = -2, y_2 = 2.$$

Тогда  $x_1 = -6$ ,  $x_2 = 6$ .

$$\begin{cases} y_1 = -2, \\ x_1 = -6 \end{cases} \text{ не подходят по ОДЗ.}$$

Ответ: (6; 2).

$$7.263. \begin{cases} 4^{\frac{x+y}{y} + \frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0, \\ x - y > 0, \\ x + y > 0. \end{cases}$$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}} = 2^5, \\ \log_3(x-y) = \log_3 \frac{3}{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} = 5, \\ x-y = \frac{3}{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{2}{\left(\frac{x}{y}\right)} - 5 = 0, \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) + 2 = 0, \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \text{ или } \frac{x}{y} = 2.$$

Если  $y = 2x$ , то  $x^2 - 4x^2 = -3x^2 \neq 3$ . Пусть  $x = 2y$ , тогда данная система равносильна двум системам:

$$1) \begin{cases} y = \frac{x}{2}, \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = -1 \end{cases} \text{ не подходят по ОДЗ;}$$

$$2) \begin{cases} y = \frac{x}{2}, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: (2; 1).

$$7.264. \begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ xy = 15. \end{cases}$$

*Решение.*

ОДЗ:  $y > 0$ .

Перепишем первое уравнение системы в виде  $y^{5x^2-51x+10} = y^0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 5x^2 - 51x + 10 = 0$  при  $0 < y \neq 1$ . Данная система уравнений равносильна двум системам:

$$1) \begin{cases} y = 1, \\ xy = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 15, \\ y_1 = 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 5x^2 - 51x + 10 = 0, \\ xy = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 10, \\ y_2 = 1,5; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 0,2, \\ y_3 = 75. \end{cases}$$

*Ответ:* (15; 1), (10; 1,5), (0,2; 75).

$$7.265. \begin{cases} \log_x y = 2, \\ \log_{x+1}(y+23) = 3. \end{cases}$$

*Решение.*

ОДЗ:  $\begin{cases} y > 0, \\ 0 < x \neq 1. \end{cases}$

Система уравнений равносильна следующей:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y + 23 = (x+1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + 23 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^3 + 2x^2 + 3x - 22 = 0. \end{cases}$$

Разделим левую часть второго уравнения этой системы на  $x - 2$ :

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 2x^2 + 3x - 22 & x - 2 \\ \hline -x^3 - 2x^2 & \\ \hline 4x^2 + 3x & \\ -4x^2 - 8x & \\ \hline 11x - 22 & \\ -11x - 22 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Тогда второе уравнение можно представить в виде

$$(x-2)(x^2+4x+11)=0,$$

откуда  $x=2$ , так как  $x^2+4x+11 \neq 0$  ( $D < 0$ ). Отсюда  $y=2^2=4$ .

*Ответ:* (2; 4).

$$7.266. \begin{cases} (x^2+y)2^{y-x^2}=1, \\ 9(x^2+y)=6^{x^2-y}. \end{cases}$$

*Решение.*

Из первого уравнения имеем  $x^2+y=2^{x^2-y}$ . Подставив это значение во второе уравнение системы, получим  $9 \cdot 2^{x^2-y} = 6^{x^2-y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^2 = 3^{x^2-y} \Leftrightarrow x^2-y=2$ . Тогда  $x^2+y=2^{x^2-y}=2^2=4$  и исходная

система уравнений имеет вид  $\begin{cases} x^2+y=4, \\ x^2-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=6, \\ 2y=2, \end{cases} \begin{cases} x^2=3, \\ y=1, \end{cases}$  откуда

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3}, \\ y_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\sqrt{3}, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

*Ответ:*  $(\sqrt{3}; 1), (-\sqrt{3}; 1)$ .

$$7.267. \begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$$

*Решение.*

ОДЗ:  $0 < x \neq 1$ .

Логарифмируя второе уравнение по основанию 3, получим

$$\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ \log_3 x^y = \log_3 3^{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \log_3 x, \\ y \log_3 x = 12 \end{cases} \Rightarrow (1 + \log_3 x) \log_3 x = 12,$$

$$\log_3^2 x + \log_3 x - 12 = 0 \Rightarrow \log_3 x = -4, x_1 = \frac{1}{81} \text{ или } \log_3 x = 3, x_2 = 27.$$

Тогда  $y_1 = -3, y_2 = 4$ .

*Ответ:*  $\left(\frac{1}{81}; -3\right), (27; 4)$ .

$$7.268. \begin{cases} 9^{\sqrt[4]{xy^2}} - 27 \cdot 3^{\sqrt{y}} = 0, \\ \frac{1}{4} \lg x + \frac{1}{2} \lg y = \lg(4 - \sqrt[4]{x}). \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x < 256, \\ y > 0. \end{cases}$$

Запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 3^{2\sqrt[4]{x}\sqrt{y}} = 3^{3+\sqrt{y}}, \\ \lg \sqrt[4]{x} + \lg \sqrt{y} = \lg(4 - \sqrt[4]{x}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{y} = 3 + \sqrt{y}, \\ \lg(\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{y}) = \lg(4 - \sqrt[4]{x}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{y} = 3 + \sqrt{y}, \\ \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{y} = 4 - \sqrt[4]{x} \end{cases} \Rightarrow 2 = \frac{3 + \sqrt{y}}{4 - \sqrt[4]{x}} \Leftrightarrow \sqrt{y} = 5 - 2\sqrt[4]{x}.$$

Подставив значение  $\sqrt{y}$  в первое уравнение, получим

$$2\sqrt[4]{x}(5 - 2\sqrt[4]{x}) = 3 + 5 - 2\sqrt[4]{x} \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x})^2 - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $\sqrt[4]{x}$ , найдем

$$\sqrt[4]{x} = 1, x_1 = 1 \text{ или } \sqrt[4]{x} = 2, x_2 = 16. \text{ Тогда } y_1 = 9, y_2 = 1.$$

*Ответ:* (1; 9), (16; 1).

$$7.269. \begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152, \\ \log_{\sqrt{5}}(x + y) = 2. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x + y > 0.$$

Запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152, \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152, \\ x = 5 - y. \end{cases}$$

Так как  $x = 5 - y$ , то

$$3^{y-5} \cdot 2^y = 1152 \Leftrightarrow \frac{3^y \cdot 2^y}{3^5} = 1152 \Leftrightarrow 6^y = 279936 \Leftrightarrow 6^y = 6^7 \Leftrightarrow y = 7.$$

Тогда  $x = -2$ .

*Ответ:* (-2; 7).

$$7.270. \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + \lg 8, \\ \lg(x + y) - \lg(x - y) = \lg 3. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x + y > 0, \\ x - y > 0. \end{cases}$$

$$\text{Из условия имеем } \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = \lg 80, \\ \lg \frac{x+y}{x-y} = \lg 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 80, \\ \frac{x+y}{x-y} = 3. \end{cases} \quad \text{Из второго}$$

уравнения системы  $x = 2y$ . Тогда из первого уравнения имеем  $(2y)^2 + y^2 = 80$ ,  $y^2 = 16$ . Отсюда  $y_1 = -4$ ,  $y_2 = 4$ . Тогда  $x_1 = -8$ ,  $x_2 = 8$ .

$$\begin{cases} x_1 = -8, \\ y_1 = -4 \end{cases} \text{ не подходит по ОДЗ.}$$

*Ответ:* (8; 4).

$$7.271. \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x - y > 0.$$

Из второго уравнения системы находим  $x - y = 3$ ,  $x = y + 3$ . Подставив это значение  $x$  в первое уравнение, получим  $3^{y+3} \cdot 2^y = 972$ ,  $27 \cdot 3^y \cdot 2^y = 972$ ,  $6^y = 6^2$ , откуда  $y = 2$ . Тогда  $x = 5$ .

*Ответ:* (5; 2).

$$7.272. \begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)} = 48, \\ 2\log_5(2y-x-12) - \log_5(y-x) = \log_5(y+x) \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y - x > 0, \\ y + x > 0, \\ 2y - x - 12 > 0. \end{cases}$$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 3 \cdot 3^{\log_3(y-x)^2} = 48, \\ \log_5(2y-x-12)^2 - \log_5(y-x) = \log_5(y+x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)^2 = 16, \\ \frac{(2y-x-12)^2}{y-x} = y+x. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы  $y-x=4$ ,  $y=x+4$ . Из второго уравнения системы получим  $(2(x+4)-x-12)^2 = (x+4)^2 - x^2$ ,  $x^2 - 16x = 0$ , откуда  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 16$ . Тогда  $y_1 = 4$ ,  $y_2 = 20$ .

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 4 \end{cases} \text{ не подходит по ОДЗ.}$$

Ответ: (16; 20).

**7.273.**  $\log_9(x^3 + y^3) = \log_3(x^2 - y^2) = \log_3(x + y)$ .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+y > 0, \\ x-y > 0. \end{cases}$$

Перепишем данное двойное равенство в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \log_9(x^3 + y^3) = \log_3(x + y) \\ \log_3(x^2 - y^2) = \log_3(x + y) \end{cases} \text{ Перейдем в первом уравнении системы к}$$

основанию 3. Имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_3(x^3 + y^3) = \log_3(x + y) \\ \log_3(x^2 - y^2) = \log_3(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^3 + y^3) = \log_3(x + y)^2, \\ \log_3(x^2 - y^2) = \log_3(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = (x + y)^2, \\ x^2 - y^2 = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)^2, \\ (x + y)(x - y) = x + y. \end{cases}$$

Так как  $x + y > 0$ , то получаем

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = x + y, \\ x - y = 1. \end{cases} \Rightarrow x = 1 + y.$$

Тогда из первого уравнения системы имеем

$$(1+y)^2 - (1+y)y + y^2 = 1+y+y, \quad y^2 - y = 0,$$

откуда  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 1$ . Тогда  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ .

Ответ: (1; 0), (2; 1).

$$7.274. \begin{cases} (\log_a x + \log_a y - 2)\log_{18} a = 1, \\ 2x + y - 20a = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ 0 < a \neq 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем  $\log_a \frac{xy}{a^2} = \log_a 18 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{a^2} = 18, \quad xy = 18a^2. \text{ Система имеет вид } \begin{cases} xy = 18a^2, \\ y = 20a - 2x \end{cases} \Rightarrow y = 20a - 2x,$$

$x(20a - 2x) = 18a^2$ ,  $x^2 - 10ax + 9a^2 = 0$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_2 = 9a$ . Тогда

$$y_1 = 20a - 2a = 18a, \quad y_2 = 20a - 18a = 2a.$$

Ответ: (a; 18a), (9a; 2a), где  $0 < a \neq 1$ .

$$7.275. \begin{cases} (x+y) \cdot 3^{y-x} = \frac{5}{27}, \\ 3 \log_5(x+y) = x-y. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x + y > 0.$$

Прологарифмируем первое уравнение по основанию 5, имеем

$$\log_5(x+y) \cdot 3^{y-x} = \log_5 \frac{5}{27} \Leftrightarrow \log_5(x+y) - (x-y)\log_5 3 = 1 - 3\log_5 3.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \log_5(x+y) - (x-y)\log_5 3 = 1 - 3\log_5 3, \\ 3\log_5(x+y) = x-y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5(x+y) - 3\log_5(x+y) \cdot \log_5 3 = 1 - 3\log_5 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5(x+y) \cdot (1 - 3\log_5 3) = 1 - 3\log_5 3 \Leftrightarrow \log_5(x+y) = 1,$$

откуда  $x + y = 5$ . Тогда  $x - y = 3 \log_5 5 = 3$ . Отсюда  $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3, \end{cases} \begin{cases} x = 4, \\ y = 1. \end{cases}$

Ответ: (4; 1).



$$7.276. \begin{cases} 2^{\sqrt{xy}-2} + 4^{\sqrt{xy}-1} = 5, \\ \frac{3(x+y)}{x-y} + \frac{5(x-y)}{x+y} = 8. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} xy \geq 0, \\ x \neq \pm y. \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение системы  $2^{2\sqrt{xy}} + 2^{\sqrt{xy}} - 20 = 0$  и, решив его как квадратное относительно  $2^{\sqrt{xy}}$ , получим  $2^{\sqrt{2xy}} = -5$  (нет решений), или  $2^{\sqrt{xy}} = 2^2 \Rightarrow \sqrt{xy} = 2, xy = 4, y = \frac{4}{x}$ . Из второго уравнения системы получим  $3(x+y)^2 + 5(x-y)^2 = 8(x^2 - y^2)$ . Так как  $y = \frac{4}{x}$ , то имеем  $3\left(x + \frac{4}{x}\right)^2 + 5\left(x - \frac{4}{x}\right)^2 = 8\left(x^2 - \frac{16}{x^2}\right) \Leftrightarrow x^2 = 16$ , откуда  $x_1 = -4, x_2 = 4$ . Тогда  $y_1 = -1, y_2 = 1$ .

*Ответ:*  $(-4; -1), (4; 1)$ .

$$7.277. \begin{cases} x^y = 2, \\ (2x)^y = 64 (x > 0). \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } 0 < x \neq 1.$$

Логарифмируем оба уравнения системы по основанию 2, получаем

$$\begin{cases} \log_2 x^y = \log_2 2, \\ \log_2 (2x)^y = \log_2 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \log_2 x = 1, \\ y^2(1 + \log_2 x) = 6 \end{cases} \Rightarrow \log_2 x = \frac{1}{y},$$

$$y^2 \left(1 + \frac{1}{y}\right) = 6, y^2 + y - 6 = 0, y_1 = -3, y_2 = 2.$$

Тогда  $\log_2 x = \frac{1}{-3}, x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ , или  $\log_2 x = \frac{1}{2}, x_2 = \sqrt{2}$ .

*Ответ:*  $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}; -3\right), (\sqrt{2}; 2)$ .

$$7.278. \begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12, \\ 2^{-\log_2 x} + 5^{\log_5 \frac{1}{y}} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение системы

$$x^3 + y^3 = 12xy \Leftrightarrow (x+y)((x+y)^2 - 3xy) = 12xy.$$

Второе уравнение, используя равенство  $a^{\log_a b} = b$ , представим в виде

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(x+y) = xy. \text{ Система имеет вид } \begin{cases} (x+y)((x+y)^2 - 3xy) = 12xy, \\ 3(x+y) = xy. \end{cases}$$

$$\text{Если } \begin{cases} x+y = u, \\ xy = v, \end{cases} \text{ то } \begin{cases} u(u^2 - 3v) = 12v, \\ 3u = v \end{cases} \Rightarrow v = 3u, u(u^2 - 3(3u)) = 12 \cdot 3u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^3 - 9u^2 - 36u = 0 \Leftrightarrow u(u^2 - 9u - 36) = 0, \text{ откуда } u_1 = 0, u_2 = -3,$$

$u_2 = 12$ . Тогда  $v_1 = 0, v_2 = -9, v_3 = 36$ . Исходная система уравнений равносильна трем системам:

$$1) \begin{cases} x+y = 0, \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ не подходит по ОДЗ;}$$

$$2) \begin{cases} x+y = -3, \\ xy = -9, \end{cases} \text{ здесь } xy < 0, \text{ что не удовлетворяет ОДЗ;}$$

$$3) \begin{cases} x+y = 12, \\ xy = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 6. \end{cases}$$

*Ответ:* (6; 6).

$$7.279. \begin{cases} x^{y^2-7y+10} = 1, \\ x+y = 8 \end{cases} (x > 0).$$

*Решение.*

Запишем заданную систему уравнений в виде  $\begin{cases} x^{y^2-7y+10} = x^0, \\ x+y = 8. \end{cases}$  Эта система уравнений равносильна двум системам:

$$1) \begin{cases} x=1, \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=7; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y^2 - 7y + 10 = 0, \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ y=2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=3, \\ y=5. \end{cases}$$

$$\text{Получили: } \begin{cases} x_1=1, \\ y_1=7; \end{cases} \begin{cases} x_2=6, \\ y_2=2; \end{cases} \begin{cases} x_3=3, \\ y_3=5. \end{cases}$$

*Ответ:* (1; 7), (6; 2), (3; 5).

$$7.280. \begin{cases} 2(\log_{1/y} x - 2 \log_{x^2} y) + 5 = 0, \\ xy^2 = 32. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ 0 < y \neq 1. \end{cases}$$

В первом уравнении системы перейдем к основанию 2, а второе прологарифмируем по основанию 2. Имеем

$$\begin{cases} 2\left(-\frac{\log_2 x}{\log_2 y} - \frac{\log_2 y}{\log_2 x}\right) + 5 = 0, \\ \log_2 x + 2 \log_2 y = 5 \end{cases} \Rightarrow \log_2 x = 5 - 2 \log_2 y,$$

$$2\left(\frac{2 \log_2 y - 5}{\log_2 y} + \frac{\log_2 y}{2 \log_2 y - 5}\right) + 5 = 0 \Leftrightarrow 4 \log_2^2 y - 13 \log_2 y + 10 = 0.$$

Решая уравнение как квадратное относительно  $\log_2 y$ , найдем

$$\log_2 y = \frac{5}{4}, \quad y_1 = 2^{5/4}, \text{ или } \log_2 y = 2, \quad y_2 = 4.$$

$$\text{Тогда } \log_2 x = \frac{5}{2}, \quad x_1 = 2^{5/2}; \quad \log_2 x = 1, \quad x_2 = 2.$$

*Ответ:* (2; 4),  $(4\sqrt{2}; 2^4\sqrt{2})$ .

$$7.281. \begin{cases} y \cdot x^{\log_y x} = x^{2,5}, \\ \log_3 y \cdot \log_y (y - 2x) = 1. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ 0 < y \neq 1. \end{cases}$$

Прологарифмируем первое уравнение системы по основанию 3, имеем

$$\begin{aligned} \log_3(y \cdot x^{\log_y x}) &= \log_3 x^{2,5} \Leftrightarrow \log_3 y + \log_3 x^{\log_y x} = 2,5 \log_3 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_3 y + \log_y x \log_3 x = 2,5 \log_3 x. \end{aligned}$$

Перейдем в первом и втором уравнениях системы к основанию 3. Имеем

$$\begin{cases} \log_3 y + \frac{\log_3 x}{\log_3 y} \cdot \log_3 x = 2,5 \log_3 x, \\ \frac{\log_3 y \cdot \log_3(y-2x)}{\log_3 y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3^2 y + \log_3^2 x = 2,5 \log_3 x \log_3 y, \\ \log_3(y-2x) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3^2 y - 2,5 \log_3 x \cdot \log_3 y + \log_3^2 x = 0.$$

Решаем его как квадратное относительно  $\log_3 y$ , и находим  $\log_3 y = \frac{1}{2} \log_3 x$ , откуда  $y_1 = \sqrt{x}$ , или  $\log_3 y = 2 \log_3 x$ , откуда  $y_2 = x^2$ .

Из второго уравнения этой системы получим  $y - 2x = 3$ ,  $x = \frac{y-3}{2}$ . Тогда заданная система уравнений равносильна следующим:

$$1) \begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ x = \frac{y-3}{2}; \end{cases} \text{ не имеет решений;}$$

$$2) \begin{cases} y = x^2, \\ x = \frac{y-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 9, \end{cases} \text{ учитывая ОДЗ.}$$

Ответ: (3; 9).

$$7.282. \begin{cases} \lg(x-3) - \lg(5-y) = 0, \\ 4^{-1} \cdot \sqrt[3]{4^x} - 8\sqrt[3]{8^y} = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 3, \\ 0 \neq y < 5. \end{cases}$$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \lg \frac{x-3}{5-y} = 0, \\ 2^{-2+\frac{2x}{y}} = 2^{3+\frac{3y}{x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{5-y} = 1, \\ \frac{2x}{y} - 2 = 3 + \frac{3y}{x} \end{cases} \Rightarrow x = 8 - y,$$

$$\frac{2(8-y)}{y} - 5 - \frac{3y}{8-y} = 0 \Leftrightarrow y^2 - 18y + 32 = 0, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 16.$$

Тогда  $x_1 = 6$ ,  $x_2 = -8$ .

$$\begin{cases} x_2 = -8, \\ y_2 = 16 \end{cases} \text{ не подходит по ОДЗ.}$$

Ответ: (6; 2).

$$7.283. \begin{cases} \log_x(3x+2y) = 2, \\ \log_y(2x+3y) = 2. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ 0 < y \neq 1, \\ 3x+2y > 0, \\ 2x+3y > 0. \end{cases}$$

Преобразуем систему с учетом ОДЗ

$$\begin{cases} 3x+2y = x^2, \\ 2x+3y = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2-3x}{2}, \\ 2x+3y-y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^2-3x}{2},$$

$$2x + \frac{3(x^2-3x)}{2} = \left(\frac{x^2-3x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-5) = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 5,$$

тогда  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = -1$ ,  $y_3 = 5$ .  $\begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = 2 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = -1 \end{cases}$  не подходят по ОДЗ.

Ответ: (5; 5).

$$7.284. \begin{cases} x + y = 12, \\ 2(2 \log_{y^2} x - \log_{|x} y) = 5. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ 0 < y \neq 1. \end{cases}$$

Во втором уравнении системы перейдем к основанию  $y$ . Имеем

$$2 \left( \log_y x + \frac{1}{\log_y x} \right) = 5 \Leftrightarrow 2 \log_y^2 x - 5 \log_y x + 2 = 0 \Rightarrow \log_y x = \frac{1}{2} \text{ или}$$

$\log_y x = 2$ . Далее получаем:

$$1) \log_y x = 2 \Leftrightarrow x = y^2. \text{ Из первого уравнения системы } y^2 + y - 12 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y_1 = 3, y_2 = -4 \text{ не подходит по ОДЗ, } x_1 = 9;$$

$$2) \log_y x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x^2. \text{ Из первого уравнения системы } x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_3 = 3, x_4 = -4 \text{ не подходит по ОДЗ, } y_3 = 9.$$

*Ответ:* (3; 9), (9; 3).

$$7.285. \begin{cases} x^{x^2 - y^2 - 16} = 1, \\ x - y = 2 \end{cases} \quad (x > 0).$$

*Решение.*

Первое уравнение равносильно двум уравнениям:  $x = 1$  или  $x^2 - y^2 - 16 = 0$  при  $x > 0$ . Тогда система уравнений равносильна двум системам:

$$1) \begin{cases} x = 1, \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 - y^2 - 16 = 0, \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

*Ответ:* (1; -1), (5; 3).

$$7.286. \begin{cases} \lg \sqrt{(x+y)^2} = 1, \\ \lg y - \lg |x| = \lg 2. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0, \\ x \neq 0, \\ x + y \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{Запишем систему уравнений в виде } \begin{cases} \lg|x+y|=1, \\ \lg \frac{y}{|x|} = \lg 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y|=10, \\ \frac{y}{|x|} = 2. \end{cases}$$

Данная система уравнений равносильна четырем системам:

$$1) \begin{cases} x < 0, \\ y < -x, \\ x + y = -10, \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ y < -x, \\ x - 2x = -10, \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ y < -x, \\ x = 10, \\ y = -20, \end{cases} \text{ не подходит;}$$

$$2) \begin{cases} x < 0, \\ y > -x, \\ x + y = 10, \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ y > -x, \\ x = -10, \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ y > -x, \\ x = -10, \\ y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10, \\ y = 20; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x > 0, \\ y > -x, \\ x + y = 10, \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > -x, \\ x = \frac{10}{3}, \\ y = \frac{20}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3}, \\ y = \frac{20}{3}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x > 0, \\ y < -x, \\ x + y = -10, \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y < -x, \\ x = -\frac{10}{3}, \\ y = -\frac{20}{3} \end{cases}, \text{ не подходит.}$$

$$\text{Ответ: } (-10; 20), \left(\frac{10}{3}; \frac{20}{3}\right).$$

$$7.287. \begin{cases} 4^x - 7 \cdot 2^{x-0,5y} = 2^{3-y}, \\ y - x = 3. \end{cases}$$

*Решение.*

Из второго уравнения системы найдем  $y = x + 3$ . Тогда

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 7 \cdot 2^{x-0,5(x+3)} &= 2^{3-x-3} \Leftrightarrow 2^{2x} - 7 \cdot 2^{0,5x-1,5} = 2^{-x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^{3x} - \frac{7 \cdot 2^{1,5x}}{2^{1,5}} &= 1 \Leftrightarrow 2^{1,5} \cdot 2^{3x} - 7 \cdot 2^{1,5x} - 2^{1,5} = 0. \end{aligned}$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $2^{1,5x}$ , имеем  $2^{1,5x} = -2^{-1,5}$ , нет решений, или  $2^{1,5x} = 2^{1,5} \Rightarrow x = 1$ . Тогда  $y = 4$ .

*Ответ:* (1; 4).

$$7.288. \begin{cases} 5^{\sqrt{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 200, \\ 5^{2\sqrt{x}} + 2^{2\sqrt{y}} = 689. \end{cases}$$

*Решение.*

ОДЗ:  $y \geq 0$ .

Перепишем второе уравнение системы в виде

$$\begin{aligned} \left(5^{\sqrt{x}} + 2^{\sqrt{y}}\right)^2 - 2 \cdot 5^{\sqrt{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} &= 689 \Rightarrow \left(5^{\sqrt{x}} + 2^{\sqrt{y}}\right)^2 = 1089 \Rightarrow \\ \Rightarrow 5^{\sqrt{x}} + 2^{\sqrt{y}} &= -33 \text{ (не имеет решений)} \text{ или } 5^{\sqrt{x}} + 2^{\sqrt{y}} = 33. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{cases} 5^{\sqrt{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 200, \\ 5^{\sqrt{x}} + 2^{\sqrt{y}} = 33 \end{cases} \Rightarrow 2^{\sqrt{y}} = 33 - 5^{\sqrt{x}}, \left(5^{\sqrt{x}}\right)^2 - 33 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 200 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $5^{\sqrt{x}}$ , найдем  $5^{\sqrt{x}} = 8$ , откуда  $\sqrt[3]{x} = \log_5 8$ ,  $x_1 = 27 \log_5^3 2$ , или  $5^{\sqrt{x}} = 5^2$ , откуда  $\sqrt[3]{x} = 2$ ,  $x_2 = 8$ . Тогда  $y_1 = 4 \log_2^2 5$ ,  $y_2 = 9$ .

*Ответ:*  $(27 \log_5^3 2; 4 \log_2^2 5)$ , (8; 9).

$$7.289. \begin{cases} 10^{\lg 0,5(x^2+y^2)+1,5} = 100\sqrt{10}, \\ \frac{\sqrt{x^2+10y}}{3} = \frac{6}{2\sqrt{x^2+10y}-9}. \end{cases}$$



*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0, \\ 2\sqrt{x^2 + 10y} - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем первое уравнение системы в виде

$$\begin{aligned} 10^{\lg 0,5(x^2 + y^2) + 1,5} = 10^{2,5} &\Leftrightarrow \lg 0,5(x^2 + y^2) + 1,5 = 2,5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lg 0,5(x^2 + y^2) = 1 &\Leftrightarrow 0,5(x^2 + y^2) = 10 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 20. \end{aligned}$$

Из второго уравнения исходной системы получаем

$$2\left(\sqrt{x^2 + 10y}\right)^2 - 9\sqrt{x^2 + 10y} - 18 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\sqrt{x^2 + 10y}$ , имеем  $\sqrt{x^2 + 10y} = -4$  (нет решений), или  $\sqrt{x^2 + 10y} = 6$ ,  $x^2 + 10y = 36$ . Система принимает вид

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x^2 + 10y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x^2 = 36 - 10y \end{cases} \Rightarrow x^2 = 36 - 10y, y^2 - 10y + 16 = 0,$$

откуда  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 8$ . Тогда  $x^2 = 16$ ,  $x_{1,2} = \pm 4$ , или  $x^2 = -44$  не подходит.

*Ответ:*  $(-4; 2)$ ,  $(4; 2)$ .

$$7.290. \begin{cases} y^x = 1,5 + y^{-x}, \\ y^{2,5+x} = 64 \quad (y > 0) \end{cases}$$

*Решение.*

Умножим первое уравнение на  $y^x$ , имеем  $y^{2x} - 1,5y^x - 1 = 0$ . Решая это уравнение как квадратное относительно  $y^x$ , получим  $y^x = -\frac{1}{2}$  (нет решений), или  $y^x = 2$ . Из второго уравнения системы  $y^{2,5} \cdot y^x = 64 \Rightarrow y^{2,5} \cdot 2 = 64$ ,  $y^{2,5} = 32$ ,  $y = 4$ . Таким образом,  $4^x = 2$ ,  $x = \frac{1}{2}$ .

*Ответ:*  $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ .

$$7.291. \begin{cases} \lg(x+y) - \lg 5 = \lg x + \lg y - \lg 6, \\ \frac{\lg x}{\lg(y+6) - (\lg y + \lg 6)} = -1. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y \neq \frac{6}{5}, \\ y > -6. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$\begin{cases} \lg \frac{x+y}{5} = \lg \frac{xy}{6}, \\ \lg x = \lg \frac{6y}{y+6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{5} = \frac{xy}{6}, \\ x = \frac{6y}{y+6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\frac{6y}{y+6} + y}{5} = \frac{y^2}{y+6}, \\ x = \frac{6y}{y+6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3, \\ x = \frac{6 \cdot 3}{3+6} = 2. \end{cases}$$

Ответ: (2; 3).

$$7.292. \begin{cases} \log_{xy} \frac{y}{x} - \log_y^2 x = 1, \\ \log_2(y-x) = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < x \neq \frac{1}{y}, \\ 0 < y \neq 1, \\ y > x. \end{cases}$$

В первом уравнении системы перейдем к основанию  $y$ :

$$\frac{\log_y \frac{y}{x}}{\log_y xy} - \log_y^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - \log_y x}{1 + \log_y x} - \log_y^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_y^3 x + \log_y^2 x + 2\log_y x = 0 \Leftrightarrow \log_y x (\log_y^2 x + \log_y x + 2) = 0,$$

откуда  $\log_y x = 0$ ,  $x = y^0 = 1$ ,  $\log_y^2 x + \log_y x + 2 \neq 0$ . Из второго уравнения получаем  $y - x = 2$ . Отсюда  $y = 3$ .

Ответ: (1; 3).

$$7.293. \begin{cases} (x+y)^x = (x-y)^y, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x \neq \pm y. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы имеем  $\log_2 \frac{x}{y} = 1$ , откуда  $\frac{x}{y} = 2$ ,

$x = 2y$ . Тогда из первого уравнения системы получим  $(3y)^{2y} = y^y$ ,

$$(9y^2)^y = y^y, \text{ откуда } 9y^2 = y, y = \frac{1}{9}, x = 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

$$\text{Ответ: } \left( \frac{2}{9}; \frac{1}{9} \right).$$

$$7.294. \begin{cases} x^{x-2y} = 36, \\ 4(x-2y) + \log_6 x = 9 \end{cases} \text{ (найти только целочисленные решения).}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } 0 < x \neq 1.$$

Логарифмируя обе части первого уравнения системы по основанию 6, имеем

$$\log_6 x^{x-2y} = \log_6 36 \Leftrightarrow (x-2y)\log_6 x = 2.$$

Система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} (x-2y)\log_6 x = 2, \\ 4(x-2y) + \log_6 x = 9 \end{cases} \Rightarrow \log_6 x = 9 - 4(x-2y),$$

$$(x-2y)(9-4(x-2y)) = 2 \Leftrightarrow 4(x-2y)^2 - 9(x-2y) + 2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $x - 2y$ , получим

$x - 2y = \frac{1}{8}$  или  $x - 2y = 2$ . Отсюда  $\log_6 x = 7$ ,  $x_1 = 6^7$  или  $\log_6 x = 1$ ,  
 $x_2 = 6$ .

Если  $x_1 = 6^7$ , то  $y_1 = \frac{6^7}{2} - \frac{1}{10}$  не является целым. При  $x_2 = 6$  получим

$y_2 = 2$  из уравнения  $x - 2y = 2$ .

*Ответ:* (6; 2).

## ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

**Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad (8.1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \quad (8.2)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z; \quad (8.3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z; \quad (8.4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \quad (8.5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z. \quad (8.6)$$

(Здесь и в дальнейшем запись  $n \in Z$  означает, что  $n$  – любое целое число).

### Значения тригонометрических функций некоторых углов

Для некоторых углов можно записать точные выражения их тригонометрических величин (табл. 8.1), а также знаки функций по четвертям (табл. 8.2).

Таблица 8.1

| Аргумент<br>( $\alpha$ , градусы,<br>радианы) | Функции                               |                                       |  |  |
|---|---------------------------------------|---------------------------------------|--|--|
|   | $\sin \alpha$                         | $\cos \alpha$                         | $\operatorname{tg} \alpha$               | $\operatorname{ctg} \alpha$              |
| $0^\circ (0)$                                 | 0                                     | 1                                     | 0  | $\infty$ (не<br>определен)               |
| $15^\circ \left(\frac{\pi}{12}\right)$        | $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$        | $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$        | $2-\sqrt{3}$                             | $2+\sqrt{3}$                             |
| $18^\circ \left(\frac{\pi}{10}\right)$        | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$                | $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$ |
| $30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$         | $\frac{1}{2}$                         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$                  | $\frac{1}{\sqrt{3}}$                     | $\sqrt{3}$                               |
| $36^\circ \left(\frac{\pi}{5}\right)$         | $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$                | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ |
| $45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$         | $\frac{1}{\sqrt{2}}$                  | $\frac{1}{\sqrt{2}}$                  | 1  | 1  |
| $54^\circ \left(\frac{3\pi}{10}\right)$       | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$                | $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$ |
| $60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\right)$         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$                  | $\frac{1}{2}$                         | $\sqrt{3}$                               | $\frac{1}{\sqrt{3}}$                     |
| $75^\circ \left(\frac{5\pi}{12}\right)$       | $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$        | $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$        | $2+\sqrt{3}$                             | $2-\sqrt{3}$                             |
| $90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$         | 1                                     | 0                                     | $\infty$ (не<br>определен)               | 0  |

| Четверть | Функции       |               |                            |                             |
|----------|---------------|---------------|----------------------------|-----------------------------|
|          | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ |
| I        | +             | +             | +                          | +                           |
| II       | +             | -             | -                          | -                           |
| III      | -             | -             | +                          | +                           |
| IV       | -             | +             | -                          | -                           |

### Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ; \quad (8.7)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta ; \quad (8.8)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta ; \quad (8.9)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta ; \quad (8.10)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} ; \quad (8.11)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} ; \quad (8.12)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} ; \quad (8.13)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} . \quad (8.14)$$

### Формулы двойных и тройных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha ; \quad (8.15)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha ; \quad (8.16)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} ; \quad (8.17)$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \alpha \neq \pi n, n \in Z; \quad (8.18)$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad (8.19)$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \quad (8.20)$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), n \in Z; \quad (8.21)$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, n \in Z. \quad (8.22)$$

### Формулы половинного аргумента

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \quad (8.23)$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}; \quad (8.24)$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), n \in Z; \quad (8.25)$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \alpha \neq 2\pi n, n \in Z; \quad (8.26)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in Z; \quad (8.27)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in Z; \quad (8.28)$$



**Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение**

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (8.29)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (8.30)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (8.31)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}; \quad (8.32)$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha); \quad (8.33)$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha); \quad (8.34)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), n \in \mathbb{Z}; \quad (8.35)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), n \in \mathbb{Z}; \quad (8.36)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (8.37)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (8.38)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (8.39)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (8.40)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; \quad (8.41)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -2 \operatorname{ctg} 2\alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; \quad (8.42)$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad (8.43)$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \quad (8.44)$$

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right); \quad (8.45)$$

$$1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right); \quad (8.46)$$

$$1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos 45^\circ \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha)}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad (8.47)$$

$$1 - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\cos 45^\circ \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad (8.48)$$

$$1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad (8.49)$$

$$1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad (8.50)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1 = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \quad n \in Z; \quad (8.51)$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad (8.52)$$

$$1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z; \quad (8.53)$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad (8.54)$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \quad n \in Z; \quad (8.55)$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \quad (8.56)$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z; \quad (8.57)$$

### Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)); \quad (8.58)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)); \quad (8.59)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)); \quad (8.60)$$

$$\begin{aligned} & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \\ & = \frac{1}{4} (\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)); \end{aligned} \quad (8.61)$$

$$\begin{aligned} & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \\ & = \frac{1}{4} (\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta + \gamma)); \end{aligned} \quad (8.62)$$

$$\begin{aligned} & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = \\ & = \frac{1}{4} (-\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta + \gamma)); \end{aligned} \quad (8.63)$$

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \\ & = \frac{1}{4} (\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)). \end{aligned} \quad (8.64)$$

**Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента**

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), \quad n \in Z; \quad (8.65)$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), \quad n \in Z; \quad (8.66)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha, \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \quad (8.67)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z. \quad (8.68)$$

**Формулы приведения**

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \cos \alpha, & \sin(\pi \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha, \\ \sin\left(\frac{3}{2} \pi \pm \alpha\right) &= -\cos \alpha, & \sin(2\pi \pm \alpha) &= \pm \sin \alpha; \end{aligned} \right\} \quad (8.69)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \pm \sin \alpha, & \cos(\pi \pm \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \cos\left(\frac{3}{2} \pi \pm \alpha\right) &= \pm \sin \alpha, & \cos(2\pi \pm \alpha) &= \cos \alpha; \end{aligned} \right\} \quad (8.70)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \mp \operatorname{ctg} \alpha, & \alpha \neq \pi n, & n \in Z, \\ \operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) &= \pm \operatorname{tg} \alpha, & \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), & n \in Z, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2} \pi \pm \alpha\right) &= \mp \operatorname{ctg} \alpha, & \alpha \neq \pi n, & n \in Z, \\ \operatorname{tg}(2\pi \pm \alpha) &= \pm \operatorname{tg} \alpha, & \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), & n \in Z; \end{aligned} \right\} \quad (8.71)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \mp \operatorname{tg} \alpha, & \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), & n \in Z, \\ \operatorname{ctg}(\pi \pm \alpha) &= \pm \operatorname{ctg} \alpha, & \alpha \neq \pi n, & n \in Z, \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2} \pi \pm \alpha\right) &= \mp \operatorname{tg} \alpha, & \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), & n \in Z, \\ \operatorname{ctg}(2\pi \pm \alpha) &= \pm \operatorname{ctg} \alpha, & \alpha \neq \pi n, & n \in Z. \end{aligned} \right\} \quad (8.72)$$

## ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

*Тригонометрическим* называется уравнение, в котором неизвестное входит только под знак тригонометрических функций непосредственно или в виде линейной функции неизвестного, причем над тригонометрическими функциями выполняются только алгебраические действия.

### Простейшие тригонометрические уравнения

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида

$$\sin x = m, \quad (8.73)$$

$$\cos x = m, \quad (8.74)$$

$$\operatorname{tg} x = m, \quad (8.75)$$

$$\operatorname{ctg} x = m, \quad (8.76)$$

где  $m$  — любое действительное число.

Решить простейшее тригонометрическое уравнение – значит найти множество всех углов (дуг), имеющих данное значение тригонометрической функции.

Рассмотрим решение простейших тригонометрических уравнений.

1.  $\sin x = m$ . Если  $|m| \leq 1$ , то решения данного уравнения определяются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.77)$$

Если  $|m| > 1$ , то уравнение (8.73) решений не имеет.

2.  $\cos x = m$ . Если  $|m| \leq 1$ , то решения этого уравнения определяются формулой

$$x = \pm \arccos m + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.78)$$

Если  $|m| > 1$ , то уравнение (8.74) решений не имеет.

3.  $\operatorname{tg} x = m$ . При любом действительном  $m$

$$x = \operatorname{arctg} m + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.79)$$

4.  $\operatorname{ctg} x = m$ . При любом действительном  $m$

$$x = \operatorname{arcctg} m + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.80)$$

В частных случаях при  $m = -1$ ,  $m = 0$ ,  $m = 1$  получаются следующие формулы:

$$\sin x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (8.81)$$

$$\sin x = 0; \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (8.82)$$

$$\sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (8.83)$$

$$\cos x = -1; \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (8.84)$$

$$\cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (8.85)$$

$$\cos x = 1; \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (8.86)$$

$$\operatorname{tg} x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (8.87)$$

$$\operatorname{tg} x = 0; \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (8.88)$$

$$\operatorname{tg} x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (8.89)$$

$$\operatorname{ctg} x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (8.90)$$

$$\operatorname{ctg} x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (8.91)$$

$$\operatorname{ctg} x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.92)$$

Тригонометрические уравнения вида  $\sin(ax + b) = m$ ,  $\cos(ax + b) = m$ ,  $\operatorname{tg}(ax + b) = t$ ,  $\operatorname{ctg}(ax + b) = t$ , где  $ax + b$  — линейная функция,  $|m| < 1$ ,  $a \neq 0$ ,  $x, b$  — любые действительные числа, также относятся к простейшим и приводятся к уравнениям (8.73) – (8.76) заменой  $ax + b = y$ .

### Тригонометрические уравнения, содержащие тригонометрические функции одинакового аргумента

Рассмотрим тригонометрические уравнения, рациональные относительно тригонометрических функций.

Пусть имеем

$$R(\sin x, \cos x) = 0, \quad (8.93)$$

где  $R$  — рациональная функция относительно  $\sin x$  и  $\cos x$ .

Данное уравнение приводится к алгебраическому относительно тригонометрической функции одинакового аргумента. Затем, решая получившееся алгебраическое уравнение относительно этой функции, приводят данное уравнение к нескольким простейшим тригонометрическим уравнениям, из которых находят значения неизвестного и проверяют, какие из них являются решениями данного уравнения.

Если  $x \neq (2n + 1)\pi$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ , то каждое тригонометрическое уравнение вида (8.93) можно привести к рациональному уравнению относительно неизвестного  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  с помощью формул (8.65) – (8.68). Решая уравнение таким методом, можно потерять корни вида  $x = (2n + 1)\pi$ , где

$n \in \mathbb{Z}$ , для которых  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  не имеет смысла. Поэтому необходимо проверить, являются ли числа  $x = (2n+1)\pi$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ , корнями исходного уравнения.

Если уравнение (8.93) или приводимое к нему при замене  $x$  на  $\pi - x$  не изменяется, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно  $\sin x$ .

Если уравнение (8.93) или приводимое к нему не изменяется при замене  $x$  на  $-x$ , то его имеет смысл приводить к рациональному относительно  $\cos x$ .

Если уравнение (8.93) или приводимое к нему при замене  $x$  на  $\pi + x$  не изменяется, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно  $\operatorname{tg} x$ .

### Однородные тригонометрические уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

Тригонометрическое уравнение вида

$$a_0 \cos^n x + a_1 \cos^{n-1} x \sin x + a_2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \dots + a_n \sin^n x = 0, \quad (8.94)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — данные числа, а  $n$  — натуральное число, называется однородным уравнением относительно функций  $\sin x$  и  $\cos x$ . Сумма показателей у  $\sin x$  и  $\cos x$  во всех членах такого уравнения одинакова. Эта сумма называется степенью однородности уравнения или показателем однородности.

Уравнение (8.94) является частным случаем уравнения (8.93) и делением обеих своих частей на  $\cos^n x \neq 0$  (или на  $\sin^n x \neq 0$ ) приводится к целому рациональному относительно  $\operatorname{tg} x$  (или  $\operatorname{ctg} x$ ):

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + a_2 \operatorname{tg}^{n-2} x + \dots + a_n = 0$$

или

$$a_0 \operatorname{ctg}^n x + a_1 \operatorname{ctg}^{n-1} x + a_2 \operatorname{ctg}^{n-2} x + \dots + a_n = 0;$$

при этом область определения уравнения сужается на значения  $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$  (или на  $x = \pi n$ ), где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Умножением на тригонометрическую единицу  $(\sin^2 x + \cos^2 x)^k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , можно привести к однородному некоторые уравнения, не



являющиеся однородными. Так, к уравнению вида (8.94) сводится уравнение

$$a_0 \cos^{2n} x + a_1 \cos^{2n-1} x \sin x + a_2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \dots + a_n \sin^n x = b.$$

Для этого нужно умножить  $b$  на тригонометрическую единицу:

$$b \equiv b(\sin^2 x + \cos^2 x)^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Уравнение вида**  $a \sin \omega x + b \cos \omega x = c$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ )

Это уравнение является частным случаем уравнения (8.93), следовательно, его можно решать с помощью универсальной подстановки, а также приводить к однородному.

Укажем еще один способ решения этого уравнения, так называемый способ введения вспомогательного угла. Пусть

$$a \sin \omega x + b \cos \omega x = c \quad (a^2 + b^2 \neq 0). \quad (8.95)$$

Разделим обе его части на  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , тогда

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пусть  $\varphi$  — одно из решений системы

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Воспользовавшись этими равенствами, запишем уравнение в виде

$$\sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Применив формулу  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ , получим урав-

нение  $\sin(\omega x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , которое, как видно из проделанных

выкладок, равносильно исходному уравнению. Если  $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$ , т.е.

$a^2 + b^2 \geq c^2$ , то уравнение имеет решение

$$\omega x + \varphi = (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi n$$

или

$$x = \frac{(-1)^n}{\omega} \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{\varphi}{\omega} + \frac{\pi n}{\omega}, \quad n \in Z.$$

Если  $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| > 1$ , т.е.  $a^2 + b^2 < c^2$ , то уравнение решений не имеет.

### Уравнения, рациональные относительно выражений

$$\sin x \pm \cos x \quad \text{и} \quad \sin x \cdot \cos x$$

Если левая часть тригонометрического уравнения  $f(x) = 0$  содержит лишь одно из выражений  $\sin x + \cos x$  или  $\sin x - \cos x$  и функцию  $\sin 2x$  (или произведение  $\sin x \cos x$ ), то, вводя новое неизвестное  $t = \sin x + \cos x$  или  $t = \sin x - \cos x$  и учитывая, что  $\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$ ,  $\sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2$ , приходим к уравнению относительно  $t$ .

## СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При решении систем тригонометрических уравнений пользуются способом подстановки или сводят системы тригонометрических уравнений к системам алгебраических уравнений. В ряде случаев для решения системы тригонометрических уравнений ее преобразуют с помощью почленного сложения, вычитания, умножения, деления уравнений с целью, например, исключить одно из неизвестных, разложить полученное уравнение на множители и т.д. Решения системы записываются в виде упорядоченных пар  $(x; y)$ .

Решить уравнения (8.176—8.385):

$$8.176. \sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{\sin x \cos x}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \sin x \cos x > 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} \sin^3 x \cdot \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right) + \cos^3 x \cdot \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) &= 2\sqrt{\sin x \cos x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\sin^3 x(\sin x + \cos x)}{\sin x} + \frac{\cos^3 x(\cos x + \sin x)}{\cos x} - 2\sqrt{\sin x \cos x} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 x(\sin x + \cos x) + \cos^2 x(\cos x + \sin x) - 2\sqrt{\sin x \cos x} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sqrt{\sin x \cos x} &= 0, \sin x - \\ - 2\sqrt{\sin x \cos x} + \cos x &= 0, \sin x - 2\sqrt{\sin x \cos x} + \cos x = 0, \\ (\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x})^2 &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x} = 0. \end{aligned}$$

Тогда  $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ , или  $\sin x = \cos x$ ,  $\sin x > 0$ ,  $\cos x > 0$ . Разделив это уравнение на  $\cos x \neq 0$ , получим  $\operatorname{tg} x = 1$ ,  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{\pi}{4}(8k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{4}(8k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.177. \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + \sin x = 4.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos \frac{x}{2} \neq 0, \\ \sin \frac{x}{2} \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1 - \cos x}{2} \cdot \frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{1 + \cos x}{2} \cdot \frac{1 + \cos x}{\sin x} + \sin x = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - 2 \cos x + \cos^2 x + 1 + 2 \cos x + \cos^2 x}{2 \sin x} +$$

$$+ \sin x = 6 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{2 + 2 - 2 \sin^2 x}{2 \sin x} + \sin x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 x} + \frac{2}{\sin x} - \sin x + \sin x - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \sin^2 x - \sin x - 2 = 0 (\sin x \neq 0).$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\sin x$ , получим

$$(\sin x)_1 = -\frac{2}{3}, x_1 = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{2}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$(\sin x)_2 = 1, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2}(4n+1), n \in \mathbb{Z};$$

*Ответ:*  $x_1 = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{2}{3} + \pi k$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{2}(4n+1)$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

**8.178.**  $\operatorname{tg}(120^\circ + 3x) - \operatorname{tg}(140^\circ - x) = 2 \sin(80^\circ + 2x)$ .

*Решение.*

Запишем уравнение в виде  $\operatorname{tg}3(x + 40^\circ) - \operatorname{tg}(180^\circ - (x + 40^\circ)) =$   
 $= 2 \sin 2(x + 40^\circ) \Leftrightarrow \operatorname{tg}3(x + 40^\circ) + \operatorname{tg}(x + 40^\circ) = 2 \sin 2(x + 40^\circ)$ .

По формуле  $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$  и обозначив  $x + 40^\circ = y$ , запишем

$$\frac{\sin 4y}{\cos 3y \cos y} - 2 \sin 2y = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 4y - 2 \sin 2y \cos 3y \cos y}{\cos 3y \cos y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \sin 2y \cos 2y - 2 \sin 2y \cos 3y \cos y}{\cos 3y \cos y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 2y (2 \cos 2y - 2 \cos 3y \cos y)}{\cos 3y \cos y} =$$

$$= 0 \Leftrightarrow \frac{2 \sin y \cos y (2 \cos 2y - 2 \cos 3y \cos y)}{\cos 3y \cos y} = 0, (\cos y \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin y (2 \cos 2y - 2 \cos 3y \cos y)}{\cos 3y} = 0.$$

Так как  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$ , то

$$\frac{\sin y(2 \cos 2y - \cos 2y - \cos 4y)}{\cos 3y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin y(\cos 2y - \cos 4y)}{\cos 3y} = 0.$$

По формуле  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$  получаем

$$\frac{-2 \sin y \sin 3y \sin y}{\cos 3y} = 0, \quad \frac{\sin^2 y \sin 3y}{\cos 3y} = 0 \Rightarrow \sin y = 0,$$

или  $\sin 3y = 0$  ( $\cos 3y \neq 0$ ).

Решения уравнения  $\sin y = 0$  входят в решения уравнения

$$\sin 3y = 0 \quad (\sin 3y = 3 \sin y - 4 \sin^3 y = \sin y(3 - 4 \sin^2 y)),$$

откуда  $3y = 180^\circ k$ ,  $y = 60^\circ k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x + 40^\circ = 60^\circ k$ ,  $x = -40^\circ + 60^\circ k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x = -40^\circ + 60^\circ k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**8.179.**  $\sin^2 x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x = 0.$

*Решение.*

ОДЗ:  $\sin x \neq 0$ .

По формуле  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$  запишем

$$\sin^2 x + 1 - \cos x - \sin x(1 - \cos x) + \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 1 - \cos x - \sin x + \sin x \cos x + \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + \sin x - \sin x \cos x - \sin^2 x + \sin^2 x \cos x + \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin^3 x + \sin^2 x \cos x) + (\sin x + \cos x) - (\sin x \cos x + \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x) - \sin x (\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x = -1,$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k - 1), \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \sin^2 x - \sin x + 1 \neq 0 \quad (D < 0).$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4}(4k - 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.180. \frac{\cos^2 z(1 + \operatorname{ctg} z) - 3}{\sin z - \cos z} = 3 \cos z.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin z \neq 0, \\ \sin z - \cos z \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\cos^2 z \left( 1 + \frac{\cos z}{\sin z} \right) - 3 = 3 \cos z (\sin z - \cos z) \Leftrightarrow \frac{\cos^2 z (\sin z + \cos z)}{\sin z} -$$

$$- 3 - 3 \cos z (\sin z - \cos z) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 z \sin z + \cos^3 z - 3 \sin z -$$

$$- 3 \cos z \sin^2 z + 3 \cos^2 z \sin z = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^2 z \sin z + \cos^3 z -$$

$$- 3 \sin z (\cos^2 z + \sin^2 z) - 3 \cos z \sin^2 z = 0 \Leftrightarrow \cos^2 z \sin z + \cos^3 z -$$

$$- 3 \sin^3 z - 3 \cos z \sin^2 z = 0 \Leftrightarrow \cos^2 z (\sin z + \cos z) -$$

$$- 3 \sin^2 z (\cos z + \sin z) = 0 \Leftrightarrow (\sin z + \cos z) (\cos^2 z - 3 \sin^2 z) = 0.$$

Отсюда или  $\sin z + \cos z = 0$ , или  $\cos^2 z - 3 \sin^2 z = 0$ . Разделив первое уравнение на  $\sin z \neq 0$ , а второе на  $\sin^2 z \neq 0$ , получим

$$\operatorname{ctg} z = -1, \quad z_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{4}(4n - 1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

или

$$\operatorname{ctg}^2 z = 3, \quad \operatorname{ctg} z = \pm \sqrt{3}, \quad z_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } z_1 = \frac{\pi}{4}(4n - 1); \quad z_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad \text{где } n \text{ и } k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.181. \frac{1}{2 \operatorname{ctg}^2 t + 1} + \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 t + 1} = \frac{15 \cos 4t}{8 + \sin^2 2t}.$$

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin t \neq 0, \\ \cos t \neq 0. \end{cases}$$

По формулам

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\frac{1}{\frac{2(1+\cos 2t)}{1-\cos 2t}+1} + \frac{1}{\frac{2(1-\cos 2t)}{1+\cos 2t}+1} = \frac{15(2\cos^2 2t-1)}{8+1-\cos^2 2t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 2t)(3-\cos 2t) + (1+\cos 2t)(3+\cos 2t) = 30\cos^2 2t - 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - 3\cos 2t - \cos 2t + \cos^2 2t + 3 + 3\cos 2t + \cos 2t +$$

$$+ \cos^2 2t - 30\cos^2 2t + 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21 - 28\cos^2 2t = 0, \quad 4\cos^2 2t = 3, \quad \cos^2 2t = \frac{3}{4}, \quad \cos 2t = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$2t = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad t = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}(6k \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $t = \frac{\pi}{12}(6k \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}$ .

**8.182.**  $8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$ .

Решение.

Перепишем уравнение в виде  $8(\cos^2 x)^2 - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$ .

$$8\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 - 4(1+\cos 2x) - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1+\cos 2x)^2 -$$

$$-4(1+\cos 2x) - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4\cos 2x + 2\cos^2 2x - 4 - 4\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin \frac{4x+x}{2} \sin \frac{x-4x}{2} = 0, \quad -\sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2} = 0.$$

Отсюда или

$$\sin \frac{5x}{2} = 0, \quad \frac{5x}{2} = \pi n, \quad x_1 = \frac{2}{5}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

или

$$\sin \frac{3x}{2} = 0, \quad \frac{3x}{2} = \pi k, \quad x_2 = \frac{2}{3}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x_1 = \frac{2}{5}\pi n; \quad x_2 = \frac{2}{3}\pi k$ , где  $n$  и  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.183. \frac{6 \cos^3 2t + 2 \sin^3 2t}{3 \cos 2t - \sin 2t} = \cos 4t.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } 3 \cos 2t - \sin 2t \neq 0.$$

Из условия имеем

$$\frac{6 \cos^3 2t + 2 \sin^3 2t}{3 \cos 2t - \sin 2t} - \cos^2 2t + \sin^2 2t = 0.$$

$$6 \cos^3 2t + 2 \sin^3 2t - 3 \cos^3 2t + 3 \cos 2t \sin^2 2t + \sin 2t \cos^2 2t - \sin^3 2t = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (3 \cos^3 2t + 3 \cos 2t \sin^2 2t) + (\sin^3 2t + \sin 2t \cos^2 2t) = 0 \Leftrightarrow 3 \cos 2t (\cos^2 2t + \\ + \sin^2 2t) + \sin 2t (\sin^2 2t + \cos^2 2t) = 0, 3 \cos 2t + \sin 2t = 0. \operatorname{tg} 2t = -3,$$

$$2t = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k, \quad t = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } t = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.184. \cos z \cos 2z \cos 4z \cos 8z = \frac{1}{16}.$$

*Решение.*

Умножив обе части уравнения на  $16 \sin z \neq 0$ , имеем

$$8(2 \sin z \cos z) \cos 2z \cos 4z \cos 8z = \sin z \Leftrightarrow 8 \sin 2z \cos 2z \cos 4z \cos 8z = \sin z,$$

$$4(2 \sin 2z \cos 2z) \cos 4z \cos 8z = \sin z, \quad 4 \sin 4z \cos 4z \cos 8z = \sin z,$$

$$2(2 \sin 4z \cos 4z) \cos 8z = \sin z, \quad 2 \sin 8z \cos 8z = \sin z,$$

$$\sin 16z - \sin z = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{16z+z}{2} \sin \frac{16z-z}{2} = 0, \quad \cos \frac{17z}{2} \sin \frac{15z}{2} = 0.$$

$$\text{Отсюда или } \cos \frac{17z}{2} = 0, \quad \frac{17z}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad z_1 = \frac{\pi}{17} + \frac{2}{17} \pi k = \frac{\pi}{17} (2k+1),$$

$$k \in \mathbb{Z}, \text{ или } \sin \frac{15z}{2} = 0, \quad \frac{15z}{2} = \pi k, \quad z_2 = \frac{2}{15} \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из совокупности значений  $z_2 = \frac{2}{15} \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ , нужно исключить те значения  $z$ , для которых  $\sin z = 0$ , т.е.  $z = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ , получающиеся при  $k = 15n$ . Аналогично, из совокупности значений  $z_1 = \frac{\pi}{17} (2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$ ,



исключаем значения  $z = \pi l, l \in \mathbb{Z}$ , получающиеся при  $2k+1=17$ ;  $2k+1=51$ ;  $2k+1=85$ ; ..., или  $k=8$ ;  $k=25$ ;  $k=42$ ; .... т.е.  $k=8+17l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Таким образом, для исходного уравнения находим следующую совокупность решений:

$$z_1 = \frac{2\pi k}{15}, k \neq 15l, k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z},$$

или

$$z_2 = \frac{\pi}{17}(2k+1), k \neq 17l+8, k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $z_1 = \frac{2\pi k}{15}, k \neq 15l, z_2 = \frac{\pi}{17}(2k+1), k \neq 17l+8, k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}$ .

8.185. 
$$\frac{\sin^3 \frac{x}{2} - \cos^3 \frac{x}{2}}{2 + \sin x} = \frac{1}{3} \cos x.$$

*Решение.*

Из условия получаем:

$$\frac{\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right)}{2 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} - \frac{1}{3} \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) \left(1 + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)}{2 \left(1 + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)} + \frac{\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) \times$$

$$\times \left(3 + 2 \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2}\right) = 0.$$

Имеем:

1)  $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0$ . Разделив первое уравнение на  $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ , найдем

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} (4k+1), k \in \mathbb{Z}.$$

2)  $3 + 2 \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 2\left(\frac{x}{4}\right) + 2 \cos 2\left(\frac{x}{4}\right) + 3 \left(\cos^2 \frac{x}{4} + \sin^2 \frac{x}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} + 2\left(\cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4}\right) + 3\left(\cos^2\frac{x}{4} + \sin^2\frac{x}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin^2\frac{x}{4} + 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} + 5\cos^2\frac{x}{4} = 0.$$

Делим уравнение на  $\cos^2\frac{x}{4} \neq 0$ . Имеем  $\operatorname{tg}^2\frac{x}{4} + 4\operatorname{tg}\frac{x}{4} + 5 = 0$ . В полученном квадратном уравнении  $D < 0$ ,  $\emptyset$ .

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1), k \in \mathbb{Z}$ .

**8.186.**  $\operatorname{tg}^2 t - \frac{2\sin 2t + \sin 4t}{2\sin 2t - \sin 4t} = 2\operatorname{ctg} 2t.$

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} \cos t \neq 0, \\ \sin t \neq 0, \\ 2\sin 2t - \sin 4t \neq 0. \end{cases}$

Из условия имеем:

$$\operatorname{tg}^2 t - \frac{2\sin 2t + 2\sin 2t \cos 2t}{2\sin 2t - 2\sin 2t \cos 2t} - 2\operatorname{ctg} 2t = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 t - \frac{2\sin 2t(1 + 2\cos 2t)}{2\sin 2t(1 - \cos 2t)} - 2\operatorname{ctg} 2t = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 t - \frac{1 + \cos 2t}{1 - \cos 2t} - 2\operatorname{ctg} 2t = 0.$$

Так как  $\frac{1 + \cos 2t}{1 - \cos 2t} = \operatorname{ctg} t$ , то

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 t - \operatorname{ctg}^2 t - 2\operatorname{ctg} 2t = 0 &\Leftrightarrow \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} - \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} - 2\operatorname{ctg} 2t = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\sin^4 t - \cos^4 t}{\sin^2 t \cos^2 t} - 2\operatorname{ctg} 2t = 0 &\Leftrightarrow \frac{(\sin^2 t + \cos^2 t)(\sin^2 t - \cos^2 t)}{\sin^2 t \cos^2 t} - 2\operatorname{ctg} 2t = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\sin^2 t \cos^2 t} - 2\operatorname{ctg} 2t = 0 &\Leftrightarrow \frac{4\cos 2t}{\sin^2 2t} + \frac{2\cos 2t}{\sin 2t} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{2\cos 2t}{\sin 2t} \left( \frac{2}{\sin 2t} + 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

1)  $\cos 2t = 0, 2t = \frac{\pi}{2} + \pi k, t_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{4}(2k + 1), k \in \mathbb{Z}$

$$2) \frac{2}{\sin 2t} + 1 = 0, \quad \sin 2t = -2, \quad \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } t = \frac{\pi}{4}(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.187. \quad \sin^2 x \operatorname{tg} x + \cos^2 x \operatorname{ctg} x + 2 \sin x \cos x = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos x} + \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin x} + 2 \sin x \cos x - \frac{4\sqrt{3}}{3} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin x \cos x} + 2 \sin x \cos x - \frac{4\sqrt{3}}{3} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin x \cos x} + 2 \sin x \cos x - \frac{4\sqrt{3}}{3} &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin x \cos x} + 2 \sin x \cos x - \frac{4\sqrt{3}}{3} &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} - \\ - 2 \sin x \cos x + 2 \sin x \cos x - \frac{4\sqrt{3}}{3} &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2 \sin x \cos x} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.188. \quad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{ctg}(x + 25^\circ) = \operatorname{ctg} 15^\circ \operatorname{ctg}(x + 25^\circ) \operatorname{ctg} x.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \sin(x + 25^\circ) \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} + \frac{\cos(x + 25^\circ)}{\sin(x + 25^\circ)} - \frac{\cos 15^\circ \cos(x + 25^\circ) \cos x}{\sin 15^\circ \sin(x + 25^\circ) \sin x} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\cos x \sin 15^\circ \sin(x+25^\circ) - \cos 15^\circ \cos(x+25^\circ) \cos x) + \\ &+ (\cos 15^\circ \sin x \sin(x+25^\circ) + \cos(x+25^\circ) \sin x \sin 15^\circ) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\cos x (\cos 15^\circ \cos(x+25^\circ) - \sin 15^\circ \sin(x+25^\circ)) + \\ &+ \sin x (\sin(x+25^\circ) \cos 15^\circ + \cos(x+25^\circ) \sin 15^\circ) = 0. \end{aligned}$$

Так как

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta), \quad \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta),$$

то

$$-\cos x \cos(15^\circ + x + 25^\circ) + \sin x \sin(x + 25^\circ + 15^\circ) = 0 \Leftrightarrow -\cos(2x + 40^\circ) = 0,$$

$$2x + 40^\circ = 90^\circ + 180^\circ k, \quad x = 25^\circ + 90^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = 25^\circ + 90^\circ k, k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.189. \frac{40 \left( \sin^3 \frac{t}{2} - \cos^3 \frac{t}{2} \right)}{16 \sin \frac{t}{2} - 25 \cos \frac{t}{2}} = \sin t.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } 16 \sin \frac{t}{2} - 25 \cos \frac{t}{2} \neq 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{40 \left( \sin^3 \frac{t}{2} - \cos^3 \frac{t}{2} \right)}{16 \sin \frac{t}{2} - 25 \cos \frac{t}{2}} - 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = 0 \Rightarrow 20 \left( \sin^3 \frac{t}{2} - \cos^3 \frac{t}{2} \right) - \\ &- \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \left( 16 \sin \frac{t}{2} - 25 \cos \frac{t}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \left( 20 \sin^3 \frac{t}{2} - 16 \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) + \\ &+ \left( 25 \sin \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} - 20 \cos^3 \frac{t}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow 4 \sin^2 \frac{t}{2} \left( 5 \sin \frac{t}{2} - 4 \cos \frac{t}{2} \right) + 5 \cos^2 \frac{t}{2} \times \\ &\times \left( 5 \sin \frac{t}{2} - 4 \cos \frac{t}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \left( 5 \sin \frac{t}{2} - 4 \cos \frac{t}{2} \right) \left( 4 \sin^2 \frac{t}{2} + 5 \cos^2 \frac{t}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда 1)  $5 \sin \frac{t}{2} - 4 \cos \frac{t}{2} = 0$ , 2)  $4 \sin^2 \frac{t}{2} + 5 \cos^2 \frac{t}{2} = 0$ . Разделив пер-

вое уравнение на  $\cos \frac{t}{2} \neq 0$ , а второе на  $\cos^2 \frac{t}{2} \neq 0$ , будем иметь  $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{4}{5}$ ,

$$\frac{t}{2} = \operatorname{arctg} \frac{4}{5} + \pi k, \quad t_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{5} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} = -\frac{5}{4}, \quad \emptyset.$$

Ответ:  $t = 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.190. \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin^2 x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) - \sin \left( \frac{\pi}{4} - 3x \right) \right).$$

*Решение.*

ОДЗ:  $\sin x \neq 0$ .

Так как  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ , то получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - 2 \sin^2 x}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \\ & = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} - x - \frac{\pi}{4} + 3x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{4} - x - \frac{\pi}{4} + 3x}{2} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{(2 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) \sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{2} \sin x \cos \left( \frac{\pi}{4} - 2x \right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\sin 2x + \cos 2x) \sin x = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \cos 2x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\sin 2x + \cos 2x) \sin x - \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\sin 2x + \cos 2x) \sin x - (\cos 2x + \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\sin 2x + \cos 2x)(\sin x - 1) = 0 \end{aligned}$$

Отсюда или  $\sin 2x + \cos 2x = 0$ , или  $\sin x - 1 = 0$ . Разделив первое уравнение на  $\sin 2x \neq 0$ , имеем

$$\operatorname{ctg} 2x = -1, \quad 2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad x_1 = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{8}(4k + 3), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Из второго уравнения получаем  $\sin x = 1$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi}{8}(4k + 3)$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.191. \sin^{-1} t - \sin^{-1} 2t = \sin^{-1} 4t.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin t \neq 0, \\ \sin 2t \neq 0, \\ \sin 4t \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{\sin 2t} - \frac{1}{\sin 4t} = 0 \Rightarrow \sin 2t \sin 4t - \sin t \sin 4t - \sin t \sin 2t = 0.$$

По формуле  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$  имеем

$$\frac{1}{2}(\cos 2t - \cos 6t) - \frac{1}{2}(\cos 3t - \cos 5t) - \frac{1}{2}(\cos t - \cos 3t) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\cos 2t + \cos 5t) - (\cos 6t + \cos t) = 0.$$

Так как  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ , то

$$2 \cos \frac{7t}{2} \cos \frac{3t}{2} - 2 \cos \frac{7t}{2} \cos \frac{5t}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{7t}{2} \left( \cos \frac{3t}{2} - \cos \frac{5t}{2} \right) = 0.$$

Отсюда

1)  $\cos \frac{7t}{2} = 0$ ,  $\frac{7t}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $t_1 = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7} \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

2)  $\cos \frac{3t}{2} - \cos \frac{5t}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 4t \sin t = 0$  не подходит по ОДЗ. Учитыв.

ОДЗ,  $t = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7} \pi k = \frac{\pi}{7}(2k+1)$ ,  $k \neq 7l+3$ , где  $k$  и  $l \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $t = \frac{\pi}{7}(2k+1)$ ,  $k \neq 7l+3$ , где  $k$  и  $l \in \mathbb{Z}$ .

8.192.  $\frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} + 2 \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} - 3 = 0.$

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} \sin 2x \neq 1, \\ \operatorname{tg} x \neq 1, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$

Из условия имеем:

$$\frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x} - 2 \frac{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)^2 - 2 \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right) - 3 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ ,  
получим

$$1) \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right) = -1, \sin x + \cos x = -\sin x + \cos x, \sin x = 0, x_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right) = 3, \sin x + \cos x = 3\sin x - 3\cos x, \sin x = 2\cos x,$$

$$\operatorname{tg} x = 2, x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x_1 = \pi k$ ;  $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.193. \operatorname{ctg}^2 2x + \frac{3(\cos 3x - \cos x)}{\sin 3x - \sin x} + 2 = 0.$$

Решение.

По формулам

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

имеем

$$\operatorname{ctg}^2 2x + 3 \cdot \frac{2 \sin 2x \sin x}{2 \sin x \cos 2x} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{ctg}^2 x - 3 \operatorname{tg} 2x + 2 = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg}^3 x + 3 \operatorname{ctg} 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{ctg}^3 2x - 1) + (2 \operatorname{ctg} 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{ctg} 2x - 1)(\operatorname{ctg}^2 2x + \operatorname{ctg} 2x + 1) + 2(\operatorname{ctg} 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{ctg} 2x - 1)(\operatorname{ctg}^2 2x + \operatorname{ctg} 2x + 3) = 0.$$

Отсюда

$$1) \operatorname{ctg} 2x - 1 = 0, \operatorname{ctg} 2x = 1, 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{8}(4k + 1), k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \operatorname{ctg}^2 2x + \operatorname{ctg} 2x + 3 \neq 0 \quad (D < 0), \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8}(4k + 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.194. \operatorname{tg}^4 3t = \sin^2 6t.$$

Решение.

ОДЗ:  $\cos 3t \neq 0$ .

Из условия имеем:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg}^2 3t)^2 &= \sin^2 6t \Rightarrow \frac{(1 - \cos 6t)^2}{(1 + \cos 6t)^2} - (1 - \cos^2 6t) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - \cos 6t)^2 - (1 - \cos 6t)(1 + \cos 6t)^3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - \cos 6t)(1 - \cos 6t - (1 + \cos 6t)^3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - \cos 6t)(1 - \cos 6t - 1 - 3\cos 6t - 3\cos^2 6t - \cos^3 6t) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - \cos 6t) \times (\cos^3 6t + 3\cos^2 6t + 4\cos 6t) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos 6t(\cos 6t - 1)(\cos^2 6t + 3\cos 6t + 4) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$1) \cos 6t = 0, \quad 6t = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad t_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos 6t - 1 = 0, \quad \cos 6t = 1, \quad 6t = 2\pi n, \quad t_2 = \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$3) \cos^2 6t + 3\cos 6t + 4 = 0 \quad (D < 0), \quad \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } t_1 = \frac{\pi}{12}(2k + 1); \quad t_2 = \frac{\pi n}{3}, \quad \text{где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.195. \quad \frac{1 - \sin^6 z - \cos^6 z}{1 - \sin^4 z - \cos^4 z} = 2 \cos^2 3z.$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{1 - \left( (\sin^2 z)^3 + (\cos^2 z)^3 \right)}{1 - (\sin^4 z + \cos^4 z)} &= 2 \cos^2 3z \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1 - (\sin^2 z + \cos^2 z)(\sin^4 z - \sin^2 z \cos^2 z + \cos^4 z)}{1 - \left( (\sin^2 z + \cos^2 z)^2 - 2 \sin^2 z \cos^2 z \right)} &= 2 \cos^2 3z \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1 - 1 \left( (\sin^2 z + \cos^2 z)^2 - 3 \sin^2 z \cos^2 z \right)}{1 - 1 + 2 \sin^2 z \cos^2 z} &= 2 \cos^2 3z \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1 - 1 + 3 \sin^2 z \cos^2 z}{2 \sin^2 z \cos^2 z} = 2 \cos^2 3z, \quad 2 \cos^2 3z = \frac{3}{4}, \quad \cos 3z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$



$$3z = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad z = \pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{18}(6k \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $z = \frac{\pi}{18}(6k \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}$

**8.196.**  $\operatorname{ctgx} - \operatorname{tgx} = \frac{\cos x - \sin x}{0,5 \sin 2x}$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$

Из условия имеем:

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x - \sin x}{\sin x \cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} - \frac{\cos x - \sin x}{\sin x \cos x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x)}{\sin x \cos x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x) = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 1) = 0.$$

Отсюда 1)  $\cos x - \sin x = 0$ , 2)  $\cos x + \sin x - 1 = 0$ . Разделив первое

уравнение на  $\cos x \neq 0$ , получим  $\operatorname{tgx} = 1$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

Второе уравнение запишем в виде:

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \times \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Отсюда или  $\sin \frac{x}{2} = 0$ ,  $\frac{x}{2} = \pi n$ ,  $x_2 = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , или  $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0$ .

Разделив последнее уравнение на  $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ , найдем  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$ ,  $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi l$ ,

$x_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ,  $x_2, x_3$  не подходят по ОДЗ.

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4}(4k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.197. \frac{\operatorname{ctg} 2z}{\operatorname{ctg} z} + \frac{\operatorname{ctg} z}{\operatorname{ctg} 2z} + 2 = 0.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \operatorname{ctg} z \neq 0, \\ \operatorname{ctg} 2z \neq 0, \\ \sin z \neq 0, \\ \sin 2z \neq 0. \end{cases}$$

Из условия имеем:

$$\left( \frac{\operatorname{ctg} 2z}{\operatorname{ctg} z} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\operatorname{ctg} 2z}{\operatorname{ctg} z} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{\operatorname{ctg} 2z}{\operatorname{ctg} z} + 1 \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{ctg} 2z}{\operatorname{ctg} z} = -1,$$

$$\operatorname{ctg} 2z = -\operatorname{ctg} z, \operatorname{ctg} 2z + \operatorname{ctg} z = 0.$$

$$\text{Так как } \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \text{ то получаем } \frac{\sin 3z}{\sin 2z \sin z} = 0.$$

По формуле  $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$  имеем

$$\frac{3\sin z - 4\sin^3 z}{\sin 2z \sin z} = \frac{\sin z(3 - 4\sin^2 z)}{\sin 2z \sin z} = \frac{3 - 4\sin^2 z}{\sin 2z}$$

и наше уравнение принимает вид  $3 - 4\sin^2 z = 0$ , откуда  $\sin z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$z = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } z = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$8.198. \cos^{-2} 2x \operatorname{ctg} 2x + \sin^{-2} 2x \operatorname{ctg} 2x = \frac{8\cos^2 4x}{\sin^3 4x} + 10\sin^{-1} 4x + 4\sqrt{3}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 2x \neq 0, \\ \sin 2x \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{1}{\cos^2 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{1}{\sin^2 2x} \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{8\cos^2 4x}{\sin^3 4x} + \frac{10}{\sin 4x} + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} = \frac{8\cos^2 4x}{\sin^3 4x} + \frac{10}{\sin 4x} + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\sin^3 2x \cos^3 2x} = \frac{8 \cos^2 4x + 10 \sin^2 4x}{\sin^3 4x} + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2 \sin^2 2x \cos^2 2x}{\sin^3 2x \cos^3 2x} = \frac{8(1 - \sin^2 4x) + 10 \sin^2 4x}{\sin^3 4x} + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 2 \sin^2 2x \cos^2 2x}{\sin^3 2x \cos^3 2x} = \frac{8 + 2 \sin^2 4x}{\sin^3 4x} + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8 - 4(\sin^2 2x \cos^2 2x)}{8 \sin^3 2x \cos^3 2x} - \frac{8 + 2 \sin^2 4x}{\sin^3 4x} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8 - 4 \sin^2 4x}{\sin^3 4x} - \frac{8 + 2 \sin^2 4x}{\sin^3 4x} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8 - 4 \sin^2 4x - 8 - 2 \sin^2 4x}{\sin^3 4x} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow -\frac{6 \sin^2 4x}{\sin^3 4x} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sin 4x} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда  $4x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k$ ,  $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

8.199. 
$$\frac{\cos x}{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{8} \cdot \left( 1 - \frac{2 \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} \right).$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \sin \frac{x}{2} \neq 0, \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{\cos x}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{8} \cdot \left( 1 - \frac{\frac{2 \cos x}{\sin x}}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cos x}{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}} = \frac{1}{8} \cdot \left( 1 - \frac{2 \cos x \sin^2 x}{\sin x (\sin^2 x + \cos^2 x)} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\left( \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \left( \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right)} = \frac{1}{8} (1 - 2 \cos x \sin x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \sin 2x}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos x} = \frac{1 - \sin 2x}{8} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \sin 2x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 1 + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = 0.$$

Разделив это уравнение на  $\cos 2x \neq 0$ , получим  $\operatorname{tg} 2x = 1$ ,  $2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ ,

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{8} (4k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{8} (4k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$8.200. \quad \frac{3(\cos 2x + \operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x - \cos 2x} - 2(\sin 2x + 1) = 0.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin 2x \neq 0, \\ \operatorname{ctg} 2x - \cos 2x \neq 0. \end{cases}$$

Из условия имеем:

$$\frac{3 \left( \cos 2x + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \right)}{\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \cos 2x} - 2(\sin 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 \cos 2x (\sin 2x + 1)}{\cos 2x (1 - \sin 2x)} - 2(\sin 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin 2x + 1) \left( \frac{3}{1 - \sin 2x} - 2 \right) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin 2x + 1 = 0, \sin 2x = -1, 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k - 1),$$

$$k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \frac{3}{1 - \sin 2x} - 2 = 0, \sin 2x = -\frac{1}{2}, 2x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$x_2 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_1 \text{ не подходит по ОДЗ.}$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.201. \sin 2x + 2\operatorname{ctg} x = 3.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \sin x \neq 0.$$

Так как  $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$ , то имеем

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2}{\operatorname{tg} x} - 3 = 0 \Rightarrow 3\operatorname{tg}^3 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Пусть  $\operatorname{tg} x = y$ , тогда

$$3y^3 - 4y^2 + 3y - 2 = 0, \quad 3y^3 - 3y^2 - y^2 + 2y + y - 1 - 1 = 0,$$

$$3y^2(y - 1) - (y - 1)^2 + (y - 1) = 0, \quad (y - 1)(3y^2 - y + 2) = 0.$$

Отсюда

$$1) y - 1 = 0, \quad y = 1, \quad \operatorname{tg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{4}(4n + 1), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 3y^2 - y + 2 \neq 0 \quad (D < 0), \quad \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4}(4n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.202. 2\cos 13x + 3\cos 3x + 3\cos 5x - 8\cos x \cos^3 4x = 0.$$

*Решение.*

Так как

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha, \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

то уравнение имеет вид

$$2\cos 13x + 3(\cos 3x + \cos 5x) - 8\cos x \cos^3 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 13x + 3 \cdot 2 \cos 4x \cos x - 8 \cos x \cos^3 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 13x - 2 \cos x (4 \cos^3 4x - 3 \cos 4x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 13x - 2 \cos x \cos 12x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 13x - (\cos 13x + \cos 11x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin 12x \sin x = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin 12x = 0, 12x = \pi k, x_1 = \frac{\pi k}{12}, k \in Z;$$

$$2) \sin x = 0, x_2 = \pi n, n \in Z; x_2 \text{ входит в } x_1.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi k}{12}, k \in Z.$$

$$8.203. (\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4 = 3 - \sin 4x.$$

*Решение.*

Имеем:

$$(\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x)^2 + (\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x)^2 =$$

$$= 3 - \sin 4x \Leftrightarrow (1 + \sin 2x)^2 + (1 - \sin 2x)^2 = 3 - \sin 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin 2x + \sin^2 2x + 1 - 2 \sin 2x + \sin^2 2x = 3 - \sin 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 2x - 1 + \sin 4x = 0 \Leftrightarrow -\cos 4x + \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} 4x = 1,$$

$$4x = \frac{\pi}{4} + \pi k, x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi}{16}(4k + 1), k \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{16}(4k + 1), k \in Z.$$

$$8.204. \operatorname{tg}^3 t + 6 \sin^{-1} 2t = 8 \sin^{-3} 2t - 3 \operatorname{ctg} t.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \sin 2t \neq 0.$$

Так как  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$  и  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ , то имеем:

$$\frac{(1 - \cos 2t)^3}{\sin^3 2t} + \frac{6}{\sin 2t} = \frac{8}{\sin^3 2t} - \frac{3(1 + \cos 2t)}{\sin 2t} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (1 - \cos 2t)^3 + 6 \sin^2 2t - 8 + 3(1 + \cos 2t) \sin^2 2t = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (1 - \cos 2t)^3 + 6(1 - \cos^2 2t) - 8 + 3(1 + \cos 2t)(1 - \cos^2 2t) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 1 - 3 \cos 2t + 3 \cos^2 2t - \cos^3 2t + 6 - 6 \cos^2 2t - 8 + 3 - 3 \cos^2 2t + \\
&+ 3 \cos 2t - 3 \cos^3 2t = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^3 2t + 6 \cos^2 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2 \cos^3 2t + 3 \cos^2 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^3 2t + 2 + 3 \cos^2 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2(\cos 2t + 1)(\cos^2 2t - \cos 2t + 1) + 3(\cos 2t + 1)(\cos 2t - 1) = 0, \\
&(\cos 2t + 1)(2 \cos^2 2t + \cos 2t - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$1) \cos 2t + 1 = 0, \cos 2t = -1, 2t = \pi + 2\pi n, t_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

2)  $2 \cos^2 2t + \cos 2t - 1 = 0$ . Решая уравнение как квадратное относительно  $\cos 2t$ , имеем  $\cos 2t = -1$ ,  $t_2 = t_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$  — не подходит по

ОДЗ;  $\cos 2t = \frac{1}{2}$ ,  $2t_3 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $t_3 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Ответ: } t = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}$$

$$8.205. 2 \sin x \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - x \right) + 3 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} + x \right) \cos x - 5 \cos^2 x \sin \left( \frac{\pi}{2} + x \right) = 0.$$

*Решение.*

Так как  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$  и  $\sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha$ , то имеем

$$\sin x (1 + \cos(\pi - 2x)) + \frac{3}{2} (1 + \cos(\pi + 2x)) \cos x - 5 \cos^2 x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x (1 - \cos 2x) + \frac{3}{2} (1 - \cos 2x) \cos x - 5 \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x - 2 \sin x \cos 2x + 3 \cos x - 3 \cos 2x \cos x - 10 \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x (1 - \cos 2x) + 3 \cos x (1 - \cos 2x) - 10 \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)(2 \sin x + 3 \cos x) - 10 \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x (2 \sin x + 3 \cos x) - 10 \cos^3 x = 0,$$

$$4 \sin^3 x + 6 \sin^2 x \cos x - 10 \cos^3 x = 0,$$

$$2 \sin^3 x + 3 \sin^2 x \cos x - 5 \cos^3 x = 0.$$

Разделив это уравнение на  $\cos^3 x \neq 0$ , получим:

$$2\operatorname{tg}^3 x - 2 + 3\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1) + 3(\operatorname{tg} x - 1) \times \\ \times (\operatorname{tg} x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{tg} x - 1)(2\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 5) = 0.$$

Отсюда

1)  $\operatorname{tg} x - 1 = 0$ ,  $\operatorname{tg} x = 1$ ,  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

2)  $2\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 5 \neq 0$  ( $D < 0$ ),  $\emptyset$ .

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4}(4k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

8.206.  $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = \frac{82}{9}(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x + 1) \cos 2x$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$

Запишем уравнение в виде:

$$\left( (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - 2\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x \right)^2 - 2\operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg}^2 x = \frac{82}{9} \cdot \left( \frac{\sin x \sin 2x}{\cos x \cos 2x} + 1 \right) \cos 2x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \left( \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 - 2 \right)^2 - 2 = \frac{82}{9} \cdot \left( \frac{\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x} \right) \cos 2x.$$

Применив формулу  $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$ , имеем

$$\left( \left( \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)^2 - 2 \right)^2 - 2 = \frac{82}{9} \cdot \frac{\cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 \right)^2 = \frac{100}{9}.$$

Отсюда 1)  $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 = \pm \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 2x} - 2 = \pm \frac{10}{3}$ . Тогда

$\sin^2 2x = -3$ ,  $\emptyset$ ; или  $\sin^2 2x = \frac{3}{4}$ ,  $\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $2x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$ ,

$x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



$$8.207. 2 \cos^6 2t - \cos^4 2t + 1,5 \sin^2 4t - 3 \sin^2 2t = 0.$$

*Решение.*

Так как  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$  и  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ , то имеем

$$2 \left( \frac{1}{2} (1 + \cos 4t) \right)^3 - \left( \frac{1}{2} (2 + \cos 4t) \right)^2 + 1,5 (1 - \cos^2 4t) - 1,5 (1 - \cos 4t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 + \cos 4t)^3}{4} - \frac{(1 + \cos 4t)^2}{4} + \frac{3(1 - \cos^2 4t)}{2} - \frac{3(1 - \cos 4t)}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^3 4t - 4 \cos^2 4t + 7 \cos 4t = 0 \Leftrightarrow \cos 4t (\cos^2 4t - 4 \cos 4t + 7) = 0.$$

Отсюда 1)  $\cos 4t = 0$ ,  $4t = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $t = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi}{8} (2k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

2)  $\cos^2 4t - 4 \cos 4t + 7 \neq 0$  ( $D < 0$ ),  $\emptyset$ .

*Ответ:*  $t = \frac{\pi}{8} (2k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.208. \sin 6x + 2 = 2 \cos 4x.$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде  $\sin 3(2x) + 2 - 2 \cos 2(2x) = 0$  и применив

формулы  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$  и  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$  получим

$$3 \sin 2x - 4 \sin^3 2x + 2 - 2 + 4 \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^3 2x - 4 \sin^2 2x - 3 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x (4 \sin^2 2x - 4 \sin 2x - 3) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin 2x = 0, 2x = \pi k, x_1 = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$$

2)  $4 \sin^2 2x - 4 \sin 2x - 3 = 0$ . Решив уравнение как квадратное относительно  $\sin 2x$ , имеем  $\sin 2x = \frac{3}{2}, \emptyset$ ;  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ ,  $2x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,

$$x_2 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi k}{2}$ ,  $x_2 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.209. \sin^2 t \operatorname{tg} t + \cos^2 t \operatorname{ctg} t - 2 \sin t \cos t = 1 + \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos t \neq 0, \\ \sin t \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 t \sin t}{\cos t} + \frac{\cos^2 t \cos t}{\sin t} - 2 \sin t \cos t &= 1 + \frac{\sin t}{\cos t} + \frac{\cos t}{\sin t} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\sin^4 t + \cos^4 t}{\sin t \cos t} - \sin 2t &= 1 + \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos t} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2 \sin^2 t \cos^2 t}{\sin t \cos t} - \sin 2t &= 1 + \frac{1}{\sin t \cos t} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2 - 4 \sin^2 t \cos^2 t}{2 \sin t \cos t} - \sin 2t &= 1 + \frac{2}{2 \sin t \cos t} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2 - \sin^2 2t}{\sin 2t} - \sin 2t - 1 - \frac{2}{\sin 2t} &= 0 \Rightarrow 2 - \sin^2 2t - \sin^2 2t - \sin 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin^2 2t + \sin 2t &= 0 \Leftrightarrow \sin 2t(2 \sin 2t + 1) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$2 \sin 2t + 1 = 0, \sin 2t = -\frac{1}{2}, 2t = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, t = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}; \sin 2t \neq 0.$$

$$\text{Ответ: } t = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.210. \operatorname{tg}^3 2x + \operatorname{ctg}^3 2x + 6 \sin^{-1} 2x = 8 \sin^{-3} 4x.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 2x \neq 0, \\ \sin 2x \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3 2x}{\cos^3 2x} + \frac{\cos^3 2x}{\sin^3 2x} + \frac{6}{\sin 2x} - \frac{8}{\sin^3 4x} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\sin^6 2x + \cos^6 2x}{\sin^3 2x \cos^3 2x} + \frac{6}{\sin 2x} - \frac{8}{\sin^3 4x} &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin^2 2x + \cos^2 2x)(\sin^4 2x - \sin^2 2x \cos^2 2x + \cos^4 2x)}{\sin^3 2x \cos^3 2x} +$$

$$+ \frac{6}{\sin 2x} - \frac{8}{\sin^3 4x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 3\sin^2 2x \cos^2 2x}{\sin^3 2x \cos^3 2x} + \frac{6}{\sin 2x} - \frac{8}{\sin^3 4x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8 - 6(4\sin^2 2x \cos^2 2x)}{8\sin^3 2x \cos^3 2x} - \frac{8}{\sin^3 4x} + \frac{6}{\sin 2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8 - 6\sin^2 4x}{\sin^3 4x} - \frac{8}{\sin^3 4x} + \frac{6}{\sin 2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8 - 6\sin^2 4x - 8}{\sin^3 4x} + \frac{6}{\sin 2x} = 0 \Leftrightarrow -\frac{6}{\sin 4x} + \frac{6}{\sin 2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2\sin 2x \cos 2x} + \frac{1}{\sin 2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{-1 + 2\cos 2x}{2\sin 2x \cos 2x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + 2\cos 2x = 0, \cos 2x = \frac{1}{2}, 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1),$$

$k \in \mathbb{Z}$ .

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}$ .

**8.211.**  $\cos x \cos 2x \sin 3x = 0,25 \sin 2x$ .

*Решение.*

Запишем уравнение в виде:

$$\cos x \cos 2x \sin 3x - 0,5 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (\cos 2x \sin 3x - 0,5 \sin x) = 0.$$

Отсюда или

$$\cos x = 0, x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k + 1), k \in \mathbb{Z},$$

или

$$\cos 2x \sin 3x - 0,5 \sin x = 0, \text{ или } 2 \cos 2x \sin 3x - \sin x = 0.$$

Используя формулу  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$ , имеем:

$$\sin(3x - 2x) + \sin(3x + 2x) - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x + \sin 5x - \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x, 5x = \pi n, x_2 = \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k + 1), x_2 = \frac{\pi n}{5}$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.212. \cos 9x - 2 \cos 6x = 2.$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде  $\cos 3(3x) - 2 \cos 2(3x) - 2 = 0$  и, применив формулы  $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$  и  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ , имеем:

$$4 \cos^3 3x - 3 \cos 3x - 2(2 \cos^2 3x - 1) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^3 3x - 4 \cos^2 3x - 3 \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x(4 \cos^2 3x - 4 \cos 3x - 3) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos 3x = 0, \quad 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{6}(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z},$$

2)  $4 \cos^2 3x - 4 \cos 3x - 3 = 0$ . Решив это уравнение как квадратное относительно  $\cos 3x$ , найдем  $\cos 3x = \frac{3}{2}$ ,  $\emptyset$ ; или  $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ ,  $3x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n$ ,

$$x_2 = \pm \frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi n = \frac{2\pi}{9}(3n \pm 1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi}{6}(2k+1)$ ,  $x_2 = \frac{2\pi}{9}(3n \pm 1)$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.213. 2 \sin^5 2t - \sin^3 2t - 6 \sin^2 2t + 3 = 0.$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде:

$$\sin^3 2t(2 \sin^2 2t - 1) - 3(2 \sin^2 2t - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin^2 2t - 1)(\sin^3 2t - 3) = 0.$$

Отсюда

$$1) 2 \sin^2 2t - 1 = 0, \quad \sin 2t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 2t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},$$

$$t_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi}{8}(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$2) \sin^3 2t - 3 = 0, \quad \sin 2t = \sqrt[3]{3} > 1, \quad \emptyset.$$

*Ответ:*  $t = \frac{\pi}{8}(2k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.214. \sin^6 2t + \cos^6 2t = \frac{3}{2}(\sin^4 2t + \cos^4 2t) + \frac{1}{2}(\sin t + \cos t).$$

Решение.

Из условия имеем:

$$\begin{aligned} & (\sin^2 2t + \cos^2 2t)(\sin^4 2t - \sin^2 2t \cos^2 2t + \cos^4 2t) - \\ & - \frac{3}{2}((\sin^2 2t + \cos^2 2t)^2 - 2 \sin^2 2t \cos^2 2t) - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t) = 0 \Leftrightarrow \\ & (\sin^2 2t + \cos^2 2t)^2 - 3 \sin^2 2t \cos^2 2t - \frac{3}{2}(1 - 2 \sin^2 2t \cos^2 2t) - \\ & - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3 \sin^2 2t \cos^2 2t - \frac{3}{2} + 3 \sin^2 2t \cos^2 2t - \\ & - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t) = 0 \Leftrightarrow \sin t + \cos t + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + 2 \cos^2 \frac{t}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{t}{2} \left( \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$1) \cos \frac{t}{2} = 0, \quad \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad t_1 = \pi + \pi k = \pi(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = -1, \quad \frac{t}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$$

$$t_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2}(4n - 1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } t_1 = \pi(2k + 1); \quad t_2 = \frac{\pi}{2}(4n - 1), \quad k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.215. (\cos^{-2} 2x + \operatorname{tg}^2 2x)(\sin^{-2} 2x + \operatorname{ctg}^2 2x) = 4 \sin^{-2} 4x + 5.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 2x \neq 0, \\ \sin 2x \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде:

$$\left( \frac{1}{\cos^2 2x} + \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} \right) \cdot \left( \frac{1}{\sin^2 2x} + \frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} \right) = \frac{4}{\sin^2 4x} + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \sin^2 2x}{\cos^2 2x} \cdot \frac{1 + \cos^2 2x}{\sin^2 2x} - \frac{4}{\sin^2 4x} - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos^2 2x + \sin^2 2x + \sin^2 2x \cos^2 2x}{\sin^2 2x \cos^2 2x} - \frac{4}{\sin^2 4x} - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + \sin^2 2x \cos^2 2x}{\sin^2 2x \cos^2 2x} - \frac{4}{\sin^2 4x} - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 2x \cos^2 2x} + 1 - \frac{4}{\sin^2 2x} - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 2x \cos^2 2x} - \frac{4}{\sin^2 4x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{\sin^2 4x} - \frac{4}{\sin^2 4x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 4x} = 4 \Leftrightarrow \sin^2 4x = 1, \sin 4x = \pm 1, 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi}{8}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$$

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{8}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$

**8.216.**  $\sin 3z + \sin^3 z = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sin 2z.$

*Решение.*

Так как  $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$  и  $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$ , то имеем:

$$3\sin z - 4\sin^3 z + \sin 3z - \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin z \cos z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin z - 3\sin^3 z - \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin z \cos z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin z \left( 1 - \sin^2 z - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos z \right) = 0 \Leftrightarrow \sin z \left( \cos^2 z - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos z \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin z \cos z \left( \cos z - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0.$$

Отсюда

1)  $\sin z = 0, z_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z};$

$$2) \cos z = 0, z_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z};$$

$$3) \cos z - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \cos z = \frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $z_1 = \pi k; z_2 = \frac{\pi}{2}(2n+1); z_3 = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi l, k, n \text{ и } l \in \mathbb{Z}.$

**8.217.**  $(\cos 2x + (\cos x + \sin x)^2)(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Уравнение равносильно двум уравнениям:  $\cos 2x + (\cos x + \sin x)^2 = 0$   
или  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0.$  Запишем первое уравнение в виде

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x (\cos x + \sin x) = 0.$$

Так как  $\cos x \neq 0,$  то

$$\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{4}(4n-1), n \in \mathbb{Z}.$$

Второе уравнение запишем в виде

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = -1, \emptyset.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4}(4n-1), n \in \mathbb{Z}.$

**8.218.**  $2 \sin 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - \cos 3x \cos^{-1} 5x \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0.$

Решение.

ОДЗ:  $\cos 5x \neq 0.$

Имеем

$$2 \sin 2x + \left( \sin 3x - \frac{\cos 3x \sin 5x}{\cos 5x} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x + \frac{\sin 3x \cos 5x - \cos 3x \sin 5x}{\cos 5x} = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 2x - \frac{\sin 2x}{\cos 5x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \left( 2 - \frac{1}{\cos 5x} \right) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin 2x = 0, 2x = \pi m, x_1 = \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}; \text{ здесь } m \neq 2l + 1, \text{ так как в про-}$$

тивном случае  $\cos 5x = 0$ ; значит,  $x_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

$$2) 2 - \frac{1}{\cos 5x} = 0, \cos 5x = \frac{1}{2}, 5x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, x_2 = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \pi k; x_2 = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.219. 3(\operatorname{ctg} t - \operatorname{tg} t) + 4 \sin 2t = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin t \neq 0, \\ \cos t \neq 0. \end{cases}$$

Из условия имеем:

$$3(\operatorname{ctg} t - \operatorname{tg} t) + 4 \sin 2t = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left( \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{\sin t}{\cos t} \right) + 4 \sin 2t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\sin t \cos t} + 4 \sin 2t = 0 \Leftrightarrow \frac{6 \cos 2t}{\sin 2t} + 4 \sin 2t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos 2t + 2 \sin^2 2t = 0 \Leftrightarrow 3 \cos 2t + 2(1 - \cos^2 2t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2t - 3 \cos 2t - 2 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\cos 2t$ , найдем

$$\cos 2t = 2, \emptyset; \cos 2t = -\frac{1}{2}, 2t = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, t = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } t = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.220. \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x + \cos^{-2} 2x} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 2x + \sin^{-2} 2x} = \frac{2}{3}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 2x \neq 0, \\ \sin 2x \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{1}{\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} + \frac{1}{\cos^2 2x}} + \frac{1}{\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} + \frac{1}{\sin^2 2x}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x + 1} + \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x + 1} - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}(1 + \cos 4x)}{\frac{1}{2}(1 - \cos 4x) + 1} + \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 4x)}{\frac{1}{2}(1 + \cos 4x) + 1} - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 4x}{3 - \cos 4x} + \frac{1 - \cos 4x}{3 + \cos 4x} - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(1 + \cos 4x)(3 + \cos 4x) + 3(3 - \cos 4x)(1 - \cos 4x) -$$

$$- 2(3 - \cos 4x)(3 + \cos 4x) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 4x = 0, \cos 4x = 0, 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi}{8}(2k + 1), k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{8}(2k + 1), k \in \mathbb{Z}$ .

8.221.  $\operatorname{tg} 3t + \operatorname{tg} t = 2 \sin 4t$ .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos t \neq 0, \\ \cos 3t \neq 0. \end{cases}$$

Так как  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ , то перепишем уравнение в виде

$$\frac{\sin(3t + t)}{\cos 3t \cos t} - 2 \sin 4t = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 4t - \sin 4t(2 \cos 3t \cos t)}{\cos 3t \cos t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4t(1 - 2 \cos 3t \cos t) = 0.$$

Применяя формулу  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$ , имеем

$$\sin 4t(1 - \cos 2t - \cos 4t) = 0 \Leftrightarrow \sin 4t(1 - \cos 2t - 2 \cos^2 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4t(2 \cos^2 2t + \cos 2t - 2) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin 4t = 0, 4t = \pi k, t_1 = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

2)  $2 \cos^2 2t + \cos 2t - 2 = 0$ . Решая это уравнение как квадратное относительно  $\cos 2t$ , находим  $\cos 2t = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} < -1, \emptyset$ ; или  $\cos 2t = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$ ,

$$2t = \pm \arccos \frac{\sqrt{17} - 1}{4} + 2\pi n, t_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{17} - 1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \text{ Учитывая}$$

ОДЗ,  $t_1 = \frac{\pi k}{4}, k \neq 4l + 2$ , где  $k$  и  $l \in \mathbb{Z}$ .

*Ответ:*  $t_1 = \frac{\pi k}{4}, k \neq 4l + 2; t_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{17} - 1}{4} + \pi n$ , где  $k, l$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

**8.222.**  $\sin(3\pi - x) + \operatorname{tg}(\pi + x) = \frac{\cos^{-1} x - \cos x}{2 \sin x}$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$

Из условия имеем:

$$\begin{aligned} \sin x + \operatorname{tg} x &= \frac{1 - \cos x}{\cos x} \Leftrightarrow \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin x \cos x + \sin x}{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x (\cos x + 1)}{\cos x} - \frac{\sin x}{2 \cos x} = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin x \left( \frac{\cos x + 1}{\cos x} - \frac{1}{2 \cos x} \right) = 0, \sin x \neq 0; \frac{\cos x + 1}{\cos x} - \frac{1}{2 \cos x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cos x + 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x + 1 = 0, \cos x = -\frac{1}{2},$$

$$x = \pm \frac{2}{3} \pi + 2\pi k = \frac{2}{3} \pi (3k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x = \frac{2}{3} \pi (3k \pm 1), k \in \mathbb{Z}$ .

**8.223.**  $\frac{1}{2} \sin 4x \sin x + \sin 2x \sin x = 2 \cos^2 x$ .

*Решение.*

Запишем это уравнение в виде

$$\sin 2x \cos 2x \sin x + \sin 2x \sin x = 2 \cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1) \sin x + 2 \sin x \cos x \sin x = 2 \cos^2 x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2 \cos x (2 \cos^2 x - 1) \sin^2 x + 2 \sin^2 x \cos x - 2 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2 \cos x ((2 \cos^2 x - 1)(1 - \cos^2 x) + 1 - \cos^2 x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cos x (2 \cos^2 x - 2 \cos^4 x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -\cos^2 x (2 \cos^3 x - 2 \cos x + 1) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем  $\cos^2 x = 0$ ,  $\cos x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  
 $2 \cos^3 x - 2 \cos x + 1 \neq 0$ .

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**8.224.**  $\frac{2(\cos^4 t + \sin^4 t)}{\cos^4 t - \sin^4 t} = \cos^{-1} 2t + \cos 4t + 1$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $\cos 2t \neq 0$ .

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{2((\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2 \cos^2 t \sin^2 t)}{(\cos^2 t + \sin^2 t)(\cos^2 t - \sin^2 t)} = \frac{1}{\cos 2t} + \cos 4t + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - 4 \cos^2 t \sin^2 t}{\cos 2t} - \frac{1}{\cos 2t} - \cos 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sin^2 2t - 1}{\cos 2t} - \cos 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 2t}{\cos 2t} - \cos 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2t - (2 \cos^2 2t - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 2t - \cos 2t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2t(2 \cos 2t - 1) = 0 \Rightarrow \cos 2t \neq 0; 2 \cos 2t - 1 = 0, \cos 2t = \frac{1}{2},$$

$$2t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, t = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $t = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.225. \operatorname{tg} t = \frac{\sin^2 t + \sin 2t - 1}{\cos^2 t - \sin 2t + 1}.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $\cos t \neq 0$ .

Так как  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$  и  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ , то

$$\operatorname{tg} t - \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 2t) + \sin 2t - 1}{\frac{1}{2}(1 + \cos 2t) - \sin 2t + 1} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} t - \frac{1 - \cos 2t + 2 \sin 2t - 2}{1 + \cos 2t - 2 \sin 2t + 2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} t - \frac{2 \sin 2t - \cos 2t - 1}{-2 \sin 2t + \cos 2t + 3} = 0,$$

применяя формулы  $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$  и  $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ , получаем

$$\operatorname{tg} t - \frac{\frac{4 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} - 1}{\frac{4 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} + 3} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 t - 2 \operatorname{tg}^2 t + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg}^3 t - \operatorname{tg}^2 t) - (\operatorname{tg}^2 t - 1) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 t (\operatorname{tg} t - 1) - (\operatorname{tg} t - 1)(\operatorname{tg} t + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg} t - 1)(\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{tg} t - 1) = 0.$$

Отсюда имеем или  $\operatorname{tg} t - 1 = 0$ ,  $\operatorname{tg} t = 1$ ,  $t_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

или  $\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{tg} t - 1 = 0$ . Решая это уравнение как квадратное относительно

$\operatorname{tg} t$ , получаем  $\operatorname{tg} t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ,  $t_2 = \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $\operatorname{tg} t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,

$t_3 = \operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ .

*Ответ:*  $t_1 = \frac{\pi}{4}(4k + 1)$ ;  $t_2 = \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \pi n$ ;  $t_3 = \operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \pi l$ ;  $k$ ,

$n$  и  $l \in \mathbb{Z}$ .

$$8.226. \frac{\sin 2t + 2 \cos^2 t - 1}{\cos t - \cos 3t + \sin 3t - \sin t} = \cos t.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin t \neq 0, \\ \sin 2t + \cos 2t \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{Так как } \cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ то имеем}$$

$$\frac{\sin 2t + \cos 2t}{2 \sin \frac{t+3t}{2} \sin \frac{3t-t}{2} + 2 \sin \frac{3t-t}{2} \cos \frac{3t+t}{2}} = \cos t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2t + \cos 2t}{2 \sin 2t \sin t + 2 \sin t \cos 2t} - \cos t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2t + \cos 2t}{2 \sin t (\sin 2t + \cos 2t) - \cos t} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2 \sin t} - \cos t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \sin t \cos t = 0, \quad 1 - \sin 2t = 0, \quad \sin 2t = 1, \quad 2t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$t = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k+1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } t = \frac{\pi}{4}(4k+1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.227. \sin t^2 - \sin t = 0.$$

*Решение.*

$$\text{По формуле } \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ получаем}$$

$$2 \sin \frac{t^2 - t}{2} \cos \frac{t^2 + t}{2} = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin \frac{t^2 - t}{2} = 0,$$

$$2) \cos \frac{t^2 + t}{2} = 0.$$

Из первого уравнения имеем

$$\frac{t^2 - t}{2} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t^2 - t - 2\pi k = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Решая это квадратное уравнение, получим  $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8\pi k}}{2}$ , где  $1 + 8\pi k \geq 0$ ,  $k \geq -\frac{1}{8\pi}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Из второго уравнения имеем

$$\frac{t^2 + t}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ или } t^2 + t - \pi - 2\pi n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решая это квадратное уравнение, находим  $t_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\pi(1 + 2n)}}{2}$ , где  $1 + 4\pi(1 + 2n) \geq 0$ ,  $n \geq -\frac{1}{8\pi} - \frac{1}{2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Ответ:  $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8\pi k}}{2}$ ;  $t_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\pi(1 + 2n)}}{2}$ , где  $k$  и  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

**8.228.**  $\sin^3 z \sin 3z + \cos^3 z \cos 3z = \cos^3 4z.$

*Решение.*

Преобразуем левую часть уравнения, применяя формулы

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sin^2 z \sin z \sin 3z + \cos^2 z \cos z \cos 3z &= (1 - \cos^2 z) \sin z \sin 3z + \\ &+ \cos^2 z \cos z \cos 3z = \sin z \sin 3z - \cos^2 z \sin z \sin 3z + \cos^2 z \cos z \cos 3z = \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2z - \cos 4z) - \cos^2 z (\sin z \sin 3z - \cos z \cos 3z) = \\ &= \frac{\cos 2z - \cos 4z}{2} + \cos^2 z \cos 4z = \frac{\cos 2z - \cos 4z + 2 \cos^2 z \cos 4z}{2} = \\ &= \frac{\cos 2z + \cos 4z (2 \cos^2 z - 1)}{2} = \frac{\cos 2z + \cos 4z \cos 2z}{2} = \frac{\cos 2z (1 + \cos 4z)}{2} = \\ &= \frac{\cos 2z (1 + \cos 4z)}{2} = \cos 2z \cos^2 2z = \cos^3 2z. \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение принимает вид  $\cos^3 2z = \cos^3 4z \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos 4z = \cos 2z$ ,  $\cos 4z - \cos 2z = 0 \Leftrightarrow -2 \sin 3z \sin z = 0$ .

Отсюда

$$1) \sin 3z = 0, 3z = \pi k, z_1 = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin z = 0, z_2 = \pi n, n \in \mathbb{Z}, z_2 \text{ входит в } z_1.$$

$$\text{Ответ: } z = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.229. 2 \sin^4 t (\sin 2t - 3) - 2 \sin^2 t (\sin 2t - 3) - 1 = 0.$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$(\sin 2t - 3) \cdot 2 \sin^2 t (\sin^2 t - 1) - 1 = 0,$$

$$-(\sin 2t - 3) \cdot 2 \sin^2 t \cos^2 t - 1 = 0, (\sin 2t - 3) \cdot 4 \sin^2 t \cos^2 t + 2 = 0,$$

$$(\sin 2t - 3) \sin^2 2t + 2 = 0, \sin^3 2t - 3 \sin^2 2t + 2 = 0,$$

$$\sin^3 2t - \sin^2 2t - 2 \sin 2t + 2 = 0, \sin^2 2t (\sin 2t - 1) - 2 (\sin^2 2t - 1) = 0,$$

$$\sin^2 2t (\sin 2t - 1) - 2 (\sin 2t - 1) (\sin 2t + 1) = 0,$$

$$(\sin 2t - 1) (\sin^2 2t - 2 \sin 2t - 2) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin 2t - 1 = 0, \sin 2t = 1, 2t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, t_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4} (4k + 1), k \in \mathbb{Z};$$

2)  $\sin^2 2t - 2 \sin 2t - 2 = 0$ . Решая это уравнение как квадратное относительно  $\sin 2t$ , получаем  $\sin 2t = 1 + \sqrt{3} > 1, \emptyset$ ;  $\sin 2t = 1 - \sqrt{3}$ ,

$$2t = (-1)^n \arcsin(1 - \sqrt{3}) + \pi n, t_2 = (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin(1 - \sqrt{3}) + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } t_1 = \frac{\pi}{4} (4k + 1); t_2 = (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin(1 - \sqrt{3}) + \frac{\pi n}{2}, \text{ где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.230. \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{8} \cos 15x.$$

*Решение.*

Имеем

$$8(2 \sin x \cos x) \cos 2x \cos 4x \cos 8x = 2 \cos 15x \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(2 \sin 2x \cos 2x) \cos 4x \cos 8x = 2 \cos 15x \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 8x \cos 8x = 2 \cos 15x \sin x, \quad \sin 16x = 2 \cos 15x \sin x.$$

По формуле  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\beta - \alpha) + \sin(\beta + \alpha))$ , имеем

$$\sin 16x = -\sin 14x + \sin 16x, \quad \sin 14x = 0, \quad 14x = \pi k, \quad x = \frac{\pi k}{14}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Так как  $\sin x \neq 0$ ,  $x \neq \pi l$ , то  $x = \frac{\pi k}{14}$ ,  $k \neq 14l$ , где  $k$  и  $l \in \mathbb{Z}$ .

*Ответ:*  $x = \frac{\pi k}{14}$ ,  $k \neq 14l$ , где  $k$  и  $l \in \mathbb{Z}$ .

**8.231.**  $2 \sin^4 x + 1,25 \sin^2 2x - \cos^4 x = \cos 2x.$

*Решение.*

Имеем  $8(\sin^2 x)^2 + 5 \sin^2 2x - 4(\cos^2 x)^2 - 4 \cos 2x = 0$ . По формулам

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \text{и} \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad \text{находим}$$

$$8\left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right)^2 + 5(1 - \cos^2 2x) - 4\left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right)^2 - 4 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos 2x)^2 + 5(1 - \cos^2 2x) - (1 + \cos^2 2x) - 4 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - 4 \cos 2x + 2 \cos^2 2x + 5 - 5 \cos^2 2x - 1 - 2 \cos 2x - \cos^2 2x - 4 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 2x + 5 \cos 2x - 3 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\cos 2x$ , найдем

$$\cos 2x = -3, \quad \emptyset; \quad \text{или} \quad \cos 2x = \frac{1}{2}, \quad 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1),$$

$k \in \mathbb{Z}$ .

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**8.232.**  $\sin 2t \cos 2t (\sin^4 2t + \cos^4 2t - 1) = \frac{1}{2} \sin^2 4t.$

*Решение.*

Имеем

$$(2 \sin 2t \cos 2t) \left( (\sin^2 2t + \cos^2 2t)^2 - 2 \sin^2 2t \cos^2 2t - 1 \right) - \sin^2 4t = 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \sin 4t(1 - 2\sin^2 2t \cos^2 2t - 1) - \sin^2 4t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin 4t \cdot 4\sin^2 2t \cos^2 2t - 2\sin^2 4t = 0, \quad \sin^3 4t + 2\sin^2 4t = 0, \\ \sin^2 4t(\sin 4t + 2) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin^2 4t = 0, \quad 4t = \pi k, \quad t = \frac{\pi k}{4}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin 4t + 2 = 0, \quad \sin 4t = -2, \quad \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } t = \frac{\pi k}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.233. \sin 2x - 2\cos^2 x + 4(\sin x - \cos x + \operatorname{tg} x - 1) = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \cos x \neq 0.$$

Запишем уравнение в виде

$$(2\sin x \cos x - 2\cos^2 x) + 4\left(\sin x - \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - \cos x) + 4\left(\sin x - \cos x + \frac{\sin x - \cos x}{\cos x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\cos x(\sin x - \cos x) + 4(\sin x - \cos x)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x)\left(\cos x + 2 + \frac{2}{\cos x}\right) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin x - \cos x = 0,$$

$$2) \cos x + 2 + \frac{2}{\cos x} = 0. \text{ Разделив первое уравнение на } \cos x \neq 0, \text{ найдем}$$

$$\operatorname{tg} x = 1, \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Умножив второе уравнение}$$

$$\text{на } \cos x \neq 0, \text{ получим } \cos^2 x + 2\cos x + 2 \neq 0 \quad (D < 0), \quad \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4}(4k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.234. \frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} 2x.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \sin 2x \neq 0.$$

Запишем уравнение в виде

$$1 + 1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4 + \frac{4\operatorname{ctg}2x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{4(\sqrt{3} + \operatorname{ctg}2x)}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 2x} = \frac{4(\sqrt{3} + \operatorname{ctg}2x)}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin^2 2x + \sin 2x \cos 2x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}(1 - \sin^2 2x) + \sin 2x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos^2 2x - \sin 2x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos 2x = 0, 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{4}(2k+1), k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}, 2x = \frac{\pi}{3} + \pi n,$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{6}(3n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1); x_2 = \frac{\pi}{6}(3n+1), \text{ где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.235. \operatorname{ctg}^4 x = \cos^3 2x + 1.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \sin x \neq 0.$$

Так как  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ , то уравнение принимает вид

$$\left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right)^2 = \cos^3 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^4 x} - \frac{2}{\sin^2 x} + 1 = \cos^3 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin^4 x} = \cos^3 2x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos^3 2x \sin^4 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(1 - \cos^2 2x \sin^4 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(1 - \cos 2x \sin^2 x)(1 + \cos 2x \sin^2 x) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos 2x = 0, 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{4}(2k+1), k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 1 - \cos 2x \sin^2 x = 0, (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin^2 x) \sin^2 x - \sin^4 x + 1 = 0, \sin^2 x - 2 \sin^4 x + 1 = 0,$$

$$2 \sin^4 x - \sin^2 x - 1 = 0,$$

решив биквадратное уравнение, имеем  $\sin^2 x = 1, \sin^2 x = -\frac{1}{2}, \emptyset;$

$$\sin x = \pm 1, x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$3) 1 + \cos 2x \sin^2 x = 0, 2 \sin^4 x - \sin^2 x + 1 \neq 0 (D < 0), \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1); x_2 = \frac{\pi}{2}(2n+1), \text{ где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.236. \frac{1}{\sin^3 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} - 6 \cos^{-1} x = \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} + \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Так как  $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha},$  то

заданное уравнение имеет вид

$$\frac{8}{\sin^3 x} - \frac{6}{\cos x} = \frac{(1 - \cos x)^3}{\sin^3 x} + \frac{(1 + \cos x)^3}{\sin^3 x}.$$

$$8 \cos x - 6 \sin^3 x = (1 - 3 \cos x + 3 \cos^2 x - \cos^3 x + 1 + 3 \cos x + 3 \cos^2 x +$$

$$+ \cos^3 x) \cos x \Leftrightarrow 8 \cos x - 6 \sin^3 x - 2 \cos x - 6 \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x - \cos x \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (\sin x - \cos x) = 0.$$

Так как  $\sin x \neq 0,$  то

$$\sin x - \cos x = 0, \sin x = \cos x, \operatorname{tg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k+1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4}(4k+1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.237. 4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0.$$

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде

$$4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x - 2 \sin 2x \cos 2x = 0,$$

$$2 \sin 2x (2 \sin 5x \sin 7x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin 2x (\cos 2x - \cos 12x - \cos 2x) = 0, \sin 2x \cos 12x = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin 2x = 0, 2x = \pi k, x_1 = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos 12x = 0, 12x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x_2 = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12} = \frac{\pi}{24}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi k}{2}; x_2 = \frac{\pi}{24}(2n+1)$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.238. \sin x + \cos x + \sin 2x + \sqrt{2} \sin 5x = \frac{2 \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}.$$

*Решение.*

Так как  $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$  и  $\frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \sin 2\alpha$ , то имеем

$$\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{2} \sin 5x + \sin 2x = \sin 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{2} \sin 5x = 0, \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = 0, 3x + \frac{\pi}{8} = \pi k, x_1 = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 0, 2x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, x_2 = \frac{5\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x_1 = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{3}; x_2 = \frac{5\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.239. 3 \sin^2 \frac{x}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + 3 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \cos \frac{x}{2}.$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$3 \sin^2 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} + 3 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0,$$

$$3\sin^2 \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) - \cos^2 \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0,$$

$$\left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \left( 3\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Отсюда 1)  $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0$ ; 2)  $3\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$ .

1)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$ ,  $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(4k-1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

2)  $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l = \frac{\pi}{3}(6l \pm 1)$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x_1 = \frac{\pi}{2}(4k-1)$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{3}(6l \pm 1)$ , где  $k$  и  $l \in \mathbb{Z}$ .

**8.240.**  $\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \cdot \frac{1 + \sin x}{\sin x} = \sqrt{2} \cos x$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \neq 0. \end{cases}$

Так как  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ , то имеем

$$\frac{1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)} \cdot \frac{1 + \sin x}{\sin x} - \sqrt{2} \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sin x}{\cos x} \cdot \frac{1 + \sin x}{\sin x} - \sqrt{2} \cos x = 0, \quad \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x \sin x} - \sqrt{2} \cos x = 0,$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos x \sin x} - \sqrt{2} \cos x = 0, \quad \cos^2 x - \sqrt{2} \cos^2 x \sin x = 0,$$

$$\cos^2 x (1 - \sqrt{2} \sin x) = 0.$$

Отсюда

1)  $\cos x = 0$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(4k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

$$2) 1 - \sqrt{2} \sin x = 0, \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{2}(4k+1); x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \text{ где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}$$

$$8.241. \operatorname{tg}^3 z + \operatorname{ctg}^3 z - 8 \sin^{-3} 2z = 12.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \sin 2z \neq 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{tg}^3 z + \operatorname{ctg}^3 z - \frac{8}{\left(\frac{2 \operatorname{ctg} z}{1 + \operatorname{ctg}^2 z}\right)^3} = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 z + \operatorname{ctg}^3 z - \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 z)^3}{\operatorname{ctg}^3 z} = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \operatorname{ctg}^6 z - 1 - 3 \operatorname{ctg}^2 z - 3 \operatorname{ctg}^4 z - \operatorname{ctg}^6 z - 12 \operatorname{ctg}^3 z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{ctg}^4 z + 4 \operatorname{ctg}^3 z + \operatorname{ctg}^2 z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}^2 z (\operatorname{ctg}^2 z + 1 + 4 \operatorname{ctg} z) = 0.$$

Так как  $\operatorname{ctg} z \neq 0$ , то

$$\operatorname{ctg}^2 z + 1 + 4 \operatorname{ctg} z = 0, \frac{1}{\sin^2 z} + \frac{4 \cos z}{\sin z} = 0, 4 \sin z \cos z + 1 = 0, 2 \sin 2z = -1,$$

$$\sin 2z = -\frac{1}{2}, 2z = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, z = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } z = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$8.242. \frac{1}{\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 2x} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 5x + \operatorname{ctg} 2x} = \operatorname{tg} 3x.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0, \\ \operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 2x \neq 0, \\ \operatorname{ctg} 5x + \operatorname{ctg} 2x \neq 0, \\ \cos 5x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0, \\ \sin 5x \neq 0, \\ \sin 2x \neq 0. \end{cases}$$

Так как  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$ , то имеем

$$\frac{\cos 5x \cos 2x}{\sin 7x} - \frac{\sin 5x \sin 2x}{\sin 7x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x}{\sin 7x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos 7x}{\sin 7x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0,$$

$$\frac{\cos 7x \cos 3x - \sin 3x \sin 7x}{\sin 7x \cos 3x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos 10x}{\sin 7x \cos 3x} = 0 \Rightarrow \cos 10x = 0,$$

$$\sin 7x \cos 3x \neq 0, 10x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10} = \frac{\pi}{20}(2k+1), k \neq 5l+2,$$

так как в противном случае  $\cos 2x = 0$ .

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{20}(2k+1), k \neq 5l+2, k \text{ и } l \in Z$ .

**8.243.**  $\operatorname{ctg} \frac{z}{2} - \operatorname{tg} \frac{z}{2} + 4 \cos^{-1} 2z = \frac{4 \operatorname{tg} \frac{z}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} - 1}$ .

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin z \neq 0, \\ \operatorname{tg} \frac{z}{2} \neq \pm 1. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\cos \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} - \frac{\sin \frac{z}{2}}{\cos \frac{z}{2}} + \frac{4}{\cos 2z} + 2 \operatorname{tg} z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}} + \frac{4}{\cos 2z} + 2 \operatorname{tg} z = 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{ctg} z + 2 \operatorname{tg} z + \frac{4}{\cos 2z} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos z}{\sin z} + \frac{\sin z}{\cos z} + \frac{2}{\cos 2z} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\sin z \cos z} + \frac{2}{\cos 2z} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2z} + \frac{2}{\cos 2z} = 0 \Leftrightarrow \cos 2z + \sin 2z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2z = -1,$$

$$2z = -\frac{\pi}{4} + \pi k, z = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{8}(4k-1), k \in Z$$

*Ответ:*  $z = \frac{\pi}{8}(4k-1), k \in Z$

$$8.244. \operatorname{ctg}^4 x = \cos^2 2x - 1.$$

Решение.

ОДЗ:  $\sin x \neq 0$ .

Из условия имеем

$$\frac{(\cos^2 x)^2}{(\sin^2 x)^2} + 1 - \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right)^2}{\left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right)^2} + 1 - \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 + \cos 2x)^2}{(1 - \cos 2x)^2} + (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos 2x) \left( \frac{1 + \cos 2x}{(1 - \cos 2x)^2} + (1 - \cos 2x) \right) = 0.$$

Отсюда 1)  $1 + \cos 2x = 0$ , 2)  $\frac{1 + \cos 2x}{(1 - \cos 2x)^2} + (1 - \cos 2x) = 0$ .

Из первого уравнения находим

$$\cos 2x = -1, \quad 2x = \pi + 2\pi k, \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Умножив второе уравнение на  $(1 - \cos 2x)^2 \neq 0$ , имеем

$$1 + \cos 2x + (1 - \cos 2x)^3 = 0, \quad \emptyset.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.245. \frac{4 \sin^2 \frac{t}{2} - 1}{\cos t} = \operatorname{tg} t (1 - 2 \cos t).$$

Решение.

ОДЗ:  $\cos t \neq 0$ .

Так как  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ , то имеем:



$$\frac{2(1 - \cos t) - 1}{\cos t} - \frac{\sin t(1 - 2 \cos t)}{\cos t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 2 \cos t - \sin t(1 - 2 \cos t)}{\cos t} = 0 \Leftrightarrow (1 - 2 \cos t)(1 - \sin t) = 0,$$

при  $\cos t \neq 0$ . Тогда

$$1) 1 - 2 \cos t = 0, \cos t = \frac{1}{2}, t_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 1 - \sin t = 0, \sin t = 1, t_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; t_2 \text{ не подходит по ОДЗ.}$$

$$\text{Ответ: } t = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.246. 3 \sin^2 z \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} + z \right) - \frac{1}{2} \sin^2 2z - 5 \cos^4 z + 2 \cos 2z = 0.$$

*Решение.*

Из условия имеем:

$$6(\sin^2 z)^2 - (1 - \cos^2 2z) - 10(\cos^2 z)^2 + 4 \cos 2z = 0.$$

Так как  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$  и  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ , то получаем

$$6 \cdot \frac{1}{4}(1 - \cos 2z)^2 - 1 + \cos^2 2z - 10 \cdot \frac{1}{4}(1 + \cos 2z)^2 + 4 \cos 2z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(1 - \cos 2z)^2 - 2 + 2 \cos^2 2z - 5(1 + \cos 2z)^2 + 8 \cos 2z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2z = -\frac{1}{2}, 2z = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, z = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } z = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.247. \frac{\cos^3 3t}{\operatorname{tg} t} + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{tg} 3t} = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos t \neq 0, \\ \cos 3t \neq 0, \\ \operatorname{tg} t \neq 0, \\ \operatorname{tg} 3t \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\cos^2 3t \cos t}{\sin t} + \frac{\cos^2 t \cos 3t}{\sin 3t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 3t \cos t \sin 3t + \cos^2 t \cos 3t \sin t}{\sin t \sin 3t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 3t \cos t (\sin 3t \cos 3t + \sin t \cos t)}{\sin t \sin 3t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 3t \cos t (\sin 3t \cos 3t + \sin t \cos t) = 0.$$

Так как  $\cos 3t \neq 0, \cos t \neq 0$ , то

$$\sin 3t \cos 3t + \sin t \cos t = 0, \frac{\sin 6t}{2} + \frac{\sin 2t}{2} = 0,$$

$$\sin 6t + \sin 2t = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 4t \cos 2t = 0.$$

Тогда

$$\sin 4t = 0, 4t = \pi l, t_1 = \frac{\pi l}{4}, l \in \mathbb{Z}; \cos 2t = 0, 2t = \frac{\pi}{2} + \pi m,$$

$$t_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2} = \frac{\pi}{4}(2m+1), m \in \mathbb{Z}; t_1 \text{ не подходит по ОДЗ при } l = 2k, \text{ а}$$

при  $l = 2k + 1$  получаем серию  $t_2$ .

$$\text{Ответ: } t = \frac{\pi}{4}(2m+1), m \in \mathbb{Z}.$$

$$8.248. \frac{\sin 2t}{1 + \cos 2t} \cdot \frac{\sin t}{1 + \cos t} = \sin^{-1} t - 1.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin t \neq 0, \\ \cos 2t \neq -1, \\ \cos t \neq -1. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{2 \sin t \cos t}{1 + \cos^2 t - \sin^2 t} \cdot \frac{\sin t}{1 + \cos t} - \frac{1}{\sin t} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \sin t \cos t}{2 \cos^2 t} \cdot \frac{\sin t}{1 + \cos t} - \frac{1}{\sin t} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 t}{\cos t(1 + \cos t)} - \frac{1}{\sin t} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^3 t - \cos t - \cos^2 t + \sin t \cos t + \cos^2 t \sin t}{\cos t(1 + \cos t) \sin t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin^3 t + \cos^2 t \sin t) - \cos t + (\sin t \cos t - \cos^2 t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin t (\sin^2 t + \cos^2 t) - \cos t + \cos t (\sin t - \cos t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin t - \cos t) + \cos t (\sin t - \cos t) = 0 \Leftrightarrow (\sin t - \cos t)(1 + \cos t) = 0.$$

Тогда 1)  $\sin t - \cos t = 0$ , 2)  $1 + \cos t = 0$ . Разделив первое уравнение

на  $\cos t \neq 0$ , получим  $\operatorname{tg} t = 1$ ,  $t_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Из второго уравнения имеем  $\cos t = -1$ ,  $t_2 = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $t_2$  не подходит по ОДЗ.

*Ответ:*  $t = \frac{\pi}{4}(4k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**8.249.**  $\frac{\cos^4 2x + \sin^4 2x}{\cos^4 2x - \sin^4 2x} - \frac{1}{2} \cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^{-1} 4x.$

*Решение.*

ОДЗ:  $\begin{cases} \sin 4x \neq 0, \\ \cos^4 2x - \sin^4 2x \neq 0. \end{cases}$

Из условия имеем

$$\frac{(\cos^2 2x + \sin^2 2x)^2 - 2\cos^2 2x \cos^2 2x}{(\cos^2 2x + \sin^2 2x)(\cos^2 2x - \sin^2 2x)} - \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2 \sin 4x} = 0 \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - 4\sin^2 2x \cos^2 2x}{\cos^2 2x - \sin^2 2x} - \cos 4x - \frac{\sqrt{3}}{\sin 4x} = 0,$$

$$\frac{2 - \sin^2 4x}{\cos 4x} - \cos 4x - \frac{\sqrt{3}}{\sin 4x} = 0,$$

$$\frac{2 - (1 - \cos^2 4x) - \cos^2 4x}{\cos 4x} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 4x} = 0, \quad \frac{1}{\cos 4x} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 4x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x - \sqrt{3} \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} 4x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 4x = \frac{\pi}{3} + \pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi}{12}(3k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{12}(3k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$8.250. \cos^{-4} z = \frac{160}{9} - 2 \sin^{-2} z (\operatorname{ctg} 2z \operatorname{ctg} z + 1).$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 2z \neq 0, \\ \sin z \neq 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{1}{\cos^4 z} = \frac{160}{9} - \frac{2}{\sin^2 z} \cdot \left( \frac{\cos 2z \cos z}{\sin 2z \sin z} + 1 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^4 z} + \frac{2(\cos 2z \cos z + \sin 2z \sin z)}{\sin^2 z \cdot 2 \sin z \cos z \sin z} = \frac{160}{9}.$$

Так как  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ , то

$$\frac{1}{\cos^4 z} + \frac{\cos z}{\cos z \sin^4 z} = \frac{160}{9}, \quad \frac{1}{\cos^4 z} + \frac{1}{\sin^4 z} = \frac{160}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^4 z + \cos^4 z}{\sin^4 z \cos^4 z} = \frac{160}{9} \Leftrightarrow \frac{(\sin^2 z + \cos^2 z)^2 - 2 \sin^2 z \cos^2 z}{\sin^4 z \cos^4 z} = \frac{160}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 2 \sin^2 z \cos^2 z}{\sin^4 z \cos^4 z} = \frac{160}{9} \Leftrightarrow \frac{2 - 4 \sin^2 z \cos^2 z}{16 \sin^4 z \cos^4 z} = \frac{20}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sin^2 2z}{\sin^4 2z} - \frac{20}{9} = 0 \Leftrightarrow 20 \sin^4 2z + 9 \sin^2 2z - 18 = 0.$$

Решив это уравнение как биквадратное относительно  $\sin 2z$ , получим  $\sin 2z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $2z = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$ ,  $z = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Ответ: } z = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.251. \cos^{-3} t \sin^{-3} t - \operatorname{tg}^3 t - \operatorname{ctg}^3 t = 2\sqrt{3} \cos^{-1} 2t.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin 2t \neq 0, \\ \cos 2t \neq 0. \end{cases}$$

Так как  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ ,  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ ,  $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ , то

исходное уравнение принимает вид

$$\frac{8}{\sin^3 2t} - \frac{(1 - \cos 2t)^3}{\sin^3 2t} - \frac{(1 + \cos 2t)^3}{\sin^3 2t} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 2t},$$

$$\frac{8-1+3\cos 2t-3\cos^2 t+\cos^3 2t-1-3\cos 2t-3\cos^2 2t-\cos^3 2t}{\sin^3 2t} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 2t},$$

$$\frac{6(1-\cos^2 2t)}{\sin^3 2t} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 2t}, \quad \frac{3\sin^2 2t}{\sin^3 2t} = \frac{\sqrt{3}}{\cos 2t} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} 2t = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad 2t = \frac{\pi}{3} + \pi k,$$

$$t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{6}(3k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

*Ответ:*  $t = \frac{\pi}{6}(3k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$

**8.252.**  $(\sin x - \cos x)^2 + \operatorname{tg} x = 2 \sin^2 x$

*Решение.*

ОДЗ:  $\cos x \neq 0$ .

Так как  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$  и  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ , то имеем

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x + \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} - (1 - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} - 1 + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 2x + 1 - \cos 2x + \sin 2x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x - \cos 2x + \sin 2x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x - 1 + \sin 2x) = 0.$$

Отсюда 1)  $\cos 2x = 0$ , 2)  $\cos 2x - 1 + \sin 2x = 0$ .

Из первого уравнения находим

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{4}(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Второе уравнение запишем в виде

$$\cos^2 x - \sin^2 x - (\cos^2 x + \sin^2 x) + 2 \sin x \cos x = 0,$$

$$-2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow -2 \sin x(\sin x - \cos x) = 0.$$

Получаем  $\sin x = 0$ ,  $x_2 = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $x_2$  не удовлетворяет уравнению;

$$\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1, \quad x_3 = \frac{\pi}{4} + \pi l = \frac{\pi}{4}(4l+1), \quad l \in \mathbb{Z}; \quad x_3 \text{ не входит в } x_1.$$

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{4}(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$

$$8.253. \sin 3t - \sin t = \frac{8 \cos t \operatorname{ctg} 2t}{4 - \sin^{-2} t}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin 2t \neq 0, \\ \sin t \neq \pm \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Так как  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ , то имеем

$$2 \sin t \cos 2t = \frac{\frac{8 \cos t \cos 2t}{\sin 2t}}{4 - \frac{1}{\sin^2 t}} \Leftrightarrow 2 \sin t \cos 2t - \frac{8 \cos t \cos 2t \sin^2 t}{2 \sin t \cos t (4 \sin^2 t - 1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin t \cos 2t \cdot \left(1 - \frac{2}{4 \sin^2 t - 1}\right) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos 2t = 0, 2t = \frac{\pi}{2} + \pi k, t_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{4}(2k + 1), k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 1 - \frac{2}{4 \sin^2 t - 1} = 0, \sin^2 t = \frac{3}{4}, \sin t = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, t_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $t_1 = \frac{\pi}{4}(2k + 1), t_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi l$ , где  $k$  и  $l \in \mathbb{Z}$ .

$$8.254. \sin^2 2x \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) + 3 \sin 2x \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) + 2 \cos^3 2x = 0.$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$-\sin^2 2x \sin 2x + 3 \sin 2x \cos^2 2x + 2 \cos^3 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 2x - 3 \sin 2x \cos^2 2x - 2 \cos^3 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 2x - 3 \operatorname{tg} 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{tg}^3 2x - 2 \operatorname{tg} 2x) - 2(\operatorname{tg} 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x (\operatorname{tg} 2x - 1)(\operatorname{tg} 2x + 1) - 2(\operatorname{tg} 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg} 2x + 1)(\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x - 2) = 0.$$

Отсюда

$$1) \operatorname{tg} 2x + 1 = 0, \operatorname{tg} 2x = -1, 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, x_1 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{8}(4k - 1),$$

$$k \in \mathbb{Z};$$

2)  $\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x - 2 = 0$ . Решив это уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg} 2x$ , получаем  $\operatorname{tg} 2x = -1$ ,  $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi l$ ,  $x_2 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{2}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ;

$$\operatorname{tg} 2x = 2, 2x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, x_3 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; x_1 = x_2.$$

Ответ:  $x_1 = \frac{\pi}{8}(4k-1)$ ;  $x_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

**8.255.**  $\operatorname{tg}(x+1) \operatorname{ctg}(2x+3) = 1$ .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos(x+1) \neq 0, \\ \sin(2x+3) \neq 0. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$\operatorname{tg}(x+1) = \operatorname{tg}(2x+3) \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x+1) - \operatorname{tg}(2x+3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\sin(x+2)}{\cos(x+1)\cos(2x+3)} = 0 \Rightarrow \sin(x+2) = 0, x+2 = \pi k,$$

$$x = -2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = -2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

**8.256.**  $\frac{4 \sin^4 z}{(1 + \cos 2z)^2} - 2 \cos^{-2} z - 1 = 0$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos z \neq 0, \\ \cos 2z \neq -1. \end{cases}$$

$$\text{Имеем } \frac{4(\sin^2 z)^2}{(1 + \cos 2z)^2} - \frac{2}{\cos^2 z} - 1 = 0.$$

Так как  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$  и  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ , то уравнение принимает вид

$$\frac{4\left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2z)\right)^2}{(1 + \cos 2z)^2} - \frac{2}{\frac{1}{2}(1 + \cos 2z)} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \cos 2z)^2}{(1 + \cos 2z)^2} - \frac{4}{1 + \cos 2z} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \cos 2z)^2 - 4(1 + \cos 2z) - (1 + \cos 2z)^2}{(1 + \cos 2z)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos 2z)^2 - 4(1 + \cos 2z) - (1 + \cos 2z)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos 2z = -\frac{1}{2}, \quad 2z = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \quad z = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

*Ответ:*  $z = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}$ .

**8.257.**  $\operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{z}{2} - 2 = 4 \operatorname{tg} z$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $\begin{cases} \cos z \neq 0, \\ \sin z \neq 0. \end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\left( \operatorname{tg} \frac{z}{2} + \operatorname{ctg} \frac{z}{2} \right)^2 - 2 \operatorname{tg} \frac{z}{2} \operatorname{ctg} \frac{z}{2} - 2 - 4 \operatorname{tg} z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\sin \frac{z}{2}}{\cos \frac{z}{2}} + \frac{\cos \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \right)^2 - 4 - \frac{4 \sin z}{\cos z} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\sin^2 \frac{z}{2} + \cos^2 \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}} \right)^2 - 4 - \frac{4 \sin z}{\cos z} = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 z} - 4 - \frac{4 \sin z}{\cos z} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos z - \sin^2 z \cos z - \sin^3 z = 0 \Leftrightarrow \cos z (1 - \sin^2 z) - \sin^3 z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 z - \sin^3 z = 0 \Leftrightarrow (\cos z - \sin z)(\cos^2 z + \sin z \cos z + \sin^2 z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos z - \sin z)(1 + \sin z \cos z) = 0.$$

Отсюда

1)  $\cos z - \sin z = 0, \operatorname{tg} z = 1, z_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{4}(4n + 1), \quad n \in \mathbb{Z};$

2)  $1 + \sin z \cos z = 0, \frac{1}{2} \sin 2z = -1, \sin 2z = -2, \emptyset.$

*Ответ:*  $z = \frac{\pi}{4}(4n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}.$



$$8.258. \cos^3 z \cos 3z + \sin^3 z \sin 3z = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 z (2 \cos z \cos 3z) + \sin^2 z (2 \sin z \sin 3z) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так как

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \text{ и}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)), \text{ то имеем}$$

$$\cos^2 z (\cos 2z + \cos 4z) + \sin^2 z (\cos 2z - \cos 4z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 z \cos 2z + \sin^2 z \cos 2z) + (\cos^2 z \cos 4z - \sin^2 z \cos 4z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2z (\cos^2 z + \sin^2 z) + \cos 4z (\cos^2 z - \sin^2 z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2z + \cos 4z \cos 2z = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 2z (1 + \cos 4z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2z (1 + 2 \cos^2 2z - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2 \cos^3 2z = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos^3 2z = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2z = \frac{\sqrt{2}}{2}, 2z = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, z = \pm \frac{\pi}{8} + \pi k = \frac{\pi}{8} (8k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $z = \frac{\pi}{8} (8k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$

$$8.259. \operatorname{ctg} x = \frac{\sin^2 x - 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - x \right)}{\cos^2 x + 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + x \right)}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \sin x \neq 0, \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos \left( \frac{\pi}{4} + x \right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pi n, \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pi n.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + x \right)}{\cos^2 x + 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + x \right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x + 2 \cos x \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + x \right) - \sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x - \sin^3 x + 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right)^2 (\cos x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x) + (\cos x - \sin x)^2 \times \\ \times (\cos x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x) \cos x (2 \cos x + \sin x) = 0.$$

Отсюда

1)  $\cos x - \sin x = 0$ ,  $\sin x = \cos x$ ,  $\operatorname{tg} x = 1$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi l = \frac{\pi}{4}(4l+1)$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ;

2)  $2 \cos x + \sin x = 0$ ,  $\operatorname{tg} x = -2$ ,  $x_2 = -\arctg 2 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

3)  $\cos x = 0$ ;  $x_3 = \frac{\pi}{2}(2m+1)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:

$$x_1 = \frac{\pi}{4}(4l+1), x_2 = -\arctg 2 + \pi n, x_3 = \frac{\pi}{2}(2m+1), \text{ где } l, n \text{ и } m \in \mathbb{Z}.$$

8.260.  $\frac{1}{\operatorname{tg} 3z + \operatorname{tg} 4z} + \operatorname{ctg}^2 7z = \frac{1}{\operatorname{ctg} 3z + \operatorname{ctg} 4z}.$

Решение.

$$\text{ОДЗ. } \begin{cases} \operatorname{tg} 3z + \operatorname{tg} 4z \neq 0, \\ \operatorname{ctg} 3z + \operatorname{ctg} 4z \neq 0, \\ \sin 6z \neq 0, \\ \sin 8z \neq 0. \end{cases}$$

По формулам  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$  получаем

$$\frac{1}{\cos 3z \cos 4z} + \frac{\cos^2 7z}{\sin^2 7z} = \frac{1}{\sin 3z \sin 4z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos 3z \cos 4z}{\sin 7z} + \frac{\cos^2 7z}{\sin^2 7z} = \frac{\sin 3z \sin 4z}{\sin 7z}, \\ \sin 7z \neq 0, \\ \cos 3z \neq 0, \\ \cos 4z \neq 0, \\ \sin 3z \neq 0, \\ \sin 4z \neq 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos 3z \cos 4z}{\sin 7z} - \frac{\sin 3z \sin 4z}{\sin 7z} + \frac{\cos^2 7z}{\sin^2 7z} = 0, \\ 7z \neq \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}, \\ 3z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z}, \\ 4z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k_3, k_3 \in \mathbb{Z}, \\ 3z \neq \pi k_4, k_4 \in \mathbb{Z}, \\ 4z \neq \pi k_5, k_5 \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos 3z \cos 4z - \sin 3z \sin 4z}{\sin 7z} + \frac{\cos^2 7z}{\sin^2 7z} = 0, \\ z \neq \frac{\pi k_1}{7}, k_1 \in \mathbb{Z}, \\ z \neq \frac{\pi}{6}(2k_2 + 1), k_2 \in \mathbb{Z}, \\ z \neq \frac{\pi}{8}(2k_3 + 1), k_3 \in \mathbb{Z}, \\ z \neq \frac{\pi k_4}{3}, k_4 \in \mathbb{Z}, \\ z \neq \frac{\pi k_5}{4}, k_5 \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos 7z}{\sin 7z} + \frac{\cos^2 7z}{\sin^2 7z} = 0, \\ z \neq \frac{\pi k_1}{7}, k_1 \in \mathbb{Z}, \\ z \neq \frac{\pi k_6}{6}, k_6 \in \mathbb{Z}, \\ z \neq \frac{\pi k_7}{8}, k_7 \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

$$\frac{\sin 7z \cos 7z + \cos^2 7z}{\sin^2 7z} = 0, \quad \frac{\cos 7z(\sin 7z + \cos 7z)}{\sin^2 7z} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 7z(\sin 7z + \cos 7z) = 0.$$

Тогда

$$1) \cos 7z = 0, \quad 7z = \frac{\pi}{2} + \pi k_8, \quad z_1 = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k_8}{7} = \frac{\pi}{14}(2k_8 + 1), \quad k_8 \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin 7z + \cos 7z = 0 \Leftrightarrow 1 + \operatorname{ctg} 7z = 0, \quad \operatorname{ctg} 7z = -1, \quad 7z = \frac{3\pi}{4} + \pi k_9,$$

$$z_2 = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k_9}{7} = \frac{\pi}{28}(4k_9 + 3), \quad k_9 \in \mathbb{Z}.$$

Исключим из решений  $z_1 = \frac{\pi}{14}(2k_8 + 1), k_8 \in \mathbb{Z}$  те из них, которые удовлетворяют условиям  $z = \frac{\pi k_1}{7}, k_1 \in \mathbb{Z}, z = \frac{\pi k_6}{6}, k_6 \in \mathbb{Z}$  и  $z = \frac{\pi k_7}{8}, k_7 \in \mathbb{Z}$ .

Имеем:

1)  $\frac{\pi}{14}(2k_8 + 1) \neq \frac{\pi k_1}{7}, 2k_8 + 1 \neq 2k_1$ , что истинно для всех  $k_8 \in \mathbb{Z}$  и  $k_1 \in \mathbb{Z}$ , так как левая часть неравенства нечетная, а правая — четная;

2)  $\frac{\pi}{14}(2k_8 + 1) \neq \frac{\pi k_6}{6}, 6k_8 + 3 \neq 7k_6$ , что верно для  $k_6 = 6k_{10} + 3, k_{10} \in \mathbb{Z}$ .

Тогда  $6k_8 + 3 \neq 7(6k_{10} + 3)$ , откуда  $k_8 \neq 7k_{10} + 3$ ;

3)  $\frac{\pi}{14}(2k_8 + 1) \neq \frac{\pi k_7}{8}, 8k_8 + 4 \neq 7k_7$ , что истинно для  $k_7 = 8k_{10} + 4, k_{10} \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $8k_8 + 4 \neq 7(8k_{10} + 4)$ , откуда  $k_8 \neq 7k_{10} + 3$ .

Получили  $z_1 = \frac{\pi}{14}(2k_8 + 1)$ , где  $2k_8 + 1 \neq 7k_{10}, k_8, k_{10} \in \mathbb{Z}$ .

Теперь исключаем из решений  $z_2 = \frac{\pi}{28}(4k_9 + 3), k_9 \in \mathbb{Z}$  те из них, которые удовлетворяют условиям  $z = \frac{\pi k_1}{7}, k_1 \in \mathbb{Z}, z = \frac{\pi k_6}{6}, k_6 \in \mathbb{Z}$  и  $z = \frac{\pi k_7}{8}, k_7 \in \mathbb{Z}$ .

Имеем:

$$1) \frac{\pi}{28}(4k_9 + 3) \neq \frac{\pi k_1}{7}, 4k_9 + 3 \neq 4k_1, \text{ что истинно для всех } k_9 \in \mathbb{Z} \text{ и}$$

$k_1 \in \mathbb{Z}$ , так как левая часть неравенства нечетная, а правая — четная;

$$2) \frac{\pi}{28}(4k_9 + 3) \neq \frac{\pi k_6}{6}, 12k_9 + 9 \neq 14k_6, \text{ что верно для всех } k_9 \in \mathbb{Z} \text{ и}$$

$k_6 \in \mathbb{Z}$ ;

$$3) \frac{\pi}{28}(4k_9 + 3) \neq \frac{\pi k_7}{8}, 8k_9 + 6 \neq 7k_7. \text{ Можно показать, что}$$

$k_7 = 8k_{11} + 2, k_{11} \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $k_9 \neq 7k_{11} + 1, k_{11} \in \mathbb{Z}$ .

Получили  $z_2 = \frac{3\pi}{28}(4k_9 + 3)$ , где  $4k_9 + 3 \neq 7k_{11}, k_9, k_{11} \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Ответ: } z_1 = \frac{\pi}{14}(2k + 1), 2k + 1 \neq 7l; z_2 = \frac{\pi}{28}(3 + 4k), 3 + 4k \neq 7l, k \text{ и}$$

$l \in \mathbb{Z}, l = \pm 1, \pm 3, \dots$

$$\mathbf{8.261.} \quad (2 \cos 2t + 5) \cos^4 t - (2 \cos 2t + 5) \sin^4 t = 3.$$

*Решение.*

Из условия имеем:

$$(2 \cos 2t + 5)(\cos^4 t - \sin^4 t) - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos 2t + 5)(\cos^2 t + \sin^2 t)(\cos^2 t - \sin^2 t) - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos 2t + 5) \cos 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 2t + 5 \cos 2t - 3 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\cos 2t$ , находим

$$\cos 2t = -3, \emptyset; \cos 2t = \frac{1}{2}, 2t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, t = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } t = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{8.262.} \quad \operatorname{tg} z \operatorname{tg}(z + 60^\circ) \operatorname{tg}(z + 120^\circ) = \sqrt{3}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos z \neq 0, \\ \cos(z + 60^\circ) \neq 0, \\ \cos(z + 120^\circ) \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\sin z \sin(z + 60^\circ) \sin(z + 120^\circ)}{\cos z \cos(z + 60^\circ) \cos(z + 120^\circ)} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin z (2 \sin(z + 60^\circ) \sin(z + 120^\circ)) - \sqrt{3} \cdot \cos z (2 \cos(z + 60^\circ) \cos(z + 120^\circ)) = 0.$$

По формулам

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

и

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

имеем:

$$\sin z (\cos(-60^\circ) - \cos(180^\circ + 2z)) - \sqrt{3} \cos z \cdot (\cos(-60^\circ) + \cos(180^\circ + 2z)) = 0,$$

$$\sin z \left( \frac{1}{2} + \cos 2z \right) - \sqrt{3} \cos z \left( \frac{1}{2} - \cos 2z \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin z}{2} + \sin z \cos 2z - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos z + \sqrt{3} \cos z \cos 2z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin z + 2 \sin z \cos 2z - \sqrt{3} \cos z + \sqrt{3} (2 \cos z \cos 2z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin z - \sin z + \sin 3z - \sqrt{3} \cos z + \sqrt{3} \cos z + \sqrt{3} \cos 3z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 3z + \sqrt{3} \cos 3z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} 3z = -\sqrt{3}, 3z = -60^\circ + 180^\circ k,$$

$$z = -20^\circ + 60^\circ k,$$

Ответ:  $z = -20^\circ + 60^\circ k, k \in \mathbb{Z}$ .

**8.263.**  $\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2.$

Решение.

Уравнение равносильно системе двух уравнений

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \cos \frac{5x}{2} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{5x}{2} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{4\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 6m, \\ n = 5m. \end{cases}$$

$$\frac{2\pi k}{3} = \frac{4\pi n}{5}, 5\pi k = 6\pi n, 5k = 6n.$$

Ответ:  $x = 4\pi m, m \in \mathbb{Z}$ .

$$8.264. 1 - \frac{2(\cos 2t - \operatorname{tg} t \sin 2t)}{\cos^{-2} t} = \sin^4 t - \cos^4 t.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $\cos t \neq 0$ .

Перепишем уравнение в виде

$$1 - \frac{2\left(\cos 2t - \frac{\sin t}{\cos t} \cdot 2 \sin t \cos t\right)}{\frac{1}{\cos^2 t}} + (\sin^4 t - \cos^4 t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2(\cos 2t - 2 \sin^2 t) \cos^2 t + (\cos^2 t - \sin^2 t)(\cos^2 t + \sin^2 t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - (\cos 2t - (1 - \cos 2t))(1 + \cos 2t) + \cos 2t = 0,$$

$$1 - (2 \cos 2t - 1)(1 + \cos 2t) + \cos 2t = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2t = 1, \cos 2t = \pm 1,$$

$$2t = \pi k, t = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая ОДЗ,  $t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.265. 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = \cos 2x.$$

*Решение.*

Имеем

$$2\left((\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3\right) - 3\left((\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2\right) - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) - 3\left((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \right.$$

$$\left. - 2 \sin^2 x \cos^2 x\right) - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\left((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x\right) -$$

$$- 3(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2 - 6 \sin^2 x \cos^2 x - 3 + 6 \sin^2 x \times$$

$$\times \cos^2 x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -1, 2x = \pi + 2\pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.266. \cos^3 x + \frac{1}{2} \sin 2x - \cos x \sin^3 x + 4 \sin x + 4 = 0.$$

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде

$$\cos^3 x + \sin x \cos x - \cos x \sin x \sin^2 x + 4(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x + \sin x \cos x (1 - \sin^2 x) + 4(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x + \sin x \cos^3 x + 4(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x (1 + \sin x) + 4(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(\cos^3 x + 4) = 0.$$

Отсюда

$$\sin x + 1 = 0, \sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(4k - 1), k \in \mathbb{Z}, \cos^3 x + 4 \neq 0.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2}(4k - 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.267. \frac{2(\cos^3 x + 2 \sin^3 x)}{2 \sin x + 3 \cos x} = \sin 2x.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } 2 \sin x + 3 \cos x \neq 0.$$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{2(\cos^3 x + 2 \sin^3 x)}{2 \sin x + 3 \cos x} - 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^3 x + 4 \sin^3 x - 4 \sin^2 x \cos x - 6 \sin x \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^3 x - 2 \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x + \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Пусть  $\operatorname{tg} x = y$ . Имеем

$$2y^3 - 2y^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y^3 + 1) + y^2(y + 1) - 3y(y + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y + 1)(y^2 - y + 1) + y^2(y + 1) - 3y(y + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y + 1)(y^2 - y + 1 + y^2 - 3y) = 0, (y + 1)(2y^2 - 4y + 1) = 0.$$

$$\text{Отсюда } y + 1 = 0, y_1 = -1; 2y^2 - 4y + 1 = 0, y_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; y_3 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Получили

$$\operatorname{tg} x = -1, \quad x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k-1), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_3 = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1); \quad x_2 = \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n; \quad x_3 = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi l,$$

где  $k, n$  и  $l \in \mathbb{Z}$

$$8.268. \quad \operatorname{tg} \frac{3x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2 \sin x.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos \frac{3x}{2} \neq 0, \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0. \end{cases}$$

По формуле  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ , имеем

$$\frac{\sin x}{\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}} - 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}} - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{3x}{2}} - 2 \cos \frac{x}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} \left( 1 - 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} (1 - \cos x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} \cdot (1 - \cos x - 2 \cos^2 x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin \frac{x}{2} \cdot (2 \cos^2 x + \cos x - 2) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin \frac{x}{2} = 0, \quad \frac{x}{2} = \pi k, \quad x_1 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2 \cos^2 x + \cos x - 2 = 0. \text{ Решив уравнение как квадратное относи-}$$

тельно  $\cos x$ , получаем  $\cos x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} < -1$ ,  $\emptyset$ ; или  $\cos x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$ ,

$$x_2 = \pm \arccos \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x_1 = 2\pi k$ ,  $x_2 = \pm \arccos \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} + 2\pi n$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.269. \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} + \frac{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = 1.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 2x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{1 + \frac{\sin x \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \frac{\cos x \cos \frac{x}{2} + \sin x \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} \times \\ & \times \frac{\sin x \cos \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2} + \sin x \sin \frac{x}{2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 3 \cos x \sin x - \sin^2 x = 0, \Leftrightarrow \sin x (3 \cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 3 \cos x - \sin x = 0, \operatorname{tg} x = 3, x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ:  $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.270. \sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + 0,375 = 0.$$

*Решение.*

Имеем  $\sin^2 x(2 \sin x \cos 3x) + \cos^2 x(2 \cos x \sin 3x) + 2 \cdot 0,375 = 0$ . По фор-

муле  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$ , находим

$$\begin{aligned} \sin^2 x(-\sin 2x + \sin 4x) + \cos^2 x(\sin 2x + \sin 4x) + 0,75 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\sin^2 x \sin 2x + \sin^2 x \sin 4x + \cos^2 x \sin 2x + \cos^2 x \sin 4x + 0,75 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-\sin^2 x \sin 2x + \cos^2 x \sin 2x) + (\sin^2 x \sin 4x + \cos^2 x \sin 4x) + 0,75 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin 2x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin 4x(\sin^2 x + \cos^2 x) + 0,75 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin 4x + 2 \sin 4x + 1,5 = 0, \quad 3 \sin 4x = -1,5, \quad \sin 4x = -\frac{1}{2}, \\ 4x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$

$$8.271. \sin 2z + 5(\sin z + \cos z) + 1 = 0.$$

*Решение.*

Из условия имеем  $2 \sin z \cos z + 5(\sin z + \cos z) + 1 = 0$ .

Пусть  $\sin z + \cos z = y$ , тогда  $\sin^2 z + 2 \sin z \cos z + \cos^2 z = y^2$ , и уравнение примет вид

$$y^2 - 1 + 5y + 1 = 0, \quad y^2 + 5y = 0, \quad y(y + 5) = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = -5,$$

$$2 \sin z \cos z = -1, \quad \sin 2z = -1, \quad 2z_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$z_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{\pi}{4}(4k - 1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 2 \sin z \cos z = 24, \quad \sin 2z = 24, \quad \emptyset.$$

*Ответ:*  $z = \frac{\pi}{4}(4k - 1), k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.272. \sin^3 2t + \cos^3 2t + \frac{1}{2} \sin 4t = 1.$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$(\sin 2t + \cos 2t)(\sin^2 2t - \sin 2t \cos 2t + \cos^2 2t) + \sin 2t \cos 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin 2t + \cos 2t)(1 - \sin 2t \cos 2t) - (1 - \sin 2t \cos 2t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin 2t \cos 2t)(\sin 2t + \cos 2t - 1) = 0.$$

Отсюда

$$\text{I) } 1 - \sin 2t \cos 2t = 0, \quad \frac{1}{2} \sin 4t = 1, \quad \sin 4t = 2, \quad \emptyset;$$

$$\text{II) } \sin 2t + \cos 2t - 1 = 0, \quad 2 \sin t \cos t + \cos^2 t - \sin^2 t - \cos^2 t - \sin^2 t = 0,$$

$$\sin t \cos t - 2 \sin^2 t = 0, \quad 2 \sin t (\cos t - \sin t) = 0 \Rightarrow$$

$$1) \sin t = 0, \quad t_1 = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos t - \sin t = 0, \quad \operatorname{tg} t = 1, \quad t_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{4}(4n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } t_1 = \pi k, \quad t_2 = \frac{\pi}{4}(4n+1), \quad \text{где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.273. \operatorname{tg} z \operatorname{tg} 2z = \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} 2z.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos z \neq 0, \\ \cos 2z \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\sin z \sin 2z}{\cos z \cos 2z} = \frac{\sin z}{\cos z} + \frac{\sin 2z}{\cos 2z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin z \sin 2z}{\cos z \cos 2z} = \frac{\sin z \cos 2z + \cos z \sin 2z}{\cos z \cos 2z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin z \sin 2z = \sin z \cos 2z + \cos z \sin 2z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin z \cdot 2 \sin z \cos z - \sin z (\cos^2 z - \sin^2 z) - \cos z \cdot 2 \sin z \cos z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin z (2 \sin z \cos z - \cos^2 z + \sin^2 z - 2 \cos^2 z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin z (2 \sin z \cos z - 3 \cos^2 z + \sin^2 z) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin z = 0, \quad z_1 = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2 \sin z \cos z - 3 \cos^2 z + \sin^2 z = 0.$$

Разделив это уравнение на  $\cos^2 z \neq 0$ , имеем

$$\operatorname{tg}^2 z + 2 \operatorname{tg} z - 3 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg} z$ , получим

$\operatorname{tg} z = -3$ ,  $z_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $\operatorname{tg} z = 1$ ,  $z_3 = \frac{\pi}{4} + \pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ;  $z_3$  не подходит по ОДЗ.

Ответ:  $z_1 = \pi k$ ,  $z_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.274. \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2 \cos x - \sin x} = \cos 2x.$$

Решение.

ОДЗ:  $2 \cos x - \sin x \neq 0$ .

Из условия имеем

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2 \cos x - \sin x} - \cos^2 x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x - 2 \cos^3 x + 2 \cos x \sin^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x \sin^2 x + \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow \cos^3 x (2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos x = 0, x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z};$$

2)  $2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$ . Решив это уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg} x$ , получим  $\operatorname{tg} x = -1$ ,  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ , откуда  $x_2 = \frac{\pi}{4}(4n-1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$x_3 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z},$$

Ответ:  $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{4}(4n-1)$ ,  $x_3 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi l$ , где  $k, n$  и  $l \in \mathbb{Z}$ .

$$8.275. \frac{\operatorname{ctg} 4t}{\sin^2 t} + \frac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 4t} = 0.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin t \neq 0, \\ \sin 4t \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\frac{\cos 4t}{\sin 4t}}{\sin^2 t} + \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\sin^2 4t} = 0, \frac{\cos 4t}{\sin 4t \sin^2 t} + \frac{\cos t}{\sin t \sin^2 4t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4t \cos 4t + \sin t \cos t = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 8t}{2} + \frac{\sin 2t}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 8t + \sin 2t = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 5t \cos 3t = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin 5t = 0, \quad 5t = \pi k, \quad t_1 = \frac{\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos 3t = 0, \quad 3t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad t_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} = \frac{\pi}{6}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая ОДЗ, получим

$$t_1 = \frac{\pi k}{5}, \quad k \neq 5l; \quad t_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} = \frac{\pi}{6}(2n+1), \quad n \neq 3l+1, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } t_1 = \frac{\pi k}{5}, \quad k \neq 5l; \quad t_2 = \frac{\pi}{6}(2n+1), \quad n \neq 3l+1, \quad \text{где } k, n \text{ и } l \in \mathbb{Z}.$$

$$8.276. \quad \operatorname{tg}^4 x = 36 \cos^2 2x.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \cos x \neq 0.$$

Из условия имеем

$$\frac{(\sin^2 x)^2}{(\cos^2 x)^2} - 36 \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{(1 - \cos 2x)^2}{(1 + \cos 2x)^2} - 36 \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)^2 - 36 \cos^2 2x (1 + \cos 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)^2 = 36 \cos^2 2x (1 + \cos 2x)^2.$$

Отсюда

$$1 - \cos 2x = -6 \cos 2x (1 + \cos 2x)$$

или

$$1 - \cos 2x = 6 \cos 2x (1 + \cos 2x), \quad 6 \cos^2 2x + 5 \cos 2x + 1 = 0$$

или

$$6 \cos^2 2x + 7 \cos 2x - 1 = 0.$$

Решив эти уравнения как квадратные относительно  $\cos 2x$ , получим

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}, \quad 2x_1 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{3}, \quad 2x_2 = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, \quad x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos 2x = \frac{-7 + \sqrt{73}}{12}, \quad 2x_3 = \pm \arccos \frac{-7 + \sqrt{73}}{12} + 2\pi l,$$

$$x_3 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-7 + \sqrt{73}}{12} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}; \quad \cos 2x = \frac{-7 - \sqrt{73}}{12} < -1, \quad \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{1}{3} \right) + \pi n,$$

$$x_3 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-7 + \sqrt{73}}{12} + \pi l, \quad \text{где } k, n \text{ и } l \in \mathbb{Z}.$$

**8.277.**  $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x + 8 = 0.$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0, \\ \cos 4x \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\left( \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left( \frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \right) - 4\operatorname{tg} 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\cos^2 2x - \sin^2 2x)}{\sin 2x \cos 2x} - 4\operatorname{tg} 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 \cos 4x}{\sin 4x} - 4\operatorname{tg} 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos 4x}{\sin 4x} - \frac{\sin 4x}{\cos 4x} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 4x - \sin^2 4x}{\sin 4x \cos 4x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cos 8x}{\sin 8x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{ctg} 8x = -1, \quad 8x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad x = \frac{3\pi}{32} + \frac{\pi k}{8} = \frac{\pi}{32}(4k + 3), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{32}(4k + 3), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$8.278. 4 \sin^3 x \cos 3x + 4 \cos^3 x \sin 3x = 3 \sin 2x.$$

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} & 2 \sin^2 x (2 \sin x \cos 3x) + 2 \cos^2 x (2 \sin 3x \cos x) - 3 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2 \sin^2 x (-\sin 2x + \sin 4x) + 2 \cos^2 x (\sin 2x + \sin 4x) - 3 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -2 \sin^2 x \sin 2x + 2 \sin^2 x \sin 4x + 2 \cos^2 x \sin 2x + 2 \cos^2 x \sin 4x - \\ & - 3 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (2 \cos^2 x \sin 2x - 2 \sin^2 x \sin 2x) + (2 \sin^2 x \sin 4x + 2 \cos^2 x \sin 4x) - \\ & - 3 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \sin 4x (\sin^2 x + \cos^2 x) - \\ & - 3 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos 2x + 2 \sin 4x - 3 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sin 4x - \sin 2x = 0. \text{ Отсюда} \end{aligned}$$

$$1) \cos 3x = 0, 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} = \frac{\pi}{6} (2n+1), n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin x = 0, x = \pi k, x_2 = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{6} (2n+1), n \in \mathbb{Z}; x_2 = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.279. 2 \cos z \sin^3 \left( \frac{3\pi}{2} - z \right) - 5 \sin^2 z \cos^2 z + \sin z \cos^3 \left( \frac{3\pi}{2} + z \right) = \cos 2z.$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$\begin{aligned} & -2 \cos z \cos^3 z - 5 \sin^2 z \cos^2 z + \sin z \sin^3 z - \cos 2z = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -2 \cos^4 z - 5 \sin^2 z \cos^2 z + \sin^4 z - \cos 2z = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -2(1 - \sin^2 z)^2 - 5 \sin^2 z (1 - \sin^2 z) + \sin^4 z - (1 - \sin^2 z) + \sin^2 z = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -2 + 4 \sin^2 z - 2 \sin^4 z - 5 \sin^2 z + 5 \sin^4 z + \sin^4 z - 1 + \sin^2 z + \sin^2 z = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 4 \sin^4 z + \sin^2 z - 3 = 0. \end{aligned}$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\sin^2 z$ , получим

$$\sin^2 z = -1, \emptyset; \sin^2 z = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n = \frac{\pi}{3} (3n \pm 1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } z = \frac{\pi}{3} (3n \pm 1), n \in \mathbb{Z}.$$



$$8.280. \sin 2x \sin 6x \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 12x = 0.$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$(2 \sin 2x \sin 6x) \cos 4x + \cos 12x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos 4x - \cos 8x) \cos 4x + \cos 12x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 4x - 2 \cos 8x \cos 4x + \cos 12x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 4x - \cos 4x - \cos 12x + \cos 12x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 4x - \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x (2 \cos 4x - 1) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos 4x = 0, 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi}{8} (2k + 1), k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2 \cos 4x - 1 = 0, \cos 4x = \frac{1}{2}, 4x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x_2 = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{12} (6n \pm 1), n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi}{8} (2k + 1); x_2 = \frac{\pi}{12} (6n \pm 1)$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.281. 2 \sin 2x + 3 \operatorname{tg} x = 5.$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$\frac{4 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 3 \operatorname{tg} x - 5 = 0 \Leftrightarrow 3 \operatorname{tg}^3 x - 5 \operatorname{tg}^2 x + 7 \operatorname{tg} x - 5 = 0,$$

$$3 \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{tg} x - 5 = 0,$$

$$3 \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x - 1) - 2 \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 1) + 5 (\operatorname{tg} x - 1) = 0,$$

$$(\operatorname{tg} x - 1) (3 \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 5) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1, x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4} (4k + 1),$$

$$k \in \mathbb{Z}; 3 \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 5 \neq 0 \quad (D < 0), \emptyset.$$

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{4} (4k + 1), k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.282. 5\sin^4 2z - 4\sin^2 2z \cos^2 2z - \cos^4 2z + 4\cos 4z = 0.$$

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде

$$5(\sin^2 2z)^2 - \sin^2 4z - (\cos^2 2z)^2 + 4\cos 4z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 4z)\right)^2 - (1 - \cos^2 4z) - \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 4z)\right)^2 + 4\cos 4z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 4z + \cos 4z = 0, \cos 4z(2\cos 4z + 1) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos 4z = 0, 4z = \frac{\pi}{2} + \pi k, z_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi}{8}(2k + 1), k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2\cos 4z + 1 = 0, \cos 4z = -\frac{1}{2}, 4z = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n,$$

$$z_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{6}(3n \pm 1), n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $z_1 = \frac{\pi}{8}(2k + 1); z_2 = \frac{\pi}{6}(3n \pm 1)$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.283. 1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 5x - \sqrt{2} \operatorname{tg} 2x \cos 3x \cos^{-1} 5x = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 2x \neq 0, \\ \cos 5x \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\left(1 + \frac{\sin 2x \sin 5x}{\cos 2x \cos 5x}\right) - \frac{\sqrt{2} \sin 2x \cos 3x}{\cos 2x \cos 5x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x \cos 5x + \sin 2x \sin 5x}{\cos 2x \cos 5x} - \frac{\sqrt{2} \sin 2x \cos 3x}{\cos 2x \cos 5x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x - \sqrt{2} \sin 2x \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x(1 - \sqrt{2} \sin 2x) = 0.$$

Отсюда 1)  $\cos 3x = 0$ , 2)  $1 - \sqrt{2} \sin 2x = 0$ .

$$1) \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = 0, \cos x(4\cos^2 x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x \neq 0), \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) 1 - \sqrt{2} \sin 2x = 0, \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}, 2x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1), x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$ , где  $n$  и  $k \in \mathbb{Z}$ .

**8.284.**  $\cos^6 x + \sin^6 x - \cos^2 2x = \frac{1}{16}$ .

*Решение.*

Имеем

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) - \cos^2 2x - \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 3\cos^2 x \sin^2 x - \cos^2 2x - \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 - 12(4\cos^2 x \sin^2 x) - 16\cos^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 - 12\sin^2 2x - 16\cos^2 2x - 1 = 0,$$

$$15 - 12(1 - \cos^2 2x) - 16\cos^2 2x = 0,$$

$$15 - 12 + 12\cos^2 2x - 16\cos^2 2x = 0, 4\cos^2 2x = 3, \cos^2 2x = \frac{3}{4},$$

$$\cos 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 2x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{12}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}$$

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{12}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}$ .

**8.285.**  $\frac{1}{\sin^2 2x} + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 4 = 0$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $\sin 2x \neq 0$ .

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{\sin^2 2x} + \left( \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 2x} + \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 2x} - \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} - 4 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin 2x \cos 2x - 4\sin^2 2x = 0,$$

$$\cos^2 2x + \sin^2 2x - 2 \sin 2x \cos 2x - 4 \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x - 2 \sin 2x \cos 2x - 3 \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}^2 2x - 2 \operatorname{ctg} 2x - 3 = 0.$$

Решим это уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{ctg} 2x$ :

$$\operatorname{ctg} 2x = -1, \quad 2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad x_1 = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} 2x = 3, \quad 2x = \operatorname{arccctg} 3 + \pi n, \quad x_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arccctg} 3 + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x_1 = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$ ;  $x_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arccctg} 3 + \frac{\pi n}{2}$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

**8.286.**  $\operatorname{tg} 5z - \operatorname{tg} 3z - 2 \operatorname{tg} 2z = 0.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 5z \neq 0, \\ \cos 3z \neq 0, \\ \cos 2z \neq 0. \end{cases}$$

По формуле  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$  имеем

$$\frac{\sin 2z}{\cos 5z \cos 3z} - \frac{2 \sin 2z}{\cos 2z} = 0 \Leftrightarrow \sin 2z (\cos 2z - 2 \cos 5z \cos 3z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2z \cdot (\cos 2z - \cos 2z - \cos 8z) = 0, \quad -\sin 2z \cos 8z = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin 2z = 0, \quad 2z = \pi k, \quad z_1 = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos 8z = 0, \quad 8z = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad z_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8} = \frac{\pi}{16} (2n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая ОДЗ, получим  $z_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $z_1 = \pi k$ ;  $z_2 = \frac{\pi}{16} (2n + 1)$ ,  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

**8.287.**  $\cos 2x + \cos \frac{3x}{4} - 2 = 0.$

Решение.

$$\cos 2x + \cos \frac{3x}{4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos \frac{3x}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\pi k, \\ \frac{3x}{4} = 2\pi l, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{8\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Rightarrow \pi k = \frac{8\pi l}{3}, 3k = 8l, k = 8m, l = 3m, x = 8\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = 8\pi m, m \in \mathbb{Z}$ .

**8.288.**  $(\operatorname{ctg} z - 1)(1 + \sin 2z) = 1 + \operatorname{ctg} z$ .

Решение.

ОДЗ:  $\sin z \neq 0$ .

Перепишем уравнение в виде

$$\left( \frac{\cos z}{\sin z} - 1 \right) \cdot (\cos^2 z + 2 \sin z \cos z + \sin^2 z) - \left( 1 + \frac{\cos z}{\sin z} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\cos z - \sin z)(\cos z + \sin z)^2}{\sin z} - \frac{\sin z + \cos z}{\sin z} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin z + \cos z)((\cos z - \sin z)(\cos z + \sin z) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin z + \cos z)(\cos^2 z - \sin^2 z - \cos^2 z - \sin^2 z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2(\sin z + \cos z)\sin^2 z = 0.$$

Так как  $\sin z \neq 0$ , то

$$\sin z + \cos z = 0, \sin z = -\cos z, \operatorname{tg} z = -1,$$

$$z = -\frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{4}(4n - 1), n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $z = \frac{\pi}{4}(4n - 1), n \in \mathbb{Z}$ .

**8.289.**  $\operatorname{tg} x \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} = \sin 6x$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ 1 - 3\operatorname{tg}^2 x \neq 0. \end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{3 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x}} - \sin 6x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{3\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - 3\sin^2 x} - \sin 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x(3-4\sin^2 x)}{\cos x(4\cos^2 x-3)} - \sin 6x = 0 \Leftrightarrow \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{4\cos^3 x - 3\cos x} - \sin 6x = 0.$$

Так как  $3\sin x - 4\sin^3 x = \sin 3x$  и  $4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x$ , то

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} - 2\sin 3x \cos 3x = 0, \sin 3x(1 - 2\cos^2 3x) = 0, -\sin 3x \cos 6x = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin 3x = 0, 3x = \pi k, x_1 = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos 6x = 0, 6x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{6}, x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6} = \frac{\pi}{12}(2n+1), n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi k}{3}; x_2 = \frac{\pi}{12}(2n+1), k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.290. \sin^4 3t + \sin^4\left(\frac{\pi}{4} + 3t\right) = \frac{1}{4}.$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$\left(\sin^2 3t\right)^2 + \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 3t\right)\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 6t)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 6t\right)\right)\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos 6t)^2 + (1 + \sin 6t)^2 - 1 = 0,$$

$$1 - 2\cos 6t + \cos^2 6t + 1 + 2\sin 6t + \sin^2 6t - 1 = 0, 1 - \cos 6t + \sin 6t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 3t + \sin^2 3t - \cos^2 3t + \sin^2 3t + 2\sin 3t \cos 3t = 0,$$

$$2\sin^2 3t + 2\sin 3t \cos 3t = 0, 2\sin 3t \cdot (\sin 3t + \cos 3t) = 0.$$

Отсюда 1)  $\sin 3t = 0$ , 2)  $\sin 3t + \cos 3t = 0$ .

$$1) 3t = \pi k, t_1 = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \operatorname{tg} 3t = -1, 3t = -\frac{\pi}{4} + \pi n, t_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} = \frac{\pi}{12}(4n-1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } t_1 = \frac{\pi k}{3}; t_2 = \frac{\pi}{12}(4n-1), \text{ где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.291. \cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x \cos x = \cos x + 8\cos x \cos^3 3x.$$

*Решение.*

*Имеем:*

$$\begin{aligned} \cos 10x + (1 + \cos 8x) + 3(2\cos 3x \cos x) &= \cos x + 2(2\cos x \cos 3x)\cos^2 3x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos 10x + 1 + \cos 8x + 3(\cos 2x + \cos 4x) &= \\ = \cos x + 2(\cos 2x + \cos 4x) \cdot (1 + \cos 6x), & \\ \cos 10x + 1 + \cos 8x + 3\cos 2x + 3\cos 4x &= \cos x + 2\cos 2x + \\ + 2\cos 4x + 2\cos 2x \cos 6x + 2\cos 4x \cos 6x &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos 10x + 1 + \cos 8x + \cos 2x + \cos 4x &= \\ = \cos x + \cos 4x + \cos 8x + \cos 2x + \cos 10x &\Rightarrow \\ \Rightarrow \cos x = 1, x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. & \end{aligned}$$

*Ответ:*  $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.292. 1 + \sin \frac{t}{2} \sin t - \cos \frac{t}{2} \sin^2 t = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right).$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} 1 + \sin \frac{t}{2} \sin t - \cos \frac{t}{2} \sin^2 t &= 1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - t \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin \frac{t}{2} \sin t - \cos \frac{t}{2} \sin^2 t - \sin t &= 0, \sin t \cdot \left( \sin \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2} \sin t - 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда 1)  $\sin t = 0$ , 2)  $\sin \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2} \sin t - 1 = 0$ .

1)  $t_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

$$2) \sin \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2} \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} - 1 = 0, \sin \frac{t}{2} - 2 \cos^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} - 1 = 0,$$

$$\sin \frac{t}{2} - 2 \left( 1 - \sin^2 \frac{t}{2} \right) \sin \frac{t}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^3 \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} - 1 = 0,$$

$$\sin^3 \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} + \sin^3 \frac{t}{2} - 1 = 0, \sin \frac{t}{2} \left( \sin^2 \frac{t}{2} - 1 \right) + \left( \sin \frac{t}{2} - 1 \right) \times$$

$$\times \left( \sin^2 \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} + 1 \right) = 0, \sin \frac{t}{2} \left( \sin \frac{t}{2} - 1 \right) \left( \sin \frac{t}{2} + 1 \right) + \left( \sin \frac{t}{2} - 1 \right) \times$$

$$\times \left( \sin^2 \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} + 1 \right) = 0, \left( \sin \frac{t}{2} - 1 \right) \left( 2 \sin^2 \frac{t}{2} + 2 \sin \frac{t}{2} + 1 \right) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin \frac{t}{2} - 1 = 0, \sin \frac{t}{2} = 1, \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, t_2 = \pi + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}, t_2 \text{ входит в } t_1;$$

$$2) 2 \sin^2 \frac{t}{2} + 2 \sin \frac{t}{2} + 1 \neq 0 (D < 0), \emptyset.$$

Ответ:  $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.293. \frac{4 \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \sin\left(\frac{5\pi}{6} + x\right)}{\cos^2 x} + 2 \operatorname{tg} x = 0.$$

Решение.

ОДЗ:  $\cos x \neq 0$ .

Запишем уравнение в виде

$$\frac{2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{6} + x - \frac{5\pi}{6} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x + \frac{5\pi}{6} + x\right) \right)}{\cos^2 x} + \frac{2 \sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \left( \cos \frac{2}{3} \pi - \cos(\pi + 2x) \right) + 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 + 2 \cos 2x + 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3 \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg} x$ , имеем

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}, x_1 = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \operatorname{tg} x = 1, x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{4}(4n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x_1 = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k; x_2 = \frac{\pi}{4}(4n+1)$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.294. \frac{4 \cos^2 t - 1}{\sin t} = \operatorname{ctg} t (1 + 2 \cos 2t).$$

Решение.

ОДЗ:  $\sin t \neq 0$ .



Запишем уравнение в виде

$$\frac{4 \cos^2 t - 1}{\sin t} = \frac{\cos t(1 + 2(2 \cos^2 t - 1))}{\sin t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 t - 1 = \cos t(4 \cos^2 t - 1), \quad (4 \cos^2 t - 1) - \cos t(4 \cos^2 t - 1) = 0, \\ (4 \cos^2 t - 1)(1 - \cos t) = 0.$$

Отсюда

1)  $4 \cos^2 t - 1 = 0, \cos^2 t = \frac{1}{4}, \cos t = \pm \frac{1}{2}, t_1 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), k \in \mathbb{Z};$

2)  $1 - \cos t = 0, \cos t = 1$  — не подходит по ОДЗ.

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$

**8.295.**  $(\sin x + \cos x)^4 = 2(1 + \sin^2 x) - (\sin x - \cos x)^4.$

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде

$$\left((\sin x + \cos x)^2\right)^2 + \left((\sin x - \cos x)^2\right)^2 = 2(1 + \sin^2 x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x\right)^2 + \left(\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x\right)^2 = \\ = 2(1 + \sin^2 x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2 \sin x \cos x)^2 + (1 - 2 \sin x \cos x)^2 = 2(1 + \sin^2 x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x \cos^2 x + 1 - 4 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x \cos^2 x - 2 - \\ - 2 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 4 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x = 0, \sin^2 x(4 \cos^2 x - 1) = 0.$$

Отсюда

1)  $\sin x = 0, x_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z};$

2)  $4 \cos^2 x - 1 = 0, \cos^2 x = \frac{1}{4}, \cos x = \pm \frac{1}{2}, x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi l = \frac{\pi}{3}(3l \pm 1), l \in \mathbb{Z}.$

*Ответ:*  $x_1 = \pi k, x_2 = \frac{\pi}{3}(3l \pm 1),$  где  $k$  и  $l \in \mathbb{Z}.$

**8.296.**  $\cos^{-4} z = 64 \cos^2 2z.$

*Решение.*

ОДЗ:  $\cos z \neq 0.$

Из условия имеем

$$\frac{1}{\cos^4 z} = (8 \cos 2z)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 z} = 8 \cos 2z, \cos 2z > 0, \\ \frac{1}{\cos^2 z} = -8 \cos 2z, \cos 2z < 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{1 + \cos 2z} = 8 \cos 2z, \\ \frac{1}{1 + \cos 2z} = -8 \cos 2z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cos^2 2z + 4 \cos 2z - 1 = 0, \\ 4 \cos^2 2z + 4 \cos 2z + 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2z = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}, \\ (2 \cos 2z + 1)^2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2z = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2} < -1, \emptyset; \\ \cos 2z = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}, \\ \cos 2z = -\frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$1) 2 \cos^2 z - 1 = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}, \cos z = \pm \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2}, z_1 = \pm \arccos \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2z = \pm \frac{2}{3} \pi + 2\pi n, z_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n = \frac{\pi}{3} (3n \pm 1), n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $z_1 = \pm \arccos \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; z_2 = \frac{\pi}{3} (3n \pm 1), n \in \mathbb{Z}$

**8.297.**  $4 \sin 5x \cos 5x (\cos^4 x - \sin^4 x) = \sin 4x.$

*Решение.*

Запишем это уравнение в виде

$$2 \sin 10x (\cos^2 x + \sin^2 x) (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin 2x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 10x \cos 2x - 2 \sin 2x \cos 2x = 0, 2 \cos 2x (\sin 10x - \sin 2x) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos 2x = 0, 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin 10x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 6x \sin 4x = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos 6x = 0, 6x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6} = \frac{\pi}{12} (2n + 1), n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin 4x = 0, 4x = \pi l, x_3 = \frac{\pi l}{4}, l \in \mathbb{Z}, x_1 \text{ входит в } x_2.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi k}{4}; x_2 = \frac{\pi}{12}(2n+1), \text{ где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.298. \frac{\operatorname{tg} 4z}{\operatorname{tg} 2z} + \frac{\operatorname{tg} 2z}{\operatorname{tg} 4z} + \frac{5}{2} = 0.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \operatorname{tg} 2z \neq 0, \\ \operatorname{tg} 4z \neq 0, \\ \cos 2z \neq 0, \\ \cos 4z \neq 0. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$2 \cdot \left( \frac{\operatorname{tg} 4z}{\operatorname{tg} 2z} \right)^2 + 5 \cdot \left( \frac{\operatorname{tg} 4z}{\operatorname{tg} 2z} \right) + 2 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\frac{\operatorname{tg} 4z}{\operatorname{tg} 2z}$ , получим

$$1) \frac{\operatorname{tg} 4z}{\operatorname{tg} 2z} = -\frac{1}{2}, 2) \frac{\operatorname{tg} 4z}{\operatorname{tg} 2z} = -2. \text{ Перепишем первое уравнение в виде}$$

$$\frac{4\operatorname{tg} 2z}{1 - \operatorname{tg}^2 2z} + \operatorname{tg} 2z \Leftrightarrow 4\operatorname{tg} 2z + \operatorname{tg} 2z(1 - \operatorname{tg}^2 2z) = 0, \operatorname{tg} 2z(5 - \operatorname{tg}^2 2z) = 0.$$

Отсюда

$$5 - \operatorname{tg}^2 2z = 0, \operatorname{tg}^2 2z = 5, \operatorname{tg} 2z = \pm\sqrt{5}, 2z = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{5} + \pi k,$$

$$z_1 = \pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{5} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}, \operatorname{tg} 2z \neq 0.$$

Второе уравнение запишем в виде

$$\frac{2\operatorname{tg} 2z}{\operatorname{tg} 2z(1 - \operatorname{tg}^2 2z)} = -2, \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 2z} = -1, \operatorname{tg}^2 2z = 2, \operatorname{tg} 2z = \pm\sqrt{2},$$

$$2z = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{2} + \pi n, z_2 = \pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{2} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } z_1 = \pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{5} + \frac{\pi k}{2}; z_2 = \pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{2} + \frac{\pi n}{2}, \text{ где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.299. \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x}{\operatorname{ctg}x - \operatorname{tg}x} = 6 \cos 2x + 4 \sin 2x.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \operatorname{ctg}x - \operatorname{tg}x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} - 6 \cos 2x - 4 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \cdot \frac{\cos x \sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x} - 6 \cos 2x - 4 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos 2x} - 6 \cos 2x - 4 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 1 - 6 \cos^2 2x - 4 \sin 2x \cos 2x = 0,$$

$$\cos^2 2x + \sin^2 2x - 6 \cos^2 2x - 4 \sin 2x \cos 2x = 0,$$

$$\sin^2 2x - 4 \sin 2x \cos 2x - 5 \cos^2 2x = 0, \operatorname{tg}^2 2x - 4 \operatorname{tg} 2x - 5 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg} 2x$ , получим

$$\operatorname{tg} 2x = -1, \quad 2x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x_1 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{tg} 2x = 5,$$

$$2x_2 = \operatorname{arctg} 5 + \pi n, \quad x_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; \quad x_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi n}{2}, \text{ где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.300. \operatorname{tg} 5x - 2 \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 5x.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 5x \neq 0, \\ \cos 3x \neq 0. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x (\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(5x - 3x)}{\cos 5x \cos 3x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \left( \frac{\sin 3x \sin 5x + \cos 3x \cos 5x}{\cos 3x \cos 5x} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 5x \cos 3x} - \frac{\sin 3x \cos 2x}{\cos^2 3x \cos 5x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x}{\cos^2 3x \cos 5x} = 0 \Leftrightarrow \frac{-\sin x}{\cos^2 3x \cos 5x} = 0 \Rightarrow \sin x = 0,$$

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$8.301. \cos z + \sin z = \sqrt{1 - 2 \cos^2 z}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 1 - 2 \cos^2 z \geq 0, \\ \cos z + \sin z \geq 0. \end{cases}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат. Имеем

$$\begin{cases} \cos^2 z + 2 \cos z \sin z + \sin^2 z = 1 - 2 \cos^2 z, \Rightarrow \\ \cos z + \sin z \geq 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \cos z \sin z + 2 \cos^2 z = 0 \Leftrightarrow \cos z (\sin z + \cos z) = 0,$$

откуда

$$1) \cos z = 0, z_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ учитывая, что } \cos z + \sin z \geq 0, z_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k =$$

$$= \frac{\pi}{2} (4k + 1), k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin z + \cos z = 0, \operatorname{tg} z = -1, z_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{4} (4n - 1), n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } z_1 = \frac{\pi}{2} (4k + 1); z_2 = \frac{\pi}{4} (4n - 1), \text{ где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}$$

$$8.302. \sqrt{3}(1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x) = \operatorname{tg} 2x \cos^{-1} 3x.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 2x \neq 0, \\ \cos 3x \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{3} \left( 1 + \frac{\sin 2x \sin 3x}{\cos 2x \cos 3x} \right) - \frac{\sin 2x}{\cos 2x \cos 3x} = 0,$$

$$\frac{\sqrt{3}(\cos 2x \cos 3x + \sin 2x \sin 3x)}{\cos 2x \cos 3x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x \cos 3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3} \cos x}{\cos 2x \cos 3x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x \cos 3x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos x - 2 \sin x \cos x = 0,$$

$$\cos x(\sqrt{3} - 2 \sin x) = 0.$$

Отсюда

$$\cos x = 0, x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

или

$$\sqrt{3} - 2 \sin x = 0, \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = (-1)^l \frac{\pi}{3} + \pi l, l \in \mathbb{Z}, x_1$$

не удовлетворяет уравнению.

$$\text{Ответ: } x = (-1)^l \frac{\pi}{3} + \pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

$$8.303. \left( \cos^{-6} z - \operatorname{tg}^6 z - \frac{7}{3} \right) \cdot (\sin z + \cos z + 2) = 0.$$

Решение.

ОДЗ:  $\cos z \neq 0$ .

Из условия имеем

$$\left[ \frac{1}{\cos^6 z} - \frac{\sin^6 z}{\cos^6 z} - \frac{7}{3} = 0, \Leftrightarrow 3 - 3\sin^6 z - 7\cos^6 z = 0 \Leftrightarrow \right. \\ \left. \sin z + \cos z + 2 = 0, \emptyset. \right.$$

$$\Leftrightarrow 3 - 3(\sin^2 z)^3 - 7(\cos^2 z)^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - 3\left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2z)\right)^3 - 7\left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2z)\right)^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 2z + 15\cos^2 2z + 6\cos 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 2z + 2\cos^2 2z + 6\cos^2 2z + 6\cos 2z + 7\cos^2 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2z(\cos 2z + 1) + 6\cos 2z(\cos 2z + 1) + 7(\cos 2z + 1)(\cos 2z - 1) = 0,$$

$$(\cos 2z + 1)(2\cos^2 2z + 13\cos 2z - 7) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos 2z + 1 = 0, \cos 2z = -1, 2z = \pi + 2\pi k, z_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2 \cos^2 2z + 13 \cos 2z - 7 = 0.$$

Решив последнее уравнение как квадратное относительно  $\cos 2z$ , имеем

$$\cos 2z = -7, \emptyset; \cos 2z = \frac{1}{2}, 2z = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, z_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1),$$

$n \in \mathbb{Z}$ ;  $z_1$  не входит в ОДЗ.

Ответ:  $z = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1), n \in \mathbb{Z}$ .

**8.304.**  $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x + \operatorname{ctg} 5x = 0.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 2x \neq 0, \\ \sin 3x \neq 0, \\ \sin 5x \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\left( \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \right) + \frac{\cos 5x}{\sin 5x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x \sin 3x - \cos 2x \cos 3x}{\cos 2x \sin 3x} + \frac{\cos 5x}{\sin 5x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\cos 5x}{\cos 2x \sin 3x} + \frac{\cos 5x}{\sin 5x} = 0 \Leftrightarrow -\cos 5x(2 \sin 5x - 2 \cos 2x \sin 3x) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos 5x = 0, 5x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} = \frac{\pi}{10}(2k + 1), k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2 \sin 5x - 2 \cos 2x \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 5x - \sin x - \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin 5x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos 3x = 0.$$

Тогда или  $\sin 2x = 0, 2x = \pi n, x_2 = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ , или  $\cos 3x = 0, 3x = \frac{\pi}{2} + \pi l,$

$$x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z}; x_2 \text{ входит в } x_1 \text{ или в } x_3.$$

Ответ:  $x_1 = \frac{\pi}{10}(2k + 1); x_2 = \frac{\pi}{6}(2l + 1)$ , где  $k$  и  $l \in \mathbb{Z}$ .

**8.305.**  $\cos^{-1} 2t + \sin^{-1} 2t + \cos^{-1} 2t \sin^{-1} 2t - 5 = 0.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 2t \neq 0, \\ \sin 2t \neq 0. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$\frac{1}{\cos 2t} + \frac{1}{\sin 2t} + \frac{1}{\cos 2t \sin 2t} - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{1 - \operatorname{tg}^2 t} + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{2 \operatorname{tg} t} + \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 t)^2}{2 \operatorname{tg} t (1 - \operatorname{tg}^2 t)} - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{tg}^2 t - 4 \operatorname{tg} t + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg}^3 t + \operatorname{tg}^2 t) + (4 \operatorname{tg}^3 t - 4 \operatorname{tg} t) + (\operatorname{tg}^3 t + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 t (\operatorname{tg} t + 1) + 4 \operatorname{tg} t (\operatorname{tg} t + 1) (\operatorname{tg} t - 1) + (\operatorname{tg} t + 1) (\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{tg} t + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg} t + 1) (6 \operatorname{tg}^2 t - 5 \operatorname{tg} t + 1) = 0.$$

Так как  $\operatorname{tg} t + 1 \neq 0$ , то  $6 \operatorname{tg}^2 t - 5 \operatorname{tg} t + 1 = 0$ . Решив это уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg} t$ , получим  $\operatorname{tg} t = \frac{1}{2}$ ,  $t_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

$$\operatorname{tg} t = \frac{1}{3}, t_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $t_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$ ;  $t_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.306. \cos(22^\circ - t) \cos(82^\circ - t) + \cos(112^\circ - t) \cos(172^\circ - t) = \frac{1}{2} (\sin t + \cos t).$$

Решение.

Из условия получаем

$$\frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos(104^\circ - 2t)) + \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos(284^\circ - 2t)) = \frac{1}{2} (\sin t + \cos t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(104^\circ - 2t) + \cos(284^\circ - 2t) + 1 = \sin t + \cos t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(194^\circ - 2t) \cos 90^\circ + 1 = \sin t + \cos t, \sin t + \cos t - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} - \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = 0,$$

$$2 \sin^2 \frac{t}{2} - 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = 0, 2 \sin \frac{t}{2} \left( \sin \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2} \right) = 0.$$



Отсюда

$$1) \sin \frac{t}{2} = 0, \frac{t}{2} = 180^\circ k, t_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{t}{2} = 1, \frac{t}{2} = 45^\circ + 180^\circ n,$$

$$t_2 = 90^\circ + 360^\circ n = 90^\circ(4n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $t_1 = 360^\circ k$ ;  $t_2 = 90^\circ(4n+1)$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\mathbf{8.307.} \sin 4x(3 \sin 4x - 2 \cos 4x) = \sin^2 2x - 16 \sin^2 x \cos^2 x \times \\ \times \cos^2 2x + \cos^2 2x.$$

Решение.

Из условия получаем

$$\sin 4x(3 \sin 4x - 2 \cos 4x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) - \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) - 4 \sin^2 2x \times \\ \times \cos^2 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \Leftrightarrow 2 \sin 4x(3 \sin 4x - 2 \cos 4x) = 1 - \cos 4x - \\ - 2 \sin^2 4x + 1 + \cos 4x, 6 \sin^2 4x - 4 \sin 4x \cos 4x - 2 \cos^2 4x = 0, \\ 3 \sin^2 4x - 2 \sin 4x \cos 4x - \cos^2 4x = 0.$$

Разделив на  $\cos^2 4x \neq 0$ , получим  $3 \operatorname{tg}^2 4x - 2 \operatorname{tg} 4x - 1 = 0$ . Решив это

уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg} 4x$ , имеем  $\operatorname{tg} 4x = -\frac{1}{3}$ ,

$$4x_1 = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, x_1 = -\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}; \operatorname{tg} 4x = 1, 4x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n,$$

$$x_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4} = \frac{\pi}{16}(4n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x_1 = -\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \frac{\pi k}{4}$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{16}(4n+1)$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\mathbf{8.308.} \cos 3z - \cos^3 z + \frac{3}{4} \sin 2z = 0.$$

Решение.

Так как  $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ , то получаем

$$4(4 \cos^3 z - 3 \cos z) - 4 \cos^3 z + 6 \sin z \cos z = 0,$$

$$12 \cos^3 z - 12 \cos z + 6 \sin z \cos z = 0, 6 \cos z(2 \cos^2 z - 2 + \sin z) = 0,$$

$$6 \cos z (2(1 - \sin^2 z) - 2 + \sin z) = 0, \quad 6 \cos z (-2 \sin^2 z + \sin z) = 0,$$

$$6 \cos z \sin z (2 \sin z - 1) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos z = 0, \quad z_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2} (2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin z = 0, \quad z_2 = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$3) 2 \sin z - 1 = 0, \quad \sin z = \frac{1}{2}, \quad z_3 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } z_1 = \frac{\pi}{2} (2k + 1); \quad z_2 = \pi n; \quad z_3 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi l, \text{ где } k, \text{ и } l \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{8.309.} \quad \operatorname{tg}(t^2 - t) \operatorname{ctg} 2 = 1.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \cos(t^2 - t) \neq 0.$$

Из условия имеем

$$\operatorname{tg}(t^2 - t) = \operatorname{tg} 2, \quad \operatorname{tg}(t^2 - t) - \operatorname{tg} 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(t^2 - t - 2)}{\cos(t^2 - t) \cos 2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(t^2 - t - 2) = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t^2 - t - 2 - \pi k = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из этого уравнения получаем

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9 + 4\pi k}}{2}, \quad \text{где } 9 + 4\pi k \geq 0, \quad k \geq -\frac{9}{4\pi}, \quad k = 0; 1; 2; \dots$$

$$\text{Ответ: } t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9 + 4\pi k}}{2}, \quad \text{где } k = 0; 1; 2; \dots$$

$$\mathbf{8.310.} \quad \sin^3 x (1 - \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x (1 - \operatorname{tg} x) = 1,5 \cos 2x.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\sin^3 x \left(1 - \frac{\cos x}{\sin x}\right) + \cos^3 x \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right) - 1,5 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (\sin x - \cos x) - \cos^2 x (\sin x - \cos x) - 1,5 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x) - 1,5 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x) \cos 2x - 1,5 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x (\cos x - \sin x - 1,5) = 0.$$

Отсюда

$$\cos 2x = 0, 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{4}(2k+1), k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x - \sin x - 1,5 \neq 0.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4}(2k+1), k \in \mathbb{Z}.$

8.311. 
$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)}{1 + \cos 2t} = \cos^{-2} 2t - 1.$$

Решение.

ОДЗ: 
$$\begin{cases} \cos 2t \neq 0, \\ \cos 2t \neq -1. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$\frac{\sin^2 2t}{1 + \cos 2t} - \frac{1}{\cos^2 2t} + 1 = 0, \frac{1 - \cos^2 2t}{1 + \cos 2t} - \frac{1 - \cos^2 2t}{\cos^2 2t} = 0,$$

$$\frac{(1 - \cos 2t)(1 + \cos 2t)}{1 + \cos 2t} - \frac{1 - \cos^2 2t}{\cos^2 2t} = 0,$$

$$1 - \cos 2t - \frac{(1 - \cos 2t)(1 + \cos 2t)}{\cos^2 2t} = 0, (1 - \cos 2t) \cdot \left(1 - \frac{1 + \cos 2t}{\cos^2 2t}\right) = 0.$$

Отсюда

1)  $1 - \cos 2t = 0, \cos 2t = 1, 2t = 2\pi k, t_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z};$

2)  $1 - \frac{1 + \cos 2t}{\cos^2 2t} = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2t - \cos 2t - 1 = 0,$  решим его как квадрат-

ное относительно  $\cos 2t,$  получим  $\cos 2t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1, \emptyset; \cos 2t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$

$$2t = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 2\pi n, t_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $t_1 = \pi k; t_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \pi n,$  где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}.$

$$8.312. 4 \cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 6x.$$

*Решение.*

Умножаем обе части уравнения на  $\sin x \neq 0$ . Получаем

$$2(2 \sin x \cos x) \cos 2x \cos 3x = \sin x \cos 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin 2x \cos 2x) \cos 3x = \sin x \cos 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \cos 3x - \sin x \cos 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin x + \sin 7x) + \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin 7x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 3x \cos 2x = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin 3x = 0, 3x = \pi k, x_1 = \frac{\pi k}{3}, k \in Z, \text{ исключив значения } x = \pi m,$$

при которых  $\sin x = 0$ , получим  $x_1 = \frac{\pi}{3}(3l \pm 1), l \in Z$ .

$$2) \cos 2x = 0, 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4}(2n + 1), n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{3}(3l \pm 1); x_2 = \frac{\pi}{4}(2n + 1), \text{ где } l \text{ и } n \in Z.$$

$$8.313. 1 - \cos x = \sqrt{1 - \sqrt{4 \cos^2 x - 7 \cos^4 x}}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 4 \cos^2 x - 7 \cos^4 x \geq 0, \\ 1 - \sqrt{4 \cos^2 x - 7 \cos^4 x} \geq 0. \end{cases}$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$\begin{cases} 1 - 2 \cos x + \cos^2 x = 1 - \sqrt{4 \cos^2 x - 7 \cos^4 x} \Leftrightarrow \\ 1 - \cos x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4 \cos^2 x - 7 \cos^4 x} = 2 \cos x - \cos^2 x, \\ \cos x \leq 1, \\ 2 \cos x - \cos^2 x \geq 0. \end{cases}$$

Еще раз возведя уравнение в квадрат, получим

$$4 \cos^2 x - 7 \cos^4 x = 4 \cos^2 x - 4 \cos^3 x + \cos^4 x,$$

$$8 \cos^4 x - 4 \cos^3 x = 0, 4 \cos^3 x (2 \cos x - 1) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos x = 0, x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2 \cos x - 1 = 0, \cos x = \frac{1}{2}, x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n = \frac{\pi}{3}(6n \pm 1), n \in \mathbb{Z}.$$

Проверкой убеждаемся, что оба корня являются решениями уравнения.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1); x_2 = \frac{\pi}{3}(6n \pm 1), \text{ где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.314. \frac{2 \sin x - \sin 2x}{2 \sin x + \sin 2x} + \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{10}{3}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin \frac{x}{2} \neq 0, \\ 2 \sin x + \sin 2x \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{2 \sin x - 2 \sin x \cos x}{2 \sin x + 2 \sin x \cos x} + \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{10}{3} = 0,$$

$$\frac{2 \sin x(1 - \cos x)}{2 \sin x(1 + \cos x)} + \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{10}{3} = 0, \quad \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{10}{3} = 0,$$

$$3 \cdot \left( \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)^2 - 10 \cdot \left( \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) + 3 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ , получим

$$1) \left( \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) = \frac{1}{3}, \cos x = \frac{1}{2}, x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z};$$

$$2) \left( \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) = 3, \cos x = -\frac{1}{2}, x_2 = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.315. \quad 4(\sin t \cos^5 t + \cos t \sin^5 t) + \sin^3 2t = 1.$$

*Решение.*

Имеем

$$4 \sin t \cos t (\cos^4 t + \sin^4 t) + \sin^3 2t - 1 = 0,$$

$$2 \sin 2t \left( (\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2 \cos^2 t \sin^2 t \right) + \sin^3 2t - 1 = 0,$$

$$2 \sin 2t - \sin 2t (4 \cos^2 t \sin^2 t) + \sin^3 2t - 1 = 0,$$

$$2 \sin 2t - \sin^3 2t + \sin^3 2t - 1 = 0, \quad \sin 2t = \frac{1}{2}, \quad 2t = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,$$

$$t = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } t = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.316. \quad \sin^4 x - \sin^2 x + 4(\sin x + 1) = 0.$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$\sin^2 x (\sin^2 x - 1) + 4(\sin x + 1) = 0,$$

$$\sin^2 x (\sin x - 1)(\sin x + 1) + 4(\sin x + 1) = 0,$$

$$(\sin x + 1)(\sin^3 x - \sin^2 x + 4) = 0.$$

Отсюда

$$1) \quad \sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(4k - 1), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \quad \sin^3 x - \sin^2 x + 4 \neq 0.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2}(4k - 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.317. \quad \frac{\sin^2 t - \operatorname{tg}^2 t}{\cos^2 t - \operatorname{ctg}^2 t} + 2 \operatorname{tg}^3 t + 1 = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos t \neq 0, \\ \sin t \neq 0, \\ \sin t \neq \pm 1. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\sin^2 t - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}{\cos^2 t - \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} + 2\operatorname{tg}^3 t + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 t (\cos^2 t - 1)}{\cos^2 t} \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t (\sin^2 t - 1)} + 2\operatorname{tg}^3 t + 1 = 0,$$

$$(\operatorname{tg}^3 t)^2 + 2\operatorname{tg}^3 t + 1 = 0, (\operatorname{tg}^3 t + 1)^2 = 0, \operatorname{tg}^3 t = -1, \operatorname{tg} t = -1,$$

$$t = -\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k - 1), k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $t = \frac{\pi}{4}(4k - 1), k \in \mathbb{Z}$

8.318.  $\frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 5t} - \frac{\operatorname{tg} 5t}{\cos^2 t} = 0.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos t \neq 0, \\ \cos 5t \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\sin t}{\cos t \cos^2 5t} - \frac{\sin 5t}{\cos 5t \cos^2 t} = 0 \Leftrightarrow \sin t \cos t - \sin 5t \cos 5t = 0.$$

Используя формулу  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$ , получим

$$\frac{\sin 2t}{2} - \frac{\sin 10t}{2} = 0, \sin 2t - \sin 10t = 0 \Leftrightarrow -2 \cos 6t \sin 4t = 0.$$

Отсюда

1)  $\cos 6t = 0, 6t = \frac{\pi}{2} + \pi k, t_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6} = \frac{\pi}{12}(2k + 1), k \in \mathbb{Z};$

2)  $\sin 4t = 0, 4t = \pi n, t_2 = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}.$

С учетом ОДЗ  $t_2 = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Ответ:  $t_1 = \frac{\pi}{12}(2k + 1); t_2 = \pi n,$  где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}.$

$$8.319. \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} + \sin x \left( 1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = 4.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0, \\ 1 + \sin 2x - \cos 2x \neq 0. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x} + \sin x \left( 1 + \frac{\sin x \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} \right) - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x}{2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x} + \frac{\sin x \left( \cos x \cos \frac{x}{2} + \sin x \sin \frac{x}{2} \right)}{\cos x \cos \frac{x}{2}} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cos x (\sin x + \cos x)}{2 \sin x (\cos x + \sin x)} + \frac{\sin x \cos \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} - 4 = 0, \quad \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4,$$

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = 2, \quad \frac{1}{\sin 2x} = 2, \quad \sin 2x = \frac{1}{2}, \quad 2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

**8.320.**  $\sin 2z - \sin 6z + 2 = 0.$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде  $\sin 2z - \sin 3(2z) + 2 = 0.$  По формуле

$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$  имеем

$$\sin 2z - 3 \sin 2z + 4 \sin^3 2z + 2 = 0, \quad 4 \sin^3 2z - 2 \sin 2z + 2 = 0,$$

$$2 \sin^3 2z - \sin 2z + 1 = 0, \quad 2 \sin^3 2z + 2 - \sin 2z - 1 = 0,$$



$$2(\sin 2z + 1)(\sin^2 2z - \sin 2z + 1) - (\sin 2z + 1) = 0,$$

$$(\sin 2z + 1)(2\sin^2 2z - 2\sin 2z + 1) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin 2z + 1 = 0, \sin 2z = -1, 2z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, z = -\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k - 1), k \in \mathbb{Z},$$

$$2) 2\sin^2 2z - 2\sin 2z + 1 = 0 (D < 0), \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } z = \frac{\pi}{4}(4k - 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.321. \sin^2(t + 45^\circ) - \sin^2(t - 30^\circ) - \sin 15^\circ \cos(2t + 15^\circ) = 0,5 \sin 6t.$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$1 - \cos(2t + 90^\circ) - 1 + \cos(2t - 60^\circ) - 2\sin 15^\circ \cos(2t + 15^\circ) - \sin 6t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2t + \cos(2t - 60^\circ) + \sin 2t - \sin(2t + 30^\circ) - \sin 6t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2t + \cos 2t \cos 60^\circ + \sin 2t \sin 60^\circ - \sin 2t \cos 30^\circ - \\ - \cos 2t \sin 30^\circ - \sin 6t = 0,$$

$$2\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}\cos 2t - \sin 6t = 0,$$

$$2\sin 2t - \sin 6t = 0.$$

Так как  $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ , то  $2\sin 2t - 3\sin 2t + 4\sin^3 2t = 0$ ,

$$4\sin^3 2t - \sin 2t = 0, \sin 2t(4\sin^2 2t - 1) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin 2t = 0, 2t = 180^\circ k, t_1 = 90^\circ k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 4\sin^2 2t - 1 = 0, \sin 2t = \pm \frac{1}{2}, 2t = \pm 30^\circ + 180^\circ l, t_2 = \pm 15^\circ + 90^\circ l, l \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $t_1 = 90^\circ k, t_2 = \pm 15^\circ + 90^\circ l$ , где  $k$  и  $l \in \mathbb{Z}$ .

$$8.322. 3\operatorname{tg} 3x - 4\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$3\operatorname{tg}3x - 3\operatorname{tg}2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg}3x + \operatorname{tg}2x,$$

$$3 \cdot \left( \frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \right) = \operatorname{tg}2x \cdot \left( \frac{\sin 2x \sin 3x}{\cos 2x \cos 3x} + 1 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left( \frac{\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x}{\cos 3x \cos 2x} \right) - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \times$$

$$\times \left( \frac{\sin 2x \sin 3x + \cos 2x \cos 3x}{\cos 2x \cos 3x} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 \sin x}{\cos 3x \cos 2x} - \frac{\sin 2x \cos x}{\cos^2 2x \cos 3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin x \cos 2x - \sin 2x \cos x = 0, \quad 3 \sin x (2 \cos^2 x - 1) - 2 \sin x \cos^2 x = 0,$$

$$\sin x (4 \cos^2 x - 3) = 0.$$

Отсюда

1)  $\sin x = 0, \quad x_1 = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ ,

2)  $4 \cos^2 x - 3 = 0, \quad \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x_2$  не входит в ОДЗ.

Ответ:  $x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ .

**8.323.**  $\frac{5 \sin x - 5 \operatorname{tg} x}{\sin x + \operatorname{tg} x} + 4(1 - \cos x) = 0.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq -1. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$\frac{5 \sin x - \frac{5 \sin x}{\cos x}}{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}} + 4(1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5 \sin x (\cos x - 1)}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x (\cos x + 1)} + 4(1 - \cos x) = 0,$$

$$(\cos x - 1) \left( \frac{5}{\cos x + 1} - 4 \right) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos x - 1 = 0, \cos x = 1, x_1 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \frac{5}{\cos x + 1} - 4 = 0, \cos x = \frac{1}{4}, x_2 = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x_1 \text{ не входит в ОДЗ.}$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.324. 4 \cos x = \sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 1.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \sin x \neq 0.$$

Запишем уравнение в виде

$$4 \cos x - \frac{\sqrt{3} \cos x}{\sin x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) = 0,$$

$$\sin 2x - \left( \sin \frac{\pi}{3} \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \sin x \right) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x - \sin \left( \frac{\pi}{3} + x \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \left( \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = 0.$$

Отсюда

$$1) 2 \cos \left( \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = 0, \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi k, x_1 = \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3} \pi k = \frac{2}{9} \pi (3k + 1), k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = 0, \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = \pi n, x_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n = \frac{\pi}{3} (6n + 1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{2}{9} \pi (3k + 1), x_2 = \frac{\pi}{3} (6n + 1), \text{ где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.325. 1 + \frac{2(\cos 2z \operatorname{tg} z - \sin 2z)}{\cos^{-2} z} = \cos 2z.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \cos z \neq 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$1 + \frac{2 \left( \frac{\cos 2z \sin z}{\cos z} - \sin 2z \right)}{\frac{1}{\cos^2 z}} - \cos 2z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2(\sin z \cos 2z - \cos z \sin 2z) \cos z - \cos 2z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\sin(-z)\cos z - \cos 2z = 0, 1 - 2\sin z\cos z - \cos 2z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin z\cos z - 1 + 2\sin^2 z = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 z - 2\sin z\cos z = 0,$$

$$\sin z(\sin z - \cos z) = 0.$$

Отсюда 1)  $\sin z = 0$ ,  $z_1 = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 2)  $\sin z - \cos z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} z = 1$ , отку-

да  $z_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Ответ:*  $z_1 = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $z_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**8.326.**  $(\cos x - \sin x)^2 + \cos^4 x - \sin^4 x = 0,5\sin 4x$ .

*Решение.*

Из условия получаем

$$\cos^2 x - 2\cos x\sin x + \sin^2 x + (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) -$$

$$-0,5\sin 4x = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin 2x + \cos 2x - \sin 2x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos 2x) - (\sin 2x + \sin 2x\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos 2x) - \sin 2x(1 + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow (1 + \cos 2x)(1 - \sin 2x) = 0.$$

Отсюда

1)  $1 + \cos 2x = 0$ ,  $\cos 2x = -1$ ,  $2x_1 = \pi + 2\pi n$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

2)  $1 - \sin 2x = 0$ ,  $\sin 2x = 1$ ,  $2x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$ , где  $n$  и  $k \in \mathbb{Z}$ .

**8.327.**  $\operatorname{ctg} x \left(1 - \frac{1}{2}\cos 2x\right) = 1$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $\sin x \neq 0$ .

По формуле  $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ , имеем

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} \left(1 - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2(1 + \operatorname{tg}^2 x)}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg}^2 x) - (\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x - 1) - (\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0, (\operatorname{tg} x - 1)(2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1) = 0.$$

Отсюда

$$1) \operatorname{tg} x - 1 = 0, \operatorname{tg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1 \neq 0 (D < 0), \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{8.328.} \quad \cos^2(x + 40^\circ) + \cos^2(x - 40^\circ) - \sin 10^\circ \cos 2x = \sin 2x.$$

*Решение.*

Понижая степень, имеем

$$\frac{1}{2}(1 + \cos(2x + 80^\circ)) + \frac{1}{2}(1 + \cos(2x - 80^\circ)) - \sin 10^\circ \cos 2x = \sin 2x,$$

$$1 + \frac{1}{2}(\cos(2x + 80^\circ) + \cos(2x - 80^\circ)) - \sin 10^\circ \cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos 2x \cos 80^\circ - \sin 10^\circ \cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos 2x \sin 10^\circ - \sin 10^\circ \cos 2x = \sin 2x,$$

$$\sin 2x = 1, 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k + 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4}(4k + 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{8.329.} \quad 2\cos^2 \frac{x}{2}(1 - \sin x) + \cos^2 x = 0.$$

*Решение.*

Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них есть нуль. Таким образом имеем:

$$\begin{cases} 2\cos \frac{2x}{2}(1 - \sin x) = 0, \\ \cos^2 x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \cos x)(1 - \sin x) = 0, \\ \cos x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(4k + 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2}(4k + 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.330. \operatorname{tg} 6x \cos 2x - \sin 2x - 2 \sin 4x = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \cos 6x \neq 0.$$

Запишем уравнение в виде

$$\left( \frac{\sin 6x \cos 2x}{\cos 6x} - \sin 2x \right) - 2 \sin 4x = 0,$$

$$\frac{\sin 6x \cos 2x - \cos 6x \sin 2x}{\cos 6x} - 2 \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 6x = 0,$$

$$\sin 4x (1 - 2 \cos 6x) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin 4x = 0, 4x = \pi k, x_1 = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}; \text{ учитывая ОДЗ, получим } \\ = \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}.$$

$$2) 1 - 2 \cos 6x = 0, \cos 6x = \frac{1}{2}, 6x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l, x_2 = \pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi m}{2}; x_2 = \frac{\pi}{18}(6l \pm 1), \text{ где } m \text{ и } l \in \mathbb{Z}.$$

$$8.331. \cos 8x + 3 \cos 4x + 3 \cos 2x = 8 \cos x \cos^3 3x - 0,5.$$

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде

$$\cos 8x + 3 \cos 4x + 3 \cos 2x = 2(2 \cos x \cos 3x)(2 \cos^2 3x) - 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + 3 \cos 4x + 3 \cos 2x = 2(\cos 2x + \cos 4x)(1 + \cos 6x) - 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + 3 \cos 4x + 3 \cos 2x = 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 2x \cos 6x +$$

$$+ 2 \cos 4x \cos 6x - 0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x + \cos 2x = \cos 4x + \cos 8x + \cos 2x + \cos 10x - 0,5,$$

$$\cos 10x = \frac{1}{2}, 10x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \pm \frac{\pi}{30} + \frac{\pi k}{5} = \frac{\pi}{30}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{30}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.332. \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+1) = 1.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos(x+1) \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\sin x \sin(x+1)}{\cos x \cos(x+1)} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x \sin(x+1) - \cos x \cos(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos(2x+1) = 0, \quad 2x+1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$8.333. \quad \frac{8 \sin^{-2} 2x + 1}{\cos^{-2} x + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x + \frac{4}{3}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \sin 2x \neq 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\frac{8}{\sin^2 2x} + 1}{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{8}{1 - \cos^2 2x} + 1}{\frac{1 + \cos 2x}{1 + \cos 2x} + \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} + \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1 + 2 \cos 2x}{3(1 - \cos 2x)} = 0,$$

$$\begin{cases} 1 + 2 \cos 2x = 0, \\ \cos 2x \neq 0, \end{cases} \quad \text{т.е. } \cos 2x = -\frac{1}{2}, \quad 2x = \pm \frac{2}{3} \pi + 2\pi k,$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k = \frac{\pi}{3} (3k \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{3} (3k \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$8.334. \quad 2 + \sin t = 3 \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \cos \frac{t}{2} \neq 0.$$

По формуле  $\sin \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ , имеем

$$2 + \frac{2\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} - 3\operatorname{tg} \frac{t}{2} = 0 \Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^3 \frac{t}{2} - 2\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{t}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^3 \frac{t}{2} - 3 - 2\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{t}{2} + 1 + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\operatorname{tg}^3 \frac{t}{2} - 1\right) - 2\left(\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} - 1\right) + \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} - 1\right)\left(\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{t}{2} + 1\right) - 2\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} - 1\right)\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} + 1\right) + \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} - 1\right)\left(3\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{t}{2} + 2\right) = 0.$$

Отсюда

1)  $\operatorname{tg} \frac{t}{2} - 1 = 0$ ,  $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = 1$ ,  $\frac{t}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

2)  $3\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{t}{2} + 2 \neq 0$  ( $D < 0$ ),  $\emptyset$ .

Ответ:  $t = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

8.335.  $\operatorname{tg}(35^\circ + x)\operatorname{ctg}(10^\circ - x) = \frac{2}{3}$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} \cos(35^\circ + x) \neq 0, \\ \sin(10^\circ - x) \neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{tg}(35^\circ + x)\operatorname{ctg}(90^\circ - (80^\circ + x)) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(35^\circ + x)\operatorname{tg}(45^\circ + (35^\circ + x)) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(35^\circ + x) \cdot \frac{\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}(35^\circ + x)}{1 - \operatorname{tg}45^\circ \operatorname{tg}(35^\circ + x)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(35^\circ + x) \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}(35^\circ + x)}{1 - \operatorname{tg}(35^\circ + x)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^2(35^\circ + x) + 5\operatorname{tg}(35^\circ + x) - 2 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg}(35^\circ + x)$ , получим

$$\operatorname{tg}(35^\circ + x) = \frac{1}{3}, \quad 35^\circ + x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 180^\circ k, \quad x_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - 35^\circ + 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

или

$$\operatorname{tg}(35^\circ + x) = -2, \quad 35^\circ + x = \operatorname{arctg}(-2) + 180^\circ n, \quad x_2 = -\operatorname{arctg} 2 - 35^\circ + 180^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - 35^\circ + 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = -\operatorname{arctg} 2 - 35^\circ + 180^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

**8.336.**  $2\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x + 2\operatorname{tg}x\operatorname{tg}3x + \operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x = 0.$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0, \\ \cos 3x \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$(2\operatorname{tg}x + 2\operatorname{tg}x\operatorname{tg}3x) + (\operatorname{tg}2x + \operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{tg}x(1 + \operatorname{tg}3x) + \operatorname{tg}2x(1 + \operatorname{tg}3x) = 0, \quad (1 + \operatorname{tg}3x)(2\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x) = 0.$$

Отсюда

$$1) \quad 1 + \operatorname{tg}3x = 0, \quad \operatorname{tg}3x = -1, \quad 3x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$2) \quad 2\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{tg}x + \frac{2\operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0, \quad 2\operatorname{tg}x \left( 1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right) = 0.$$

Отсюда или  $\operatorname{tg}x = 0, \quad x_2 = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ , или  $1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0, \quad \operatorname{tg}x = \pm\sqrt{2},$

$$x_3 = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{2} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad \text{С учетом ОДЗ} \quad x_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \neq 3m + 1,$$

$m \in \mathbb{Z}.$

*Ответ:*  $x_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \neq 3m + 1; \quad x_2 = \pi n, \quad x_3 = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{2} + \pi l,$  где  $k, l$  и  $m \in \mathbb{Z}.$

$$8.337. \sin^4 2x + \sin^3 2x \cos 2x - 8 \sin 2x \cos^3 2x - 8 \cos^4 2x = 0.$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$\sin^3 2x (\sin 2x + \cos 2x) - 8 \cos^3 2x (\sin 2x + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin 2x + \cos 2x)(\sin^3 2x - 8 \cos^3 2x) = 0.$$

Отсюда  $\sin 2x + \cos 2x = 0$  или  $\sin^3 2x - 8 \cos^3 2x = 0$ .

$$1) \operatorname{tg} 2x = -1, 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, x_1 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \operatorname{tg}^3 2x = 8, \operatorname{tg} 2x = 2, 2x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, x_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, x_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}, \text{ где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.338. \cos t (1 - \operatorname{tg} t) (\sin t + \cos t) = \sin t.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \cos t \neq 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\cos t \left( 1 - \frac{\sin t}{\cos t} \right) (\sin t + \cos t) - \sin t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos t - \sin t) (\cos t + \sin t) - \sin t = 0 \Leftrightarrow \cos^2 t - \sin^2 t - \sin t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 t - \sin t = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\sin t$ , найдем

$$\sin t = -1, t_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \sin t = \frac{1}{2}, t_2 = (-1)^l \frac{\pi}{6} + \pi l, l \in \mathbb{Z}; t_1 \text{ не}$$

подходит по ОДЗ.

$$\text{Ответ: } t = (-1)^l \frac{\pi}{6} + \pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

$$8.339. \frac{2}{\sqrt{\cos x}} - \frac{\cos x}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{1 - \cos x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{1 - \cos x}}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < \cos x \leq 1, \\ \cos x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{\cos x}} - \left( \frac{\cos x}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{1 - \cos x}} + \frac{\cos x}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{1 - \cos x}} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{\cos x}} - \cos x \cdot \left( \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos x} - \sqrt{1 - \cos x}}{(\sqrt{\cos x} - \sqrt{1 - \cos x})(\sqrt{\cos x} + \sqrt{1 - \cos x})} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{\cos x}} - \frac{2 \cos x \sqrt{\cos x}}{2 \cos x - 1} = 0, \quad \frac{2 \cos x - 1 - \cos^2 x}{\sqrt{\cos x}(2 \cos x - 1)} = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 0, \quad \cos x = 1, \quad x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

**8.340.**  $1 + \sin z + \cos z + \sin 2z + \cos 2z = 0$ .

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} & \sin^2 z + \cos^2 z + \sin z + \cos z + 2 \sin z \cos z + \cos^2 z - \sin^2 z = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\sin z + \cos z) + (2 \sin z \cos z + 2 \cos^2 z) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\sin z + \cos z) + 2 \cos z (\sin z + \cos z) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\sin z + \cos z)(1 + 2 \cos z) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда 1)  $\sin z + \cos z = 0$ , 2)  $1 + 2 \cos z = 0$ .

$$1) \operatorname{tg} z = -1, \quad z_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k - 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos z = -\frac{1}{2}, \quad z_2 = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n = \frac{2}{3}\pi(3n \pm 1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $z_1 = \frac{\pi}{4}(4k - 1); z_2 = \frac{2}{3}\pi(3n \pm 1)$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

**8.341.**  $\operatorname{ctg}(x - 25^\circ) + \operatorname{tg}(3x + 15^\circ) = 2 \sin(2x - 50^\circ)$ .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin(x - 25^\circ) \neq 0, \\ \cos(3x + 15^\circ) \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 25^\circ \neq 180^\circ t, \\ 3x + 15^\circ \neq 90^\circ + 180^\circ p, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 25^\circ + 180^\circ t, \quad t \in \mathbb{Z}, \\ x \neq 25^\circ + 60^\circ p, \quad p \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\cos(x-25^\circ)}{\sin(x-25^\circ)} + \frac{\sin(3x+15^\circ)}{\cos(3x+15^\circ)} - 2\sin(2x-50^\circ) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(x-25^\circ)\cos(3x+15^\circ) + \sin(x-25^\circ)\sin(3x+15^\circ)}{\sin(x-25^\circ)\cos(3x+15^\circ)} - 2\sin(2x-50^\circ) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(2x+40^\circ)}{\sin(x-25^\circ)\cos(3x+15^\circ)} - 2\sin((2x+40^\circ)-90^\circ) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(2x+40^\circ)}{\sin(x-25^\circ)\cos(3x+15^\circ)} + 2\cos(2x+40^\circ) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x+40^\circ)(1+2\sin(x-25^\circ)\cos(3x+15^\circ)) = 0.$$

Отсюда

1)  $\cos(2x+40^\circ) = 0$ ,  $2x+40^\circ = 90^\circ+180^\circ k$ ,  $x_1 = 25^\circ+90^\circ k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

2)  $1+2\sin(x-25^\circ)\cos(3x+15^\circ) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin(x-25^\circ-3x-15^\circ) + \sin(x-25^\circ+3x+15^\circ) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin(2x+40^\circ) + \sin(4x-10^\circ) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin(2x+40^\circ) + \sin(4x+80^\circ-90^\circ) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin(2x+40^\circ) - \sin(90^\circ-(4x+80^\circ)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin(2x+40^\circ) - \cos(4x+80^\circ) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin(2x+40^\circ) - \cos 2(2x+40^\circ) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin(2x+40^\circ) - 1 + 2\sin^2(2x+40^\circ) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2(2x+40^\circ) - \sin(2x+40^\circ) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2(2x+40^\circ)(2\sin(2x+40^\circ) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2x+40^\circ) = 0, \\ \sin(2x+40^\circ) = \frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+40^\circ = 180^\circ n, \\ 2x+40^\circ = 30^\circ + 360^\circ m, \\ 2x+40^\circ = 150^\circ + 360^\circ l, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -20^\circ + 90^\circ n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x_3 = -5^\circ + 180^\circ m, & m \in \mathbb{Z}, \\ x_4 = 55^\circ + 180^\circ l, & l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

С учетом ОДЗ имеем  $x_1 = 25^\circ + 90^\circ(2r + 1) = 115^\circ + 180^\circ r$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x_1 = 115^\circ + 180^\circ r$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ ;  $x_2 = -20^\circ + 90^\circ n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $x_3 = -5^\circ + 180^\circ m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ;  $x_4 = 55^\circ + 180^\circ l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ .

**8.342.**  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{tg}x + 3\operatorname{ctg}x + 4 = 0$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$

Запишем уравнение в виде

$$(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)^2 - 2\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x + 3(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x) + 4 = 0,$$

$$(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)^2 + 3(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x) + 2 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x$ , получим  $(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)_1 = -2$  или  $(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)_2 = -1$ .

$$1) \operatorname{tg}x + \frac{1}{\operatorname{tg}x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg}x + 1 = 0, (\operatorname{tg}x + 1)^2 = 0, \operatorname{tg}x = -1,$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k - 1), k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}x + 1 \neq 0 (D < 0), \emptyset.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4}(4k - 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**8.343.**  $\operatorname{tg}2t = \operatorname{ctg}t - 4\cos t \cos 3t$ .

Решение.

ОДЗ:  $\begin{cases} \cos 2t \neq 0, \\ \sin t \neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\left( \frac{\sin 2t}{\cos 2t} - \frac{\cos t}{\sin t} \right) + 4\cos t \cos 3t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2t \sin t - \cos 2t \cos t}{\cos 2t \sin t} + 4\cos t \cos 3t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\cos 3t}{\cos 2t \sin t} + 4\cos t \cos 3t = 0 \Leftrightarrow -\cos 3t(1 - 4\cos t \cos 2t \sin t) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos 3t = 0, 3t = \frac{\pi}{2} + \pi k, t_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 1 - 4 \cos t \cos 2t \sin t = 0 \Leftrightarrow 1 - 2(2 \sin t \cos t) \cos 2t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \sin 2t \cos 2t = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin 4t = 0 \Leftrightarrow \sin 4t = 1, 4t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$t_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{8}(4n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $t_1 = \frac{\pi}{6}(2k+1)$ ;  $t_2 = \frac{\pi}{8}(4n+1)$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.344. \cos 2x = \cos^2 \frac{3x}{2}.$$

Решение.

Из условия имеем

$$\cos 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 3x)$$

и по формуле  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ ,  $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$  имеем

$$2(2\cos^2 x - 1) - 1 - (4\cos^3 x - 3\cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 4\cos^2 x - 3\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x - 1) - 3(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1)(4\cos^2 x - 3) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos x - 1 = 0, \cos x = 1, x_1 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 4\cos^3 x - 3 = 0, \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1), n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x_1 = 2\pi k$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1)$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.345. (\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t + 2\operatorname{tg} 2t)(1 + \cos 3t) = 4 \sin 3t.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos t \neq 0, \\ \sin t \neq 0, \\ \cos 2t \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\left( \frac{\sin t}{\cos t} - \frac{\cos t}{\sin t} + 2\operatorname{tg} 2t \right) \cdot (1 + \cos 3t) - 4 \sin 3t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin t \cos t} + 2 \operatorname{tg} 2t \right) \cdot (1 + \cos 3t) - 4 \sin 3t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( -\frac{2 \cos 2t}{\sin 2t} + 2 \operatorname{tg} 2t \right) \cdot (1 + \cos 3t) - 4 \sin 3t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \cdot \left( \frac{\cos 2t}{\sin 2t} - \frac{\sin 2t}{\cos 2t} \right) \cdot (1 + \cos 3t) - 4 \sin 3t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left( \frac{\cos^2 2t - \sin^2 2t}{\sin 2t \cos 2t} \right) \cdot (1 + \cos 3t) + 4 \sin 3t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 \cos 4t (1 + \cos 3t)}{\sin 4t} + 4 \sin 3t = 0 \Leftrightarrow \cos 4t (1 + \cos 3t) + \sin 3t \sin 4t = 0,$$

$$\cos 4t + \cos 4t \cos 3t + \sin 4t \sin 3t = 0 \Leftrightarrow \cos 4t + \cos t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{5t}{2} \cos \frac{3t}{2} = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos \frac{5t}{2} = 0, \frac{5t}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, t_1 = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5} \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$2) \cos \frac{3t}{2} = 0, \frac{3t}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, t_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая ОДЗ, получаем

$$t_1 = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5} \pi k = \frac{\pi}{5} (2k + 1), k \neq 5l + 2; t_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \pi n = \frac{\pi}{3} (2n + 1), n \neq 3l + 1,$$

где  $k, n, \text{ и } l \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Ответ: } t_1 = \frac{\pi}{5} (2k + 1), k \neq 5l + 2; t_2 = \frac{\pi}{3} (2n + 1), n \neq 3l + 1, \text{ где } k, n, \text{ и}$$

$l \in \mathbb{Z}$ .

$$8.346. \sin x (\cos x - 2) + \operatorname{tg} x = 2 - \cos x - \cos^{-1} x.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $\cos x \neq 0$ .

Запишем уравнение в виде

$$\sin x (\cos x - 2) + (\cos x - 2) + \left( \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - 2)(\sin x + 1) + \frac{\sin x + 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1) \cdot \left( \cos x - 2 + \frac{1}{\cos x} \right) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin x + 1 = 0, \sin x = -1, x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos x - 2 + \frac{1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0, (\cos x - 1)^2 = 0,$$

$$\cos x - 1 = 0, \cos x = 1, x_2 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x_1 \text{ не подходит по ОДЗ.}$$

Ответ:  $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.347. (1 + \cos x) \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} - 2 + \sin x = 2 \cos x.$$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$(1 + \cos x) \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} - 2 - 2 \cos x = -\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos x) \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} - 2(1 + \cos x) = -\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos x) \left( 2 - \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right) = \sin x \Leftrightarrow 2 - \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

Используя формулу  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ , имеем  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} - 2 = 0$ . Ре-

шив это уравнение как квадратное относительно  $\sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$ , получим

$$\sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = -2, \emptyset \text{ или } \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = 1, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(4k + 1), k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1), k \in \mathbb{Z}$ .



$$8.348. 1 - \sin 2x = \cos x - \sin x.$$

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде

$$\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x - (\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)^2 - (\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x - 1) = 0.$$

Отсюда 1)  $\cos x - \sin x = 0$ , 2)  $\cos x - \sin x - 1 = 0$ .

$$1) \operatorname{tg} x = 1, x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k + 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0, 2 \sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Отсюда или  $\sin \frac{x}{2} = 0$ ,  $\frac{x}{2} = \pi l$ ,  $x_2 = 2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , или  $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0$ ,

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1, \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2}(4n - 1), n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k + 1)$ ;  $x_2 = 2\pi l$ ;  $x_3 = \frac{\pi}{2}(4n - 1)$ , где  $k, l$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.349. \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x - \operatorname{ctg}^2 x = \frac{106}{9}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Так как  $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$  и  $\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$ , то получаем

$$\left( \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} \right)^2 + \left( \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} \right)^2 + \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} - \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} - \frac{106}{9} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} + \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} \right)^2 - 2 \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} +$$

$$+ \frac{(1 - \cos 2x)^2 - (1 + \cos 2x)^2}{(1 + \cos 2x)(1 - \cos 2x)} - \frac{106}{9} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{(1 - \cos 2x)^2 + (1 + \cos 2x)^2}{1 - \cos^2 2x} \right)^2 - 2 - \frac{4 \cos 2x}{1 - \cos^2 2x} - \frac{106}{9} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{2 + 2 \cos^2 2x}{1 - \cos^2 2x} \right)^2 - \frac{4 \cos 2x}{1 - \cos^2 2x} - \frac{124}{9} = 0,$$

$$\left( \frac{1 + \cos^2 2x}{1 - \cos^2 2x} \right)^2 - \frac{\cos 2x}{1 - \cos^2 2x} - \frac{31}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 22 \cos^4 2x - 9 \cos^3 2x - 80 \cos^2 2x + 9 \cos 2x + 22 = 0.$$

Пусть  $\cos 2x = y$ . Тогда уравнение примет вид

$$22y^4 - 9y^3 - 80y^2 + 9y + 22 = 0.$$

$$22y^2 - 9y - 80 + \frac{9}{y} + \frac{22}{y^2} = 0 \Leftrightarrow 22 \left( y^2 + \frac{1}{y^2} \right) - 9 \left( y - \frac{1}{y} \right) - 80 = 0,$$

$$22 \left( \left( y - \frac{1}{y} \right)^2 + 2 \right) - 9 \left( y - \frac{1}{y} \right) - 80 = 0, \quad 22 \left( y - \frac{1}{y} \right)^2 - 9 \left( y - \frac{1}{y} \right) - 36 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $y - \frac{1}{y}$ , найдем

$$\left( y - \frac{1}{y} \right)_1 = -\frac{12}{11} \text{ и } \left( y - \frac{1}{y} \right)_2 = \frac{33}{22}.$$

После упрощений получим

$$11y^2 + 12y - 11 = 0 \text{ и } 22y^2 - 33y - 22 = 0; \quad y_1 = \frac{-6 - \sqrt{157}}{11},$$

$$y_2 = \frac{-6 + \sqrt{157}}{11}, \quad y_3 = -\frac{1}{2}, \quad y_4 = 2.$$

Тогда

$$\cos 2x = \frac{-6 - \sqrt{157}}{11} < -1, \emptyset; \quad \cos 2x = \frac{-6 + \sqrt{157}}{11},$$

$$2x = \pm \arccos \frac{-6 + \sqrt{157}}{11} + 2\pi k, \quad x_1 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-6 + \sqrt{157}}{11} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}, \quad 2x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos 2x = 2, \quad \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-6 + \sqrt{157}}{11} + \pi k; \quad x_2 = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1), \text{ где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.350. \quad \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = 0.$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \pi l, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \\ x = \frac{7\pi}{12} + \pi l. \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} = \frac{7\pi}{12} + \pi l, \quad k = 1 + 2l, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad l \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi(1+2l)}{2} = \frac{7\pi}{12} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{7\pi}{12} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

$$8.351. \quad 3\sqrt{3}\operatorname{tg}x \sin x - \operatorname{ctg}x \cos x + 9 \sin x - 3\sqrt{3} \cos x = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{3\sqrt{3}\sin^2 x}{\cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x} + 9\sin x - 3\sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}\sin^3 x + 9\sin^2 x \cos x - 3\sqrt{3}\cos^2 x \sin x - \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}\operatorname{tg}^3 x + 9\operatorname{tg}^2 x - 3\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{3}\operatorname{tg}^3 x - 1) + (9\operatorname{tg}^2 x - 3\sqrt{3}\operatorname{tg} x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1)(3\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1) + 3\sqrt{3}(\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1)\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1)(3\operatorname{tg}^2 x + 4\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0, \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{\pi}{6}(6k+1), k \in \mathbb{Z};$$

2)  $3\operatorname{tg}^2 x + 4\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1 = 0$ . Решив это уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg} x$ , найдем

$$\operatorname{tg} x = \frac{-2\sqrt{3}-3}{3}, x_2 = \operatorname{arctg} \frac{-2\sqrt{3}-3}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

или

$$\operatorname{tg} x = \frac{-2\sqrt{3}+3}{3}, x_3 = \operatorname{arctg} \frac{-2\sqrt{3}+3}{3} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{6}(6k+1), x_2 = \operatorname{arctg} \frac{-2\sqrt{3}-3}{3} + \pi n,$$

$$x_3 = \operatorname{arctg} \frac{-2\sqrt{3}+3}{3} + \pi l, \text{ где } k, n \text{ и } l \in \mathbb{Z}$$

$$8.352. \cos 2x - \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} - 1.$$

*Решение.*

По формулам

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\text{и } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

имеем

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x + \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} - 1 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 1 - \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x - 2(1 - \sqrt{2}) \cos x - \sqrt{2} = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\cos x$ , имеем

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_1 = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k = \frac{\pi}{4}(8k \pm 3), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n = \frac{\pi}{3}(6n \pm 1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi}{4}(8k \pm 3)$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{3}(6n \pm 1)$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

**8.353.**  $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4.$

*Решение.*

ОДЗ:  $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$

Так как

$$a^4 + b^4 = \left( (a+b)^2 - 2ab \right)^2 - 2a^2b^2 \quad \text{и} \quad (a+b)^2 = (a+b)^2 - 2ab,$$

то имеем

$$\left( (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - 2\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x \right)^2 - 2\operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg}^2 x + (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 -$$

$$- 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - 2 \right)^2 - 2 + (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^4 - 3(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - 4 = 0.$$

Решив это уравнение как биквадратное относительно  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ , получим

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = 0,$$

$$(\operatorname{tg} x + 1)^2 = 0 \quad \text{или} \quad (\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0.$$

Отсюда  $\operatorname{tg} x = \pm 1$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{4}(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}$

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{4}(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}$

$$8.354. \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)}{1 + \cos x} = 2.$$

*Решение.*

$$\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq -1. \end{cases}$$

Имеем

$$\operatorname{ctgx} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} - 2 = 0, \quad \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x - 2 \sin x(1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1 + \cos x) + (1 - \cos^2 x) - 2 \sin x(1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1 + \cos x) + (1 - \cos x)(1 + \cos x) - 2 \sin x(1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(1 - 2 \sin x) = 0.$$

Отсюда

$$1) 1 + \cos x = 0, \cos x = -1, x_1 = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 1 - 2 \sin x = 0, \sin x = \frac{1}{2}, x_2 = (-1)^l \frac{\pi}{6} + \pi l, l \in \mathbb{Z}; x_1 \text{ не подходит по ОДЗ.}$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^l \frac{\pi}{6} + \pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

$$8.355. \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0. \end{cases}$$

По формуле  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ , имеем

$$\frac{-\sin x}{\cos x \cos 2x} - \sin x = 0 \Leftrightarrow -\sin x \left( \frac{1}{\cos x \cos 2x} + 1 \right) = 0.$$

Отсюда

$$1) \sin x = 0, x_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \frac{1}{\cos x \cos 2x} + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x \cos 2x = 0, \quad 2 \cos^3 x - \cos x + 1 = 0,$$

$$(2 \cos^3 x + 2) - (\cos x + 1) = 0, \quad 2(\cos x + 1)(\cos^2 x - \cos x + 1) - (\cos x + 1) = 0,$$

$$(\cos x + 1)(2 \cos^2 x - 2 \cos x + 1) = 0.$$

Отсюда  $\cos x + 1 = 0$ ,  $\cos x = -1$ ,  $x_2 = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$2 \cos^2 x - 2 \cos x + 1 \neq 0$  ( $D < 0$ ),  $\emptyset$ ;  $x_2$  входит в  $x_1$ .

*Ответ:*  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**8.356.**  $2 \sin^2 3x + \sin^2 6x = (\sin 2x + \sin 4x) \cos^{-1} x \sin^{-1} 3x$ .

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin 3x \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$2 \sin^2 3x + (\sin 2(3x))^2 = \frac{\sin 2x + \sin 4x}{\cos x \sin 3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 3x + (2 \sin 3x \cos 3x)^2 = \frac{2 \sin 3x \cos x}{\cos x \sin 3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 3x + 4 \sin^2 3x \cos^2 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 3x + 4 \sin^2 3x(1 - \sin^2 3x) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^4 3x - 3 \sin^2 3x + 1 = 0.$$

Решив это уравнение как биквадратное относительно  $\sin 3x$ , получим

$$\sin 3x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 3x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \sin 3x = \pm 1,$$

$$3x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

С учетом ОДЗ  $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \neq 3l + 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ .

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi}{12}(2k + 1)$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{6}(2n + 1)$ ,  $n \neq 3l + 1$ , где  $k$ ,  $n$  и  $l \in \mathbb{Z}$ .

$$8.357. 4 \sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12 \cos^4 x.$$

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде

$$4(\sin^2 x)^2 + \cos 2(2x) - 1 - 12(\cos^2 x)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)^2 + 2 \cos^2 2x - 1 - 1 - 3(1 + \cos 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2},$$

$$2x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$8.358. 5(1 - \sin 2x) - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0.$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$5(\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(\sin x - \cos x)^2 - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\sin x - \cos x$ , имеем

$$\sin x - \cos x = 3, \quad \emptyset; \quad \text{или} \quad \sin x - \cos x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{5}, \quad 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5}, \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Тогда

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{10} + \pi k, \quad x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$8.359. 37 \operatorname{tg} 3x = 11 \operatorname{tg} x.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$



Используя формулу  $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$ , перепишем уравнение в виде

$$37 \cdot \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} - 11 \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \cdot \left( \frac{111 - 37 \operatorname{tg}^2 x - 11 + 33 \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x \cdot \left( \frac{100 - 4 \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg}^2 x = 25, \\ \operatorname{tg}^2 x \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg} x = \pm 5, \\ \operatorname{tg} x \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Последнее решение не удовлетворяет исходному уравнению. Отсюда  $x_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z}; x_2 = \arctg(\pm 5) + \pi n = \pm \arctg 5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z}; x_2 = \pm \arctg 5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**8.360.**  $\sqrt{2}(\cos^4 2x - \sin^4 2x) = \cos 2x + \sin 2x$ .

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(\cos^2 2x + \sin^2 2x)(\cos^2 2x - \sin^2 2x) - (\cos 2x + \sin 2x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) - (\cos 2x + \sin 2x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\cos 2x + \sin 2x)(\sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда  $\cos 2x + \sin 2x = 0$  или  $\sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x - 1 = 0$ .

$$1) \operatorname{tg} 2x = -1, 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, x_1 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{8}(4k - 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4} + 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, &x_2 = \pm \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ:  $x_1 = -\frac{\pi}{8}(4k - 1), k \in \mathbb{Z}; x_2 = \pm \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**8.361.**  $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \sin^{-1} x - \cos^{-1} x$ .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin x - \cos x) = 0,$$

$$(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x) = 0,$$

$$(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + 1) = 0.$$

Отсюда 1)  $\sin x - \cos x = 0$ ; 2)  $\sin x + \cos x + 1 = 0$ .

$$1) \operatorname{tg} x = 1, x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k+1), k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Отсюда  $\cos \frac{x}{2} = 0, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, x_2 = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ , или  $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1, \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi l, x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}; x_2 \text{ и } x_3 \text{ не входят в ОДЗ.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4}(4k+1), k \in \mathbb{Z}$$

$$8.362. \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}.$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) - \frac{7}{16} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x - \frac{7}{16} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x - \frac{7}{16} = 0 \Leftrightarrow 16 - 12(4 \sin^2 x \cos^2 x) - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4}, \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 2x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k,$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1), k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1), k \in \mathbb{Z}$$

$$8.363. \sin 3x + \sin x - \sin 2x = 2 \cos x (\cos x - 1).$$

*Решение.*

Так как  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  и  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ , то имеем

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin x \cos x - 2 \cos x (\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4 \sin x - 4 \sin^3 x - 2 \sin x \cos x) - 2 \cos x (\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x (2 - 2(1 - \cos^2 x) - \cos x) - 2 \cos x (\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x (2 \cos^2 x - \cos x) - 2 \cos x (\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x (2 \cos x - 1) - 2 \cos x (\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x (2 \cos x - 1) - \cos x + 1) = 0.$$

Отсюда

$$1) \cos x = 0, x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2} (2k + 1), k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2 \sin x \cos x - \sin x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2 \sin x \cos x) - (\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) - (\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \left( 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \left( 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{x}{2} (\sin x + \cos x) \left( \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Отсюда а)  $\sin \frac{x}{2} = 0$ ; б)  $\sin x + \cos x = 0$ ; в)  $\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0$ .

Тогда а)  $\frac{x}{2} = \pi n, x_2 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\operatorname{tg} x = -1, x_3 = -\frac{\pi}{4} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$ ;

в)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi t, x_4 = \frac{\pi}{2} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$ . Решения  $x_4$  входят в  $x_1$ .

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi}{2} (2k + 1), k \in \mathbb{Z}; x_2 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x_3 = \frac{\pi}{4} (4l - 1), l \in \mathbb{Z}$ .

$$8.364. \cos 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot (\cos x + \sin x).$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot (\cos x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x) \left( \cos x - \sin x - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) = 0.$$

Отсюда 1)  $\cos x + \sin x = 0$ , 2)  $\cos x - \sin x - \frac{1+\sqrt{3}}{2} = 0$ .

$$1) \operatorname{tg} x = -1, x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k-1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \cos x - \sin x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow \left( \cos x - \frac{1}{2} \right) - \left( \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \right) - \left( \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) - 2 \sin \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \left( \sin \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = 0.$$

Тогда

$$\sin \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = 0, \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = \pi n, x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

или

$$\sin \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = -1, \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + \pi m,$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1), k \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{\pi}{3}(6n-1), n \in \mathbb{Z};$$

$$x_3 = \frac{\pi}{6}(12m-1), m \in \mathbb{Z}.$$

$$8.365. 2(1 + \sin 2x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$2(\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x)^2 - \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x}{\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x)^2 - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x)^2 + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \left( 2(\sin x + \cos x) + \frac{1}{\sin x - \cos x} \right) = 0.$$

$$\text{Отсюда 1) } \sin x + \cos x = 0, \quad 2) \quad 2(\sin x + \cos x) + \frac{1}{\sin x - \cos x} = 0.$$

$$1) \operatorname{tg} x = -1, \quad x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k - 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2(\sin^2 x - \cos^2 x) + 1 = 0, \quad \cos 2x = \frac{1}{2}, \quad 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{4}(4k - 1); \quad x_2 = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1), \quad \text{где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.366. \frac{1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x}{\operatorname{tg} 2x} = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin 2x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$\begin{aligned} 1 + \sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + (1 + 2 \sin x \cos x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) + (\cos x - \sin x) \times \\ \times (\cos x + \sin x) &= 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x) \times \\ \times (\cos x + \sin x) &= 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \cos x + \sin x + \cos x - \sin x) = 0, \\ (\cos x + \sin x)(1 + 2 \cos x) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда 1)  $\cos x + \sin x = 0$ , 2)  $1 + 2 \cos x = 0$ .

$$1) \operatorname{tg} x = -1, x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos x = -\frac{1}{2}, x_2 = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n = \frac{2\pi}{3}(3n \pm 1), n \in \mathbb{Z}, x_1 \text{ не подходит по ОДЗ.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2\pi}{3}(3n \pm 1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.367. \frac{\operatorname{tg} 2t}{\cos^2 t} - \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 2t} = 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos t \neq 0, \\ \cos 2t \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2t}{\cos 2t \cos^2 t} - \frac{\sin t}{\cos t \cos^2 2t} &= 0, \frac{\sin 2t \cos 2t - \sin t \cos t}{\cos^2 t \cos^2 2t} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2 \sin t \cos t \cos 2t - \sin t \cos t}{\cos^2 t \cos^2 2t} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\sin t \cos t (2 \cos 2t - 1)}{\cos^2 t \cos^2 2t} = 0, \\ \frac{\sin t (2 \cos 2t - 1)}{\cos t \cos^2 2t} &= 0 \Leftrightarrow \sin t (2 \cos 2t - 1) = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$1) \sin t = 0, t_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2 \cos 2t - 1 = 0, \cos 2t = \frac{1}{2}, 2t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, t_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $t_1 = \pi k, t_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.368. \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0, \\ \cos 3x \neq 0. \end{cases}$$

Так как  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$  и  $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$ , то имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} + \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \left( 1 + \frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 x} + \frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x} \right) &= 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} x (2\operatorname{tg}^4 x - 5\operatorname{tg}^2 x + 3)}{(1-\operatorname{tg}^2 x)(1-3\operatorname{tg}^2 x)} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда 1)  $\operatorname{tg} x = 0, x_1 = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; 2)  $2\operatorname{tg}^4 x - 5\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$ . Решив уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg}^2 x$ , найдем

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \operatorname{arctg} \left( \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \pi k = \pm \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 3, \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3}, x_3 = \operatorname{arctg}(\pm \sqrt{3}) + \pi m = \pm \frac{\pi}{3} + \pi m = \frac{\pi}{3}(3m \pm 1), m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x_1 = \pi n, n \in \mathbb{Z}; x_2 = \pi k \pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}, k \in \mathbb{Z}; x_3 = \frac{\pi}{3}(3m \pm 1), m \in \mathbb{Z}$ .

$$8.369. \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} - (\cos x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - (\cos x + \sin x) \sin x \cos x = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x) \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - \sin x \cos x) = 0.$$

Отсюда 1)  $\cos x + \sin x = 0$ ; 2)  $\cos x - \sin x - \sin x \cos x = 0$ .

$$1) \operatorname{tg} x = -1, x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k-1), k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \text{ Пусть } \cos x - \sin x = y \Rightarrow \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = y^2, -2 \sin x \cos x = \\ = y^2 - 1, -\sin x \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}. \text{ Относительно } y \text{ уравнение принимает вид}$$

$$y + \frac{y^2 - 1}{2} = 0, y^2 + 2y - 1 = 0, \text{ откуда } y_1 = -1 - \sqrt{2}, \emptyset; y_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

Отсюда

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \pi n, x_2 = (-1)^n \arcsin \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\pi}{4}(4k-1); x_2 = (-1)^n \arcsin \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}(4n+1), \text{ где } k \text{ и}$$

$n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.370. \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{2}} + \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{2}} = 2.$$

*Решение.*

Пусть

$$\begin{cases} \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{2}} = u > 0, \\ \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{2}} = v > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x + \frac{1}{2} = u^2 > 0, \\ \sin^2 x + \frac{1}{2} = v^2 > 0. \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 = 2.$$



Получили следующую систему

$$\begin{cases} u+v=2, \\ u^2+v^2=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2, \\ (u+v)^2-2uv=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2, \\ uv=1. \end{cases} \Rightarrow u=1, v=1.$$

Тогда

$$\sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{2}} = 1, \cos^2 x + \frac{1}{2} = 1, \cos^2 x = \frac{1}{2}, \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{4}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$

**8.371.**  $\sin 3x = a \sin x$ .

Решение.

По формуле  $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$  имеем

$$3\sin x - 4\sin^3 x - a\sin x = 0, \quad 4\sin^3 x + (a-3)\sin x = 0,$$

$$\sin x(4\sin^2 x + a - 3) = 0.$$

Отсюда

1)  $\sin x = 0, x_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ;

2)  $4\sin^2 x + a - 3 = 0, \sin^2 x = \frac{3-a}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{3-a}{4}, \cos 2x = \frac{a-1}{2}$ ,

$$\begin{cases} 2x = \pm \arccos \frac{a-1}{2} + 2\pi n, \\ -1 \leq \frac{a-1}{2} \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{a-1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ -1 \leq a \leq 3. \end{cases}$$

Ответ:  $x_1 = \pi k$ , где  $a \in \mathbb{R}$ ;  $x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{a-1}{2} + \pi n$ , где  $a \in [-1; 3]$ ;

$k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

**8.372.**  $\cos 3x = m \cos x$ .

Решение.

По формуле  $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$  имеем

$$4\cos^3 x - 3\cos x - m\cos x = 0, \quad \cos x(4\cos^2 x - 3 - m) = 0.$$

Отсюда

1)  $\cos x = 0, x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$ ;

$$2) 4 \cos^2 x - 3 - m = 0 \Leftrightarrow 2(1 + \cos 2x) = m + 3, \cos 2x = \frac{m+1}{2},$$

$$\begin{cases} 2x = \pm \arccos \frac{m+1}{2} + 2\pi n, \\ -1 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{m+1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \\ -3 \leq m \leq 1. \end{cases}$$

Ответ:  $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ , где  $m \in \mathbb{R}$ ;  $x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{m+1}{2} + \pi n$ , где  $m \in [-3; 1]$ ;  $k$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .

**8.373.**  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \alpha + 1 = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \alpha$ .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \alpha = -(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \alpha) \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \alpha} = -1 \Rightarrow \operatorname{tg}(x + \alpha) = -1,$$

$$x + \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x = -\alpha - \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из ОДЗ следует, что  $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ .

Ответ:  $x = -\alpha + \frac{\pi}{4}(4k-1)$  при  $\alpha \neq \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ . При  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  решений нет.

**8.374.**  $12 \sin x + 4\sqrt{3} \cos(\pi + x) = m\sqrt{3}$ .

Решение.

Из условия имеем

$$12 \sin x - 4\sqrt{3} \cos x = 8\sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) = 8\sqrt{3} (\sin 60^\circ \sin x - \cos 60^\circ \cos x) = -8\sqrt{3} \cos(60^\circ + x) = 8\sqrt{3} \sin(x - 30^\circ).$$

Тогда

$$8\sqrt{3} \sin(x - 30^\circ) = m\sqrt{3}, \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{m}{8},$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{m}{8} + \pi n + \frac{\pi}{6} = (-1)^n \arcsin \frac{m}{8} + \frac{\pi}{6}(6n+1),$$

где  $-8 \leq m \leq 8, n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x = (-1)^n \arcsin \frac{m}{8} + \frac{\pi}{6}(6n+1)$ , где  $-8 \leq m \leq 8, n \in \mathbb{Z}$ .

$$8.375. \sin\left(x + \frac{5}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{1}{2}\right) = \cos\alpha.$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$2 \sin\left(x + \frac{3}{2}\right) \cos 1 = \cos\alpha, \quad \sin\left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{\cos\alpha}{2 \cos 1}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x + \frac{3}{2} = (-1)^k \arcsin \frac{\cos\alpha}{2 \cos 1} + \pi k, \\ -1 \leq \frac{\cos\alpha}{2 \cos 1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^k \arcsin \frac{\cos\alpha}{2 \cos 1} - \frac{3}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ -2 \cos 1 \leq \cos\alpha \leq 2 \cos 1. \end{cases}$$

*Ответ:*  $x = (-1)^k \arcsin \frac{\cos\alpha}{2 \cos 1} - \frac{3}{2} + \pi k$  при  $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.376. 2^{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x} = 4.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ .

Запишем уравнение в виде

$$2^{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x} = 2^2 \Leftrightarrow 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(1 - \cos x)}{\sin x} - \cos x - 2 = 0 \Rightarrow 2 - 2 \cos x - \sin x \cos x - 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2(\cos x + \sin x) - \sin x \cos x = 0.$$

Пусть  $\cos x + \sin x = y \Rightarrow \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = y^2, 2 \sin x \cos x =$   
 $= y^2 - 1, \sin x \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}.$

Относительно  $y$  уравнение принимает вид  $2 - 2y + \frac{1 - y^2}{2} = 0,$   
 $y^2 + 4y - 5 = 0, y_1 = -5, y_2 = 1.$

$$1) \sin 2x = 24, \emptyset;$$

$$2) \sin 2x = 0, 2x = \pi k, x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Учитывая ОДЗ, имеем } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(4k+1), k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2}(4k+1), k \in \mathbb{Z}$$

$$8.377. 2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6.$$

*Решение.*

Перепишем уравнение в виде

$$2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{1-\sin^2 x} - 6 = 0 \Leftrightarrow (2^{\sin^2 x})^2 - 6(2^{\sin^2 x}) + 8 = 0.$$

Решив его как квадратное относительно  $2^{\sin^2 x}$ , получим

$$1) 2^{\sin^2 x} = 2, \sin^2 x = 1, \sin x = \pm 1, x = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2^{\sin^2 x} = 2^2, \sin^2 x = 2, \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$$

$$8.378. 3^{1+\sin x+\dots+\sin^n x+\dots} = \sqrt[3]{9}.$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$3^{1+\sin x+\dots+\sin^n x+\dots} = 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 1 + \sin x + \dots + \sin^n x + \dots = \frac{2}{3}.$$

По формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии получаем

$$\frac{1}{1 - \sin x} = \frac{2}{3}, \sin x = -\frac{1}{2}, x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$8.379. 2^{-1+\cos x - \cos^2 x + \dots + (-1)^{n-1} \cos^n x + \dots} = \sqrt[3]{0,25}.$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$2^{-1+\cos x - \cos^2 x + \dots + (-1)^{n-1} \cos^n x + \dots} = 2^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 + \cos x - \cos^2 x + \dots + (-1)^{n-1} \cos^n x + \dots = -\frac{2}{3}.$$

По формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии получаем

$$-\frac{1}{1 + \cos x} = -\frac{2}{3}, \quad \cos x = \frac{1}{2}, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}$

**8.380.**  $9^{1 - \cos 6x} = 3^{\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x}}$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $\begin{cases} \cos 3x \neq 0, \\ \sin 3x \neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$3^{2 - 2\cos 6x} = 3^{\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x}} \Leftrightarrow 2 - 2\cos 6x = \frac{1}{\operatorname{ctg} 3x}, \quad 2 - 2\cos 6x - \operatorname{tg} 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2\cos 6x - \frac{\sin 6x}{1 + \cos 6x} = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 6x - \sin 6x = 0,$$

$$\sin 6x(2\sin 6x - 1) = 0 \Rightarrow 2\sin 6x - 1 = 0, \quad \sin 6x = \frac{1}{2},$$

$$6x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \sin 6x \neq 0.$$

*Ответ:*  $x = (-1)^k \frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}$ .

**8.381.**  $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$ .

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$81^{\sin^2 x} + 81^{1 - \sin^2 x} - 30 = 0 \Leftrightarrow \left(81^{\sin^2 x}\right)^2 - 30\left(81^{\sin^2 x}\right) + 81 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $81^{\sin^2 x}$ , получим

$$81^{\sin^2 x} = 3, \quad 3^{4\sin^2 x} = 3 \quad \text{или} \quad 81^{\sin^2 x} = 27, \quad 3^{4\sin^2 x} = 3^3 \Rightarrow$$

$$1) 4\sin^2 x = 1, \sin x = \pm \frac{1}{2}, x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$$

$$2) 4\sin^2 x = 3, \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; x_2 \text{ входит в } x_1.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1), k \in \mathbb{Z}$ .

**8.382.**  $1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos^{-1} x}$

Решение.

ОДЗ:  $\cos x \neq 0$ .

Из условия имеем

$$1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 2^{\left( \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \sin x}{\sqrt{2} \cos x} \right)} \Leftrightarrow 1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 2^{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 2^{1 - \operatorname{tg} x}, 1 + 2^{\operatorname{tg} x} - \frac{3 \cdot 2}{2^{\operatorname{tg} x}} = 0 \Leftrightarrow (2^{\operatorname{tg} x})^2 + 2^{\operatorname{tg} x} - 6 = 0.$$

Решив уравнение как квадратное относительно  $2^{\operatorname{tg} x}$ , имеем

$$1) 2^{\operatorname{tg} x} = -3, \emptyset;$$

$$2) 2^{\operatorname{tg} x} = 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k + 1), k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4}(4k + 1), k \in \mathbb{Z}$ .

**8.383.**  $\log_{\cos x} 4 \cdot \log_{\cos^2 x} 2 = 1.$

Решение.

ОДЗ:  $0 < \cos x < 1$ .

Перейдем к основанию  $\cos x$ . Получаем

$$\frac{1}{2} \log_{\cos x} 2^2 \cdot \log_{\cos x} 2 = 1, \log_{\cos x}^2 2 = 1.$$

Отсюда

$$1) \log_{\cos x} 2 = 1 \Leftrightarrow \cos x = 2, \emptyset;$$

$$2) \log_{\cos x} 2 = -1, \frac{1}{\cos x} = 2, \cos x = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1), k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.384. \log_{\sin x} 4 \cdot \log_{\sin^2 x} 2 = 4.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } 0 < \sin x < 1.$$

Перейдем к основанию  $\sin x$ . Имеем

$$\log_{\sin x} 2^2 \cdot \frac{1}{2} \log_{\sin x} 2 = 4, \log_{\sin x}^2 2 = 4.$$

Отсюда

$$1) \log_{\sin x} 2 = 2, \sin^2 x = 2, \emptyset;$$

$$2) \log_{\sin x} 2 = -2, \frac{1}{\sin^2 x} = 2, \sin^2 x = \frac{1}{2}, \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Учитывая ОДЗ, } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$8.385. 3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \sin x > 0.$$

Из условия имеем

$$3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - 1 + 2 \sin^2 x) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(2 \sin^2 x) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(\log_2 \sin x)^2 + 2(\log_2 \sin x) - 1 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\log_2 \sin x$ , получим

$$\log_2 \sin x = 3, \sin x = 8, \emptyset;$$

или

$$\log_2 \sin x = -1, \sin x = \frac{1}{2}, x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$8.386. \text{ Дано } (1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2. \text{ Найти } x + y.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos y \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем уравнение в виде

$$1 + \operatorname{tg}x + \operatorname{tgy} + \operatorname{tg}x\operatorname{tgy} = 2, \quad \operatorname{tg}x + \operatorname{tgy} = 1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tgy} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tgy}}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tgy}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(x + y) = 1, \quad x + y = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x + y = \frac{\pi}{4}(4k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$

**8.387.** Показать, что уравнение  $\operatorname{ctg}2x + \operatorname{ctg}3x + \frac{1}{\sin x \sin 2x \sin 3x} = 0$

не имеет корней.

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \sin 2x \neq 0, \\ \sin 3x \neq 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x} + \frac{1}{\sin x \sin 2x \sin 3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x}{\sin 2x \sin 3x} + \frac{1}{\sin x \sin 2x \sin 3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 5x}{\sin 2x \sin 3x} + \frac{1}{\sin x \sin 2x \sin 3x} = 0 \Leftrightarrow \sin 5x \sin x + 1 = 0,$$

$$2 \sin 5x \sin x = -2 \Leftrightarrow \cos 4x - \cos 6x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \cos 6x = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем  $4x = \pi + 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},$

$k \in \mathbb{Z}.$  Тогда из второго уравнения системы имеем  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3\pi k\right) \neq 1, \quad \emptyset.$

**8.388.** Один из углов прямоугольного треугольника удовлетворяет уравнению  $\sin^3 x + \sin x \sin 2x - 3 \cos^3 x = 0.$  Показать, что треугольник равнобедренный.

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$\sin^3 x + \sin x \cdot 2 \sin x \cos x - 3 \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - 3 \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg}^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg}^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x - 1) + 3 (\operatorname{tg} x - 1) (\operatorname{tg} x + 1) = 0,$$

$$(\operatorname{tg} x - 1) (\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 3) = 0.$$

Отсюда 1)  $\operatorname{tg} x - 1 = 0$ ,  $\operatorname{tg} x = 1$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{4}$ . Так как треугольник прямоу-

гольный, то второй угол  $x_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ ;  $x_1 = x_2 = \frac{\pi}{4}$ , что и требова-

лось доказать;  $\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 3 \neq 0$  ( $D < 0$ ),  $\emptyset$ .

**8.389.** Показать, что не существует треугольника, каждый угол которого удовлетворял бы уравнению

$$(3 \cos x - 2) (14 \sin^2 x + \sin 2x - 12) = 0.$$

*Решение.*

Уравнение равносильно совокупности уравнений

$$1) 3 \cos x - 2 = 0 \text{ или } 2) 14 \sin^2 x + \sin 2x - 12 = 0.$$

$$1) \cos x = \frac{2}{3}. \text{ Тогда } \sin x = +\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$2) 14 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 12 (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 6 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg} x$ , получим

$$\operatorname{tg} x = -3 \text{ или } \operatorname{tg} x = 2. \text{ Пусть } \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2} = \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} x = -3 = \operatorname{tg} \beta, \operatorname{tg} x = 2 = \operatorname{tg} \gamma,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы треугольника. Так как сумма углов треугольника  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ,  $\beta + \gamma = \pi - \alpha$ , то

$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} = \operatorname{tg} \alpha, \frac{-3 + 2}{1 + 3 \cdot 2} = -\frac{1}{7} \neq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Противоречие. Таким образом доказано, что не существует треугольника, каждый угол которого удовлетворял бы уравнению

$$(3 \cos x - 2) (14 \sin^2 x + \sin 2x - 12) = 0.$$

**8.390.** Показать, что существуют треугольники, у которых каждый угол удовлетворяет уравнению  $(65 \sin x - 56)(80 - 64 \sin x - 65 \cos^2 x) = 0$ . Найти эти углы.

*Решение.*

Уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$1) 65 \sin x - 56 = 0 \text{ или } 2) 80 - 64 \sin x - 65 \cos^2 x = 0.$$

$$1) \sin x = \frac{56}{65}$$

$$2) 80 - 64 \sin x - 65(1 - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow 65 \sin^2 x - 64 \sin x + 15 = 0,$$

$$\text{откуда } \sin x = \frac{5}{13} \text{ или } \sin x = \frac{3}{5}.$$

Пусть  $\sin x_1 = \frac{3}{5}$ ,  $\sin x_2 = \frac{5}{13}$ ,  $\sin x_3 = \frac{56}{65}$ , где  $x_1, x_2, x_3$  — углы треугольника и  $x_1 + x_2 + x_3 = \pi$ , или  $x_1 + x_2 = \pi - x_3$ . Тогда

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin(\pi - x_3) = \sin x_3.$$

Отсюда  $\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2 = \sin x_3$ . Из равенства  $\sin x_1 = \frac{3}{5}$  получаем

$$\sin^2 x_1 = \frac{9}{25}, 1 - \cos^2 x_1 = \frac{9}{25}, \cos x_1 = \pm \frac{4}{5}.$$

Так как  $\sin x_2 = \frac{5}{13}$ , то имеем

$$\sin^2 x_2 = \frac{25}{169}, 1 - \cos^2 x_2 = \frac{25}{169}, \cos x_2 = \pm \frac{12}{13}.$$

Подставляя значения  $\sin x_1$ ,  $\sin x_2$ ,  $\cos x_1$  и  $\cos x_2$  в уравнение, находим, что  $x_1 = \arcsin \frac{3}{5}$ ,  $x_2 = \arcsin \frac{5}{13}$ ,  $x_3 = \pi - \arcsin \frac{56}{65}$ .

*Ответ:*  $x_1 = \arcsin \frac{3}{5}$ ,  $x_2 = \arcsin \frac{5}{13}$ ,  $x_3 = \pi - \arcsin \frac{56}{65}$ .

**8.391.** Показать, что треугольник, каждый из углов которого удовлетворяет уравнению  $3 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right) - 2\sqrt{3} = 0$ , является равносторонним.

*Решение.*

Из условия имеем

$$\frac{6\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 3\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} + 2\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2\sqrt{3} = 0,$$

$$\left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( 3\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3\sqrt{3}\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 6 \right) = 0,$$

откуда

$$1) \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3};$$

$$2) 3\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3\sqrt{3}\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 6 \neq 0 (D < 0), \emptyset.$$

Получили, что треугольник, каждый из углов которого равен

$$\frac{\pi}{3} \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi \right) \text{ и удовлетворяет уравнению } 3\operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2\sqrt{3} =$$

$$= 3\sqrt{3} - \frac{3}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} = 0, \text{ является равносторонним. Что и требовалось}$$

доказать.

**8.392.** Найти  $\sin \alpha$ , если  $\cos \alpha = \operatorname{tg} \beta$ ,  $\cos \beta = \operatorname{tg} \gamma$ ,  $\cos \gamma = \operatorname{tg} \alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}).$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$\begin{cases} \cos \alpha = \operatorname{tg} \beta, \\ \cos \beta = \operatorname{tg} \gamma, \\ \cos \gamma = \operatorname{tg} \alpha, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}, \\ \cos \beta = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}, \\ \cos \gamma = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}, \\ \cos^2 \beta = \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma}, \\ \cos^2 \gamma = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta}, \\ \cos^2 \beta = \frac{1 - \cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma}, \\ \cos^2 \gamma = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}. \end{cases}$$

Так как  $\cos^2 \gamma = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ , то имеем

$$\cos^2 \beta = \frac{1 - \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{1 - \cos^2 \alpha}.$$

Подставив значение  $\cos^2 \beta = \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{1 - \cos^2 \alpha}$  в первое уравнение систе-

мы находим

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 - \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{1 - \cos^2 \alpha}}{\frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{2 - 3 \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} \Leftrightarrow \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\cos^2 \alpha$ , имеем

$$\cos^2 \alpha = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0, \emptyset \text{ или } \cos^2 \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Отсюда

$$1 - \sin^2 \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \sin^2 \alpha = 1 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{5} + 1}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} - 1}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Ответ:  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .

8.393. Найти углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  первой четверти, если известно, что они составляют арифметическую прогрессию с разностью  $\frac{\pi}{12}$ , а их тангенсы составляют геометрическую прогрессию

*Решение.*

Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — члены арифметической прогрессии,  $d = \frac{\pi}{12}$ ;

$\operatorname{tg}\alpha$ ,  $\operatorname{tg}\beta$ ,  $\operatorname{tg}\gamma$  — члены геометрической прогрессии;  $\beta = \alpha + \frac{\pi}{12}$ ,  $\gamma = \alpha + \frac{\pi}{6}$ .

По свойству членов геометрической прогрессии

$$b_k^2 = b_{k-1}b_{k+1}, k = 2, 3, \dots, n-1, \text{ следовательно } \operatorname{tg}^2\beta = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma,$$

$$\operatorname{tg}^2\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\alpha \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Так как  $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$ ,  $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$  и

$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$ , то имеем

$$\frac{1 - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{1 + \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\cos\frac{\pi}{6} - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{\pi}{6} + \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)},$$

$$\frac{1 - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{1 + \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3} - 2\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3} + 2\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right)\left(\sqrt{3} + 2\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\sqrt{3} - 2\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right) \times$$

$$\times \left(1 + \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 0, \quad 2\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Тогда } \beta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}, \quad \gamma = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}.$$

Решить системы уравнений (8.394—8.405):

$$8.394. \begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

*Решение.*

Запишем данную систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ (\sin x + \cos y)^2 - 2 \sin x \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin x \cos y = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos y = -\sin x, \quad \sin x \cdot (-\sin x) = -\frac{1}{4}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{4}, \quad \sin x = \pm \frac{1}{2}.$$

Таким образом данная система равносильна следующей совокупности двух систем уравнений:

$$a) \begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin x = -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решив системы, найдем

$$\begin{cases} x_1 = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, & x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \\ y_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, & y_2 = \pm \frac{2}{3} \pi + 2\pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad y_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad y_2 = \pm \frac{2}{3} \pi + 2\pi n, \quad \text{где } k \text{ и } n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.395. \begin{cases} 9^{2\operatorname{tg}x + \cos y} = 3, \\ 9^{\cos y} - 81^{\operatorname{tg}x} = 2. \end{cases}$$

*Решение.*

ОДЗ:  $\cos x \neq 0$ .

Из условия имеем

$$\begin{cases} 81^{\operatorname{tg}x} \cdot 9^{\cos y} = 3, \\ 9^{\cos y} - 81^{\operatorname{tg}x} = 2, \end{cases} \Rightarrow 9^{\cos y} = 2 + 81^{\operatorname{tg}x}, \quad 81^{\operatorname{tg}x} \cdot (2 + 81^{\operatorname{tg}x}) = 3,$$

$$(81^{\operatorname{tg}x})^2 + 2(81^{\operatorname{tg}x}) - 3 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $81^{\operatorname{tg}x}$ , получим  $81^{\operatorname{tg}x} = -3, \emptyset; 81^{\operatorname{tg}x} = 1$ . Отсюда  $\operatorname{tg}x = 0, x = \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$ .

Тогда

$$9^{\cos y} = 2 + 1 = 3, \quad 3^{2\cos y} = 3, \quad 2\cos y = 1, \quad \cos y = \frac{1}{2}, \quad y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k_2, \quad k_2 \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x = \pi k_1, y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k_2$ , где  $k_1$  и  $k_2 \in \mathbb{Z}$ .

$$8.396. \begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2 \sin y. \end{cases}$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$x = \frac{5\pi}{3} + y, \quad \sin\left(\frac{5\pi}{3} + y\right) - 2 \sin y = 0, \quad -\sin\left(\frac{\pi}{3} - y\right) - 2 \sin y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin \frac{\pi}{3} \cos y + \cos \frac{\pi}{3} \sin y - 2 \sin y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos y + 3 \sin y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} y = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y = -\frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{\pi}{6}(6k - 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Тогда } x = \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{3\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k + 3), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{2}(2k + 3), y = \frac{\pi}{6}(6k - 1)$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.397. \begin{cases} \sin x \cos y = 0,25, \\ \sin y \cos x = 0,75. \end{cases}$$

*Решение.*

Сложим и вычтем первое и второе уравнения системы. Получаем

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \sin y \cos x = 1, \\ \sin x \cos y - \sin y \cos x = -\frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = -\frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_1, \\ x-y = (-1)^{k_2} \frac{\pi}{6} + \pi k_2, \end{cases} \quad k_1 \text{ и } k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi(k_1 - k_2), \quad y_1 = \frac{\pi}{3} + \pi(k_1 + k_2); \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi(k_1 - k_2),$$

$$y_2 = \frac{2}{3}\pi + \pi(k_1 + k_2); \quad k_1 \text{ и } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi(k_1 - k_2), \quad y_1 = \frac{\pi}{3} + \pi(k_1 + k_2);$

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi(k_1 - k_2), \quad y_2 = \frac{2}{3}\pi + \pi(k_1 + k_2); \quad \text{где } k_1 \text{ и } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

$$8.398. \begin{cases} x-y = -\frac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

*Решение.*

Перепишем второе уравнение системы в виде

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi x) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi y) = \frac{1}{2}, \quad \cos 2\pi x + \cos 2\pi y = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{2\pi x + 2\pi y}{2} \cos \frac{2\pi x - 2\pi y}{2} = 1, \quad 2 \cos \pi(x+y) \cos \pi(x-y) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \pi(x+y) \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1, \quad 2 \cos \pi(x+y) \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad \cos \pi(x+y) = 1,$$

$$\pi(x+y) = 2\pi k, \quad x+y = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Таким образом получим

$$\begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}, \\ x + y = 2k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Rightarrow x = k - \frac{1}{6}, y = k + \frac{1}{6}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = k - \frac{1}{6}, y = k + \frac{1}{6}$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$8.399. \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos y \neq 0. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$x = \frac{\pi}{4} - y, \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - y\right) \operatorname{tgy} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tgy}\right) \operatorname{tgy}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tgy}} = \frac{1}{6},$$

$$\frac{(1 - \operatorname{tgy}) \operatorname{tgy}}{1 + \operatorname{tgy}} = \frac{1}{6}, 6\operatorname{tg}^2 y - 5\operatorname{tgy} + 1 = 0.$$

Решив последнее уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tgy}$ , получим  $\operatorname{tgy}_1 = \frac{1}{2}, \operatorname{tgy}_2 = \frac{1}{3}$ . Подставив эти значения во второе уравнение

системы, найдем  $\operatorname{tg}x_1 = \frac{1}{3}, \operatorname{tg}x_2 = \frac{1}{2}$ . Отсюда

$$\begin{cases} x_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, \\ y_1 = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \pi k; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \\ y_2 = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \pi n; \end{cases} k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, \\ y_1 = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \pi k; \end{cases} \begin{cases} x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \\ y_2 = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \pi n; \end{cases} k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$8.400. \begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3} \cos y. \end{cases}$$

*Решение.*

Возведя оба уравнения системы в квадрат, получим

$$\begin{cases} 2 \sin^2 x = \sin^2 y, \\ 2 \cos^2 x = 3 \cos^2 y. \end{cases} \Rightarrow 2 = \sin^2 y + 3 \cos^2 y, \quad 2 \sin^2 y + 3(1 - \sin^2 y),$$

$$\sin^2 y = \frac{1}{2}, \quad \sin y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k_1, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Тогда } 2 \sin^2 x = \sin^2 y = \frac{1}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{4}, \quad \sin x = \pm \frac{1}{2}, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k_2,$$

$k_2 \in \mathbb{Z}$

*Ответ:*  $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k_2, y = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k_1; k_2 \text{ и } k_1 \in \mathbb{Z}; k_2 \text{ и } k_1$  — числа одной четности.

$$8.401. \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = 2, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = -1,8. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \sin y \neq 0. \end{cases}$$

Используя формулу  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$ , запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{y}{2} = 2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \\ \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{y}{2}} = -1,8. \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{y}{2} = 2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \frac{1 - \left(2 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)^2}{2 \left(2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)} = -1,8; \quad 4 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 8 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , получим

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{5}{2}. \text{ Далее имеем}$$

$$1) \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{y_1}{2} = \frac{5}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{x_1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ или } 2) \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{y_2}{2} = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{x_2}{2} = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} \frac{x_1}{2} = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k_1, \\ \frac{y_1}{2} = \operatorname{arctg} \frac{5}{2} + \pi k_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k_1, \\ y_1 = 2\operatorname{arctg} \frac{5}{2} + 2\pi k_2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x_2}{2} = \operatorname{arctg} \frac{5}{2} + \pi k_1, \\ \frac{y_2}{2} = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2\operatorname{arctg} \frac{5}{2} + 2\pi k_1, \\ y_2 = -2\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k_2, \end{cases} \text{ где } k_1 \text{ и } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x_1 = -2\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k_1, y_1 = 2\operatorname{arctg} \frac{5}{2} + 2\pi k_2;$

$$x_2 = 2\operatorname{arctg} \frac{5}{2} + 2\pi k_1, y_2 = -2\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k_2, \text{ где } k_1 \text{ и } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

**8.402.** 
$$\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\cos^{-1} y} = 5, \\ 2^{\cos x} \cdot 2^{\cos^{-1} y} = 4. \end{cases}$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$2^{\cos^{-1} y} = 5 - 2^{\cos x}, \quad 2^{\cos x} \cdot (5 - 2^{\cos x}) = 4, \quad (2^{\cos x})^2 - 5(2^{\cos x}) + 4 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно  $2^{\cos x}$ , получим

$$2^{\cos x} = 1, \quad \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

или

$$2^{\cos x} = 2^2, \quad \cos x = 2, \quad \emptyset.$$

Подставив значение  $2^{\cos x} = 1$  в первое уравнение системы, найдем  $2^{\cos^{-1} y} = 4$ ,  $\cos^{-1} y = 2$ ,  $\cos y = \frac{1}{2}$ ,  $y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k_1 = \frac{\pi}{3}(6k_1 \pm 1)$ ,  $k_1 \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$ ,  $y = \frac{\pi}{3}(6k_1 \pm 1)$ , где  $k$  и  $k_1 \in \mathbb{Z}$ .

$$8.403. \begin{cases} \sin x \sin y = 0,75, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos y \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение системы в виде

$$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = 3 \Leftrightarrow \frac{0,75}{\cos x \cos y} = 3, \quad \cos x \cos y = 0,25.$$

Тогда данная система имеет вид

$$\begin{cases} \sin x \sin y = 0,75, \\ \cos x \cos y = 0,25. \end{cases}$$

Сложив второе уравнение этой системы с первым, а затем вычтя из второго уравнения первое, получим

$$\begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = 1, \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = -\frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2\pi k_1, \\ x + y = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k_2, \end{cases} \quad k_1 \text{ и } k_2 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(k_1 + k_2), \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(k_2 - k_1), \end{cases} \quad k_1 \text{ и } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(k_1 + k_2)$ ,  $y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(k_2 - k_1)$ ,  $k_1$  и  $k_2 \in \mathbb{Z}$ .

$$8.404. \begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 0,25, \\ x + y = \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

Решение.

Запишем первое уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2y) = 0,25, \quad \cos 2x + \cos 2y = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(x+y) \cos(x-y) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \cos \frac{5\pi}{6} \cos(x-y) = -\frac{3}{2},$$

$$\cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x-y = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда исходная система принимает вид

$$\begin{cases} x-y = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x+y = \frac{5\pi}{6}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x+y = \frac{5\pi}{6}; \\ x-y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x+y = \frac{5\pi}{6}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k+1), \\ y_1 = \frac{\pi}{3} - \pi k = \frac{\pi}{3}(1-3k); \end{cases} \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi k, \\ y_2 = \frac{\pi}{2} - \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

*Ответ:*  $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1), \quad y_1 = \frac{\pi}{3}(1-3k);$

$$x_2 = \frac{\pi}{3}(3k+1), \quad y_2 = \frac{\pi}{2}(1-2k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

**8.405.** 
$$\begin{cases} \sin x \sin y = 0,25, \\ x+y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

*Решение.*

Запишем первое уравнение системы в виде

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x-y) - \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos(x-y) = 1,$$

$$x-y = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом исходная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} x-y = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x+y = \frac{\pi}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \\ y = \frac{\pi}{6} - \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{6}(6k+1), \quad y = \frac{\pi}{6}(1-6k), \quad k \in \mathbb{Z}.$

## НЕРАВЕНСТВА

### НЕРАВЕНСТВА С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Неравенства  $f_1(x) > f_2(x)$ ,  $f_1(x) \geq f_2(x)$ ,  $f_1(x) < f_2(x)$ ,  $f_1(x) \leq f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — заданные функции переменной  $x$  (одна из них может быть постоянной), называются *неравенствами с одним неизвестным*.

Переменная величина  $x$  называется неизвестной. Если  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — алгебраические выражения, то неравенство называется алгебраическим.

Решением неравенства с одним неизвестным называется такое значение неизвестного, при котором данное неравенство обращается в тождественное (истинное).

Решить неравенство с одним неизвестным — значит найти множество (совокупность) всех его решений или показать, что оно не имеет решений.

Областью допустимых значений неизвестного данного неравенства (ОДЗ) или областью определения неравенства называют множество всех значений неизвестного, при которых существуют обе части неравенства.

### Равносильные неравенства и основные теоремы о равносильности неравенств

Так как рассматриваемые ниже понятия и свойства неравенств одинаковы для неравенств  $f_1(x) > f_2(x)$ ,  $f_1(x) \geq f_2(x)$ ,  $f_1(x) < f_2(x)$ ,  $f_1(x) \leq f_2(x)$ , то будем рассматривать только неравенства вида

$$f_1(x) > f_2(x).$$

Пусть даны два неравенства с одним неизвестным

$$f_1(x) > f_2(x), \tag{9.1}$$

$$g_1(x) > g_2(x).$$

Неравенство (9.2) называется следствием неравенства (9.1), если все решения неравенства (9.1) есть решения неравенства (9.2) или неравенство (9.1) не имеет решений.

Два неравенства (с одним неизвестным) называются равносильными (эквивалентными), если каждое из них является следствием другого.

Если над обеими частями неравенства с одним неизвестным произвести тождественные преобразования, не меняющие области определения неравенства, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство  $f_1(x) > f_2(x)$  с областью определения  $D$  и в результате тождественных преобразований получилось неравенство  $f_3(x) > f_4(x)$  с той же областью определения, то они равносильны.

Если к каждой части данного неравенства прибавить одно и то же число или выражение, имеющее смысл при всех значениях неизвестного из области определения неравенства, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство  $f_1(x) > f_2(x)$  с областью определения  $D$  и  $m(x)$  — число или выражение, имеющее смысл при всех значениях  $x$  из  $D$ , то неравенство  $f_1(x) + m(x) > f_2(x) + m(x)$  равносильно данному.

Члены неравенства можно переносить с противоположным знаком из одной части неравенства в другую.

Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число или выражение, принимающее положительные значения при всех значениях неизвестного из области допустимых, то полученное неравенство того же смысла будет равносильно данному.

Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число или выражение, принимающее отрицательные значения при всех значениях неизвестного из области допустимых, то получим равносильное данному неравенство противоположного смысла, т.е. если дано неравенство  $f_1(x) > f_2(x)$  и число или выражение  $m(x) < 0$  при всех  $x$  из ОДЗ неравенства, то неравенство  $f_1(x) \cdot m(x) < f_2(x) \cdot m(x)$  будет равносильно данному.

Неравенство  $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} < 0$  равносильно неравенству  $f_1(x) \cdot f_2(x) < 0$  при  $f_2(x) \neq 0$ .

Неравенство  $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} > 0$  равносильно неравенству  $f_1(x) \cdot f_2(x) > 0$  при  $f_2(x) \neq 0$ .

# РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

## Решение неравенства первой степени с одним неизвестным

Неравенства вида

$$\begin{aligned} f_1(x) > f_2(x), \quad f_1(x) \geq f_2(x), \\ f_1(x) < f_2(x), \quad f_1(x) \leq f_2(x), \end{aligned}$$

где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — линейные функции переменной  $x$  (одна из которых может быть постоянной), называются неравенствами первой степени с одним неизвестным.

Всякое линейное неравенство с одним неизвестным всегда можно привести к каноническому виду

$$ax + b > 0. \quad (9.3)$$

### *Решение неравенства $ax + b > 0$*

Если  $a > 0$ , то после умножения обеих частей неравенства на  $\frac{1}{a} > 0$  получим равносильное данному неравенство  $x + \frac{b}{a} > 0$ , из которого следует  $x > -\frac{b}{a}$ .

Если  $a < 0$ , то после умножения обеих частей данного неравенства на  $\frac{1}{a} < 0$  получим равносильное данному неравенство  $x + \frac{b}{a} < 0$ , из которого следует  $x < -\frac{b}{a}$ .

Если  $a = 0$ , то при  $b \leq 0$  для любого действительного значения  $x$  неравенство обращается в неверное, т.е. решений не имеет, а при  $b > 0$  данное неравенство верно при всех действительных значениях  $x$ , т.е. все действительные числа являются решениями неравенства.



## Решение неравенств второй степени (квадратных) с одним неизвестным

Неравенство, обе части которого есть многочлены относительно неизвестного не выше второй степени, причем хотя бы один из них второй степени, называется неравенством второй степени с одним неизвестным.

Всякое неравенство второй степени с одним неизвестным (квадратное неравенство) можно привести к одному из его канонических видов:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \\ ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \end{aligned} \quad (9.4)$$

где  $x \neq 0$ .

### Решение неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ ( $a \neq 0$ )

Если  $a > 0$ , то данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} > 0$$

или

$$x^2 + px + q > 0, \quad (9.5)$$

где  $p = \frac{b}{a}$ ,  $q = \frac{c}{a}$ .

Если  $a < 0$ , то данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0$$

или

$$x^2 + px + q < 0, \quad (9.6)$$

где  $p = \frac{b}{a}$ ,  $q = \frac{c}{a}$ .

Другие неравенства вида (9.4) также приводятся к виду, аналогичному (9.5) или (9.6).

### Исследование трехчлена $x^2 + px + q = 0$

Рассмотрим трехчлен

$$x^2 + px + q. \quad (9.7)$$

1. Если  $D = p^2 - 4q > 0$ , то трехчлен  $x^2 + px + q$  можно разложить на множители с действительными коэффициентами

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

где  $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  и  $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  — корни трехчлена ( $x_1 < x_2$ ).

Если  $x < x_1 < x_2$ , то  $x - x_1 < 0$  и  $x - x_2 < 0$ ; тогда  $x^2 + px + q > 0$ .

Если  $x_1 < x < x_2$ , то  $x - x_1 > 0$ , а  $x - x_2 < 0$ ; тогда  $x^2 + px + q < 0$ .

Если  $x > x_2 > x_1$ , то  $x - x_1 > 0$  и  $x - x_2 > 0$ ; тогда  $x^2 + px + q > 0$ .

*Вывод.* Если  $D = p^2 - 4q > 0$ , то квадратный трехчлен  $x^2 + px + q$  положителен при значениях  $x$ , меньших меньшего корня и больших большего корня, и отрицателен при значениях  $x$ , лежащих между корнями.

2. Если  $D = p^2 - 4q = 0$   $\left( q = \frac{p^2}{4} \right)$ , то трехчлен  $x^2 + px + q$  принимает вид

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left( x + \frac{p}{2} \right)^2$$

и при всех  $x \neq -\frac{p}{2}$  будет положительным, а при  $x = -\frac{p}{2}$  равен нулю.

3. Если  $D = p^2 - 4q < 0$ , то трехчлен  $x^2 + px + q$  можно представить в виде

$$x^2 + px + q = \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} = \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Так как  $\left( x + \frac{p}{2} \right)^2 \geq 0$  при всех  $x$ , а  $4q - p^2 > 0$ , то трехчлен

$x^2 + px + q$  положителен при всех значениях  $x$ .

## Решение целых рациональных неравенств с одним неизвестным

Целым рациональным алгебраическим неравенством с одним неизвестным называется такое неравенство, обе части которого есть многочлены относительно неизвестного.

Степенью целого рационального алгебраического неравенства с одним неизвестным называется большая из степеней многочленов, входящих в это неравенство.

Всякое целое рациональное алгебраическое неравенство  $n$ -й степени с одним неизвестным может быть приведено к одному из канонических видов

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n > 0, \quad (9.8)$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \geq 0 \quad (9.9)$$

или

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n < 0, \quad (9.10)$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \leq 0 \quad (9.11)$$

$$(a_0 \neq 0).$$

### Метод интервалов

Чтобы найти решения неравенства

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) > 0 \quad (9.12)$$

или

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) < 0, \quad (9.13)$$

достаточно нанести на числовую ось нули (корни) левой части неравенства  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , а затем проверить знак левой части неравенства на каждом из полученных интервалов путем подстановки любого числа из этого интервала. Тогда множеством всех решений неравенства (9.12)

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) > 0$$

будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак плюс, а решением неравенства (9.13)

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) < 0$$

будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак минус.

При решении неравенств

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) \geq 0$$

и

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) \leq 0$$

с помощью метода интервалов, кроме соответствующих интервалов знакопостоянства левых частей неравенств, к их решениям надо относить и их нули (корни).

### Обобщенный метод интервалов

Рассмотрим схему решения неравенства (9.8)

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n > 0 \quad (a \neq 0)$$

Многочлен  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$  в множестве действительных чисел можно представить в виде

$$\begin{aligned} & a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = \\ & = a_0(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}, \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_k$  — действительные корни соответственно кратности  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , а трехчлены  $x^2 + p_1x + q_1, \dots, x^2 + p_i x + q_i$  имеют отрицательные дискриминанты, т.е. при всех  $x$  положительны.

Неравенство (9.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & a_0(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots \\ & \dots (x^2 + p_i x + q_i)^{l_i} > 0. \end{aligned}$$

Так как квадратные трехчлены в этом неравенстве принимают положительные значения при всех действительных значениях неизвестного, то оно равносильно неравенству

$$a_0(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k} > 0.$$

Множители левой части неравенства с нечетными показателями можно оставить в первой степени, а с четными — опустить, выписав те значения  $x$ , при которых они обращаются в нуль. Тогда неравенство примет вид

$$a_0(x - x_{j_1})(x - x_{j_2}) \dots (x - x_{j_s}) > 0,$$

при  $a_0 > 0$  оно равносильно неравенству

$$(x - x_{j_1})(x - x_{j_2}) \dots (x - x_{j_s}) > 0,$$

а при  $a_0 < 0$  — неравенству

$$(x - x_{j_1})(x - x_{j_2}) \dots (x - x_{j_s}) < 0.$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов.

## Дробно-рациональные неравенства

Неравенства вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0; \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0 \quad (9.14)$$

или

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0; \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0, \quad (9.15)$$

где  $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$  ( $a_0 \neq 0$ ) и  $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-2}x^2 + b_{m-1}x + b_m$  ( $b_0 \neq 0$ ) — многочлены переменной  $x$ , называются дробно-рациональными неравенствами.

При решении таких неравенств пользуются следующими утверждениями:

1. Неравенство  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$  равносильно неравенству

$$P_n(x)Q_m(x) > 0.$$

2. Неравенство  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$  равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} P_n(x)Q_m(x) \geq 0, \\ Q_m(x) \neq 0. \end{cases}$$

3. Неравенство  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$  равносильно неравенству

$$P_n(x)Q_m(x) < 0.$$

4. Неравенство  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0$  равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} P_n(x)Q_m(x) \leq 0, \\ Q_m(x) \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, решение дробно-рациональных неравенств сводится к решению целых рациональных неравенств.

При решении дробно-рациональных неравенств нужно придерживаться следующей схемы:

- а) перенести все члены неравенства в левую часть;
- б) привести все члены левой части неравенства к общему знаменателю;
- в) заменить дробные неравенства целыми;
- г) разложить левую часть полученного неравенства на простейшие множители;
- д) привести полученное неравенство к виду (9.12) или (9.13);
- е) найти решения полученного неравенства по методу интервалов.

## **РЕШЕНИЕ СИСТЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ**

Системой неравенств с одним неизвестным называется несколько неравенств, в которых под одной и той же буквой, обозначающей неизвестное, подразумевается одна и та же величина.

При решении системы неравенств с одним неизвестным обычно решают каждое из неравенств системы, а затем находят пересечение множеств полученных решений.

Решить систему неравенств с одним неизвестным – значит найти множество всех ее решений или показать, что система не имеет решений.

## **НЕРАВЕНСТВА С НЕИЗВЕСТНЫМ ПОД ЗНАКОМ АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ**

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком абсолютной величины (модуля), используется определение абсолютной величины:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{при } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{при } f(x) < 0. \end{cases}$$

Кроме того, иногда бывает полезным применить геометрический смысл модуля числа, согласно которому  $|x|$  есть расстояние от точки  $x$  числовой прямой до начала отсчета, а  $|x - a|$  — это расстояние на числовой прямой между точками  $x$  и  $a$ .

Рассмотрим неравенство

$$f(|x|) < g(x), \quad (9.16)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  — некоторые функции.

Неравенство такого вида равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$1) \begin{cases} x < 0, \\ f(-x) < g(x) \end{cases} \text{ или } 2) \begin{cases} x \geq 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(x)| < g(x), \quad (9.17)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  — некоторые функции. Неравенство такого вида равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$1) \begin{cases} g(x) > 0, \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases} \text{ или } 2) \begin{cases} g(x) \leq 0, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(x)| > g(x), \quad (9.18)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  — некоторые функции. Это неравенство равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$1) \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{cases} \end{cases} \text{ или } 2) \begin{cases} g(x) > 0, \\ x \in \text{ОДЗ неравенств а (9.18)} \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(|x|)| < g(x), \quad (9.19)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  — некоторые функции. Это неравенство можно решить двумя способами. Во-первых, оно равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x < 0, \\ |f(-x)| < g(x) \end{cases} \text{ или } 2) \begin{cases} x \geq 0, \\ |f(x)| < g(x) \end{cases}$$

Во-вторых, оно также равносильно двойному неравенству

$$-g(x) < f(|x|) < g(x)$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(|x|)| > g(x), \quad (9.20)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  — некоторые функции. Это неравенство можно решить двумя способами. Во-первых, оно равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x < 0, \\ |f(-x)| > g(x) \end{cases} \text{ или } 2) \begin{cases} x \geq 0, \\ |f(x)| > g(x) \end{cases}$$

Во-вторых, оно также равносильно совокупности двух неравенств

$$\begin{cases} f(|x|) > g(x), \\ f(|x|) < -g(x) \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(x)| \geq |g(x)|, \quad (9.21)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  — некоторые функции. Это неравенство решается при помощи разбиения области его допустимых значений на промежутки, каждый из которых является промежутком постоянства знака как функции  $f(x)$ , так и функции  $g(x)$ . Затем на каждом из этих промежутков решается неравенство без знака абсолютной величины. Объединив решения на всех промежутках, получим множество всех решений неравенства.

Некоторые неравенства вида (9.21)  $|f(x)| \geq |g(x)|$  целесообразно решать, перейдя к равносильному неравенству  $(f(x))^2 \geq (g(x))^2$ , т.е. возведением обеих частей исходного неравенства в квадрат.

## ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Алгебраическое неравенство называется иррациональным, если его неизвестное входит под знак корня.

При решении иррациональных неравенств, как и иррациональных уравнений, корни четной степени рассматриваются только арифметические, а корни нечетной степени рассматриваются на всей числовой оси (при всех действительных значениях подкоренных выражений).

Если неравенство, обе части которого неотрицательны при всех значениях неизвестного из области допустимых, возвести в любую натуральную степень, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство

$$f_1(x) > f_2(x),$$

причем при всех  $x$  из ОДЗ  $f_1(x) \geq 0$  и  $f_2(x) \geq 0$ , то неравенство



$$(f_1(x))^n > (f_2(x))^n$$

равносильно данному.

Если обе части неравенства возвести в нечетную натуральную степень, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство

$$f_1(x) > f_2(x),$$

то неравенство  $(f_1(x))^{2n+1} > (f_2(x))^{2n+1}$  равносильно данному.

В частности, неравенство вида

$${}^{2n}\sqrt{f(x)} < {}^{2n}\sqrt{g(x)}, \quad n \in N, \quad (9.22)$$

равносильно системе  $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$  а неравенство вида

$${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} < {}^{2n+1}\sqrt{g(x)}, \quad n \in N, \quad (9.23)$$

равносильно неравенству  $f(x) < g(x)$ ; неравенство вида

$${}^{2n}\sqrt{f(x)} < g(x), \quad n \in N, \quad (9.24)$$

равносильно системе  $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n}, \end{cases}$  а неравенство вида

$${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} < g(x), \quad n \in N, \quad (9.25)$$

равносильно неравенству  $f(x) < (g(x))^{2n+1}$ ; неравенство вида

$${}^{2n}\sqrt{f(x)} > g(x), \quad n \in N, \quad (9.26)$$

равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}, \end{cases}$$

а неравенство вида

$${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} > g(x), \quad n \in N, \quad (9.27)$$

равносильно неравенству  $f(x) > (g(x))^{2n+1}$ .

## ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении показательных неравенств используются следующие правила:

1) Если  $a > 1$ , то неравенство

$$a^{f_1(x)} < a^{f_2(x)} \quad (9.28)$$

равносильно неравенству  $f_1(x) < f_2(x)$ , а неравенство

$$a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)} \quad (9.29)$$

равносильно неравенству  $f_1(x) > f_2(x)$ .

2) Если  $0 < a < 1$ , то неравенство

$$a^{f_1(x)} < a^{f_2(x)} \quad (9.30)$$

равносильно неравенству  $f_1(x) > f_2(x)$ , а неравенство

$$a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)} \quad (9.31)$$

равносильно неравенству  $f_1(x) < f_2(x)$ .

3) Если  $a > 1$ , то неравенство

$$\log_a f_1(x) < \log_a f_2(x), \quad (9.32)$$

где  $f_1(x) > 0$ ,  $f_2(x) > 0$ , равносильно неравенству  $f_1(x) < f_2(x)$ , а неравенство

$$\log_a f_1(x) > \log_a f_2(x), \quad (9.33)$$

где  $f_1(x) > 0$ ,  $f_2(x) > 0$ , равносильно неравенству  $f_1(x) > f_2(x)$ .

4) Если  $0 < a < 1$ , то неравенство

$$\log_a f_1(x) < \log_a f_2(x), \quad (9.34)$$

где  $f_1(x) > 0$ ,  $f_2(x) > 0$ , равносильно неравенству  $f_1(x) > f_2(x)$ , а неравенство

$$\log_a f_1(x) > \log_a f_2(x), \quad (9.35)$$

где  $f_1(x) > 0$ ,  $f_2(x) > 0$ , равносильно неравенству  $f_1(x) < f_2(x)$ .

## ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Тригонометрическим неравенством называется неравенство, в котором неизвестное входит под знак тригонометрических функций непосредственно или в виде линейной функции неизвестного, причем над тригонометрическими функциями выполняются только алгебраические действия.

К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся:

1. Неравенство  $\sin x > a$ . Если  $a < -1$ , то решением неравенства будет любое действительное число. Если  $-1 \leq a < 1$ , то решениями неравенства будут

$$\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z. \quad (9.36)$$

Если  $a \geq 1$ , то неравенство решений не имеет.

2. Неравенство  $\sin x < a$ . Если  $a \leq -1$ , то неравенство решений не имеет. Если  $-1 < a \leq 1$ , то решениями неравенства будут

$$\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < 2\pi + \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z. \quad (9.37)$$

Если  $a > 1$ , то неравенство верно при всех действительных значениях  $x$ .

3. Неравенство  $\cos x > a$ . Если  $a < -1$ , то неравенство верно при всех действительных значениях  $x$ . Если  $-1 \leq a < 1$ , то решениями неравенства будут

$$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z. \quad (9.38)$$

Если  $a \geq 1$ , то неравенство решений не имеет.

4. Неравенство  $\cos x < a$ . Если  $a \leq -1$ , то неравенство решений не имеет. Если  $-1 < a \leq 1$ , то решениями неравенства будут

$$\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z. \quad (9.39)$$

Если  $a > 1$ , то неравенство верно при всех значениях  $x$ .

5. Неравенство  $\operatorname{tg} x > a$ . Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях  $a$ , причем

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z. \quad (9.40)$$

6. Неравенство  $\operatorname{tg} x < a$ . Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях  $a$ , причем

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in Z. \quad (9.41)$$

7. Неравенство  $\operatorname{ctg} x > a$ . Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях  $a$ , причем

$$\pi n < x < \operatorname{arccotg} a + \pi n, \quad n \in Z. \quad (9.42)$$

8. Неравенство  $\operatorname{ctg} x < a$ . Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях  $a$ , причем

$$\operatorname{arccotg} a + \pi n < x < \pi + \pi n, \quad n \in Z. \quad (9.43)$$

В случае нестрогих неравенств к решениям присоединяются соответствующие концы интервалов.

**9.096.** Доказать, что произведение суммы трех положительных чисел на сумму обратных чисел не меньше 9.

*Решение.*

Пусть  $a > 0$ ,  $b > 0$  и  $c > 0$ . Докажем, что  $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ .

Имеем

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \geq 9, \quad \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 6,$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + 2 + \left(\sqrt{\frac{b}{c}} - \sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2 + 2 + \left(\sqrt{\frac{a}{c}} - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 + 2 \geq 6,$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{c}} - \sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{a}{c}} - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 \geq 0, \text{ неравенство истинно.}$$

Что и требовалось доказать.

**9.097.** Доказать, что если  $a$  — любое действительное число, то верно

неравенство  $\frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 2$ .

*Решение.*

Имеем

$$\frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a^2 + a + 1) - 2\sqrt{a^2 + a + 1} + 1}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 0,$$

$$\frac{\left(\sqrt{a^2+a+1}-1\right)^2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 0, \text{ неравенство истинно, т.к. } \left(\sqrt{a^2+a+1}-1\right)^2 \geq 0$$

и  $\sqrt{a^2+a+1} > 0$  при  $a \in \mathbb{R}$ . Что и требовалось доказать.

**9.098.** Найти все значения  $p$ , при которых выражение

$\lg((p-1)x^2 + 2px + 3p - 2)$  определено для любых  $x$ .

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } (p-1)x^2 + 2px + 3p - 2 > 0.$$

Неравенство  $Ax^2 + Bx + C > 0$  выполняется для всех  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{когда } B^2 - 4AC < 0, A > 0, \text{ т.е. когда } \begin{cases} p^2 - (p-1)(3p-2) < 0, \\ p-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2p^2 - 5p + 2 > 2, \\ p > 1 \end{cases} \Leftrightarrow (p > 2).$$

*Ответ:*  $p \in (2; \infty)$ .

**9.099.** Найти все значения  $a$ , при которых выражение

$\sqrt{(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3}$  имеет смысл для любых  $x \in \mathbb{R}$ .

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } (a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3 \geq 0.$$

Неравенство  $Ax^2 + Bx + C \geq 0$  выполняется для всех  $x \in \mathbb{R}$ , когда

$$B^2 - 4AC \leq 0, A > 0, \text{ т.е. когда}$$

$$\begin{cases} (a-1)^2 - (a+1)(3a-3) \leq 0, \\ a+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a+2) \geq 0, \\ a+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a \geq 1).$$

*Ответ:*  $a \in [1; \infty)$ .

**9.100.** Найти множество целых значений  $x$ , удовлетворяющих нера-

$$\text{венству } 4^{2+\sqrt{x-1}} + 3 \cdot 2^{2+\sqrt{x-1}} - 16 < 15 \cdot 4^{\sqrt{x-1}} + 2^{3+\sqrt{x-1}} + 5 \cdot 2^{1+\sqrt{x-1}}.$$

*Решение.*

Представим неравенство в виде

$$16 \cdot 2^{2\sqrt{x-1}} + 3 \cdot 4 \cdot 2^{\sqrt{x-1}} - 16 < 15 \cdot 2^{2\sqrt{x-1}} + 8 \cdot 2^{\sqrt{x-1}} + 5 \cdot 2 \cdot 2^{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2^{2\sqrt{x-1}} - 6 \cdot 2^{\sqrt{x-1}} - 16 < 0$ . Решив это неравенство как квадратное относительно  $2^{\sqrt{x-1}}$ , имеем  $-2 < 2^{\sqrt{x-1}} < 8$ . Неравенство  $2^{\sqrt{x-1}} > -2 \Leftrightarrow x-1 \geq 0, x \geq 1$ . Неравенство  $2^{\sqrt{x-1}} < 8 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x-1}} < 2^3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < 3, 0 \leq x-1 < 9, 1 \leq x < 10$ . В ответ запишем целые числа из этого промежутка.

Ответ:  $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = 4; x_5 = 5; x_6 = 6; x_7 = 7; x_8 = 8; x_9 = 9$ .

**9.101.** При каких значениях  $p$  оба корня квадратного трехчлена  $x^2 + 2(p+1)x + 9p - 5$  отрицательны?

*Решение.*

По теореме Виета корни квадратного трехчлена  $Ax^2 + Bx + C$  существуют и оба отрицательны тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D = B^2 - 4AC \geq 0, \\ \frac{B}{A} > 0, \\ \frac{C}{A} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(p+1)^2 - 4(9p-5) \geq 0, \\ 9p-5 > 0, \\ p+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 7p + 6 \geq 0, \\ p > \frac{5}{9}, \\ p > -1, \end{cases} \text{ откуда имеем } \begin{cases} \frac{5}{9} < p \leq 1, \\ p \geq 6. \end{cases}$$

Ответ:  $p \in \left(\frac{5}{9}; 1\right] \cup [6; \infty)$ .

**9.102.** При каких значениях  $n$  оба корня уравнения  $(n-2)x^2 - 2nx + n+3 = 0$  положительны?

*Решение.*

По теореме Виета корни квадратного трехчлена  $Ax^2 + Bx + C$  существуют и оба положительны тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D = B^2 - 4AC \geq 0, \\ \frac{B}{A} < 0, \\ \frac{C}{A} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - (n-2)(n+3) \geq 0, \\ \frac{n}{n-2} > 0, \\ \frac{n+3}{n-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq 6, \\ n^2 + n - 6 > 0, \\ n(n-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n < -3, \\ 2 < n \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow (n \in (-\infty; -3) \cup (2; 6]).$$

Ответ:  $n \in (-\infty; -3) \cup (2; 6]$ .

**9.103.** При каких значениях  $m$  корни уравнения  $4x^2 - (3m+1)x - m - 2 = 0$  заключены в промежутке между  $-1$  и  $2$ ?

*Решение.*

Корни уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  заключены в промежутке  $(\lambda, \delta)$ , т.е.  $\lambda < x_1 < \delta$  и  $\lambda < x_2 < \delta$ , когда

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0, \\ a(a\delta^2 + b\delta + c) > 0, \\ a(a\lambda^2 + b\lambda + c) > 0, \\ \lambda < -\frac{b}{2a} < \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+1)^2 + 16(m+2) \geq 0, \\ 4(2)^2 - (3m+1)2 - m - 2 > 0, \\ 4(-1)^2 - (3m+1)(-1) - m - 2 > 0, \\ -1 < \frac{3m+1}{8} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m + 22m + 33 \geq 0, \\ -7m + 12 > 0, \\ 2m + 3 > 0, \\ 3m - 15 < 0, \\ 3m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R}, \\ m < \frac{12}{7}, \\ m > -\frac{3}{2}, \\ m < 5, \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{2} < m < \frac{12}{7}\right).$$

Ответ:  $m \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{12}{7}\right)$ .

**9.104.** При каких значениях  $a$  квадратный трехчлен  $ax^2 - 7x + 4a$  принимает отрицательные значения для любых действительных значений  $x$ ?

*Решение.*

Квадратный трехчлен  $ax^2 - 7x + 4a < 0$  для  $x \in R$ , когда

$$\begin{cases} 49 - 16a^2 < 0, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 > \frac{49}{16}, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left( a < -\frac{7}{4} \right).$$

*Ответ:*  $a \in \left( -\infty; -\frac{7}{4} \right)$ .

**9.105.** Найти целые числа  $x$ , удовлетворяющие неравенству  $\left| \frac{2}{x-13} \right| > \frac{8}{9}$ .

*Решение.*

Из условия имеем  $|x-13| < \frac{9}{4}$ ,  $x \neq 13$ , откуда  $-\frac{9}{4} < x-13 < \frac{9}{4}$ ,  $\frac{43}{4} < x < \frac{61}{4}$ ,

$x \neq 13$ ;  $x \in \left( \frac{43}{4}; 13 \right) \cup \left( 13; \frac{61}{4} \right)$ . Целыми решениями из объединения этих

интервалов будут  $x_1 = 11$ ;  $x_2 = 12$ ;  $x_3 = 14$ ;  $x_4 = 15$ .

*Ответ:*  $x_1 = 11$ ;  $x_2 = 12$ ;  $x_3 = 14$ ;  $x_4 = 15$ .

**9.106.** Доказать, что при условии  $2y + 5x = 10$  выполняется неравенство  $3xy - x^2 - y^2 < 7$ .

*Решение.*

Получаем систему

$$\begin{cases} 2y + 5x = 10, \\ 3xy - x^2 - y^2 < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{10-5x}{2}, \\ \frac{3x(10-5x)}{2} - x^2 - \left( \frac{10-5x}{2} \right)^2 < 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{10-5x}{2}, \\ 59x^2 - 160x + 128 > 0. \end{cases}$$



Неравенство  $59x^2 - 160x + 128 > 0$  выполняется для всех  $x$ , т.к.  $59 > 0$ ,  $D > 0$ .

Что и требовалось доказать.

**9.107.** Доказать, что если  $4b + a = 1$ , то выполняется неравенство  $a^2 + 4b^2 \geq \frac{1}{5}$ .

*Решение.*

Имеем

$$\begin{cases} 4b + a = 1, \\ a^2 + 4b^2 \geq \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 4b, \\ (1 - 4b)^2 + 4b^2 \geq \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 4b, \\ 25b^2 - 10b + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 4b, \\ (5b - 1)^2 \geq 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство истинно.

Что и требовалось доказать.

**9.108.** Доказать, что многочлен  $m^6 - m^5 + m^4 + m^2 - m + 1$  принимает положительные значения при всех действительных значениях  $m$ .

*Решение.*

Перепишем данный многочлен в виде

$$\begin{aligned} m^6 + m^2 - (m^5 + m) + (m^4 + 1) &= m^2(m^4 + 1) - m(m^4 + 1) + (m^4 + 1) = \\ &= (m^4 + 1)(m^2 - m + 1). \end{aligned}$$

Так как  $m^4 + 1 > 0$  и  $m^2 - m + 1 > 0$  при  $m \in \mathbb{R}$ , то  $(m^4 + 1)(m^2 - m + 1) > 0$  при  $m \in \mathbb{R}$ .

Что и требовалось доказать.

**9.109.** Найти область определения функции  $f$ , если

$$f(x) = \sqrt[6]{4^{\frac{x+1}{x}} - 17 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4}.$$

*Решение.*

Имеем при  $x \neq 0$  неравенство

$$4^{\frac{x+1}{x}} - 17 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2 - 17 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 \geq 0,$$

решим его как квадратное относительно  $2^{\frac{1}{x}}$ . Получим

$$\begin{cases} 2^x \geq 4, \\ 2^x \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \geq 2^2, \\ 2^x \leq 2^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \geq 2, \\ \frac{1}{x} \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-2x}{x} \geq 0, \\ \frac{1+2x}{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)x \leq 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)x \leq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} \leq x < 0. \end{cases}$$

Ответ:  $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$ .

9.110. Найти область определения функции  $f$ , если

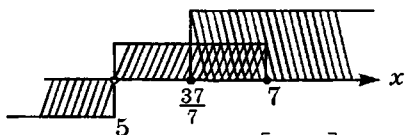
$$f(x) = \sqrt{9 - \left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2}.$$

Решение.

Получаем неравенство  $9 - \left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2 \leq 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{4x-22}{x-5}\right| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq \frac{4x-22}{x-5} \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-22}{x-5} \leq 3, \\ \frac{4x-22}{x-5} \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-22}{x-5} - 3 \leq 0, \\ \frac{4x-22}{x-5} + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-7}{x-5} \leq 0, \\ \frac{7x-37}{x-5} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x-5) \leq 0, \\ (7x-37)(x-5) \geq 0, \\ x \neq 5. \end{cases}$$



Методом интервалов получаем  $x \in \left[\frac{37}{7}; 7\right]$ .

Ответ:  $x \in \left[\frac{37}{7}; 7\right]$ .

**9.111.** Найти целые неотрицательные значения  $x$ , удовлетворяющие

$$\text{неравенству } \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2}.$$

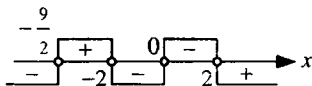
*Решение.*

$$\text{Перепишем неравенство в виде } \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x(x-2)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-2} < 0 \text{ при } x \neq 0, \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+9}{(x-2)(x+2)} < 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+9)(x-2)(x+2) < 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

С помощью числовой прямой получаем  $x = 1$ .



*Ответ:*  $x = 1$ .

**9.112.** При каких значениях  $a$  неравенство  $\frac{ax}{x^2+4} < 1,5$  выполняется для

любых значений  $x \in \mathbb{R}$  ?

*Решение.*

Так как  $x^2 + 4 > 0$ , то имеем  $ax < 1,5x^2 + 6 \Leftrightarrow 1,5x^2 - ax + 6 > 0$ . Это неравенство выполняется для любых значений  $x \in \mathbb{R}$ , если  $D = a^2 - 36 < 0$ ,  $a^2 < 36$ ,  $-6 < a < 6$ .

*Ответ:*  $a \in (-6; 6)$ .

**9.113.** Найти область определения функции  $f$ , если  $f(x) = \sqrt{\log_{0,5}(x^2-9) + 4}$ .

*Решение.*

Область определения данной функции найдем, решив неравенство

$$\log_{0,5}(x^2-9) + 4 \geq 0, \log_{0,5}(x^2-9) \geq -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x^2 - 9 \leq 16, 9 < x^2 \leq 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 25, \\ x^2 > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5, \\ \begin{cases} x > 3, \\ x < -3. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ:  $x \in [-5; -3) \cup (3; 5]$ .

**9.114.** При каких значениях  $x$  определено следующее выражение

$$\log_3(1 - \log_{0,5}(x^2 - 2x - 2,5))?$$

*Решение.*

Получаем неравенство

$$1 - \log_{0,5}(x^2 - 2x - 2,5) > 0, \log_{0,5}(x^2 - 2x - 2,5) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2,5 > 0,5, x^2 - 2x - 3 > 0, (x+1)(x-3) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)).$$

Ответ:  $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ .

**9.115.** Найти те значения  $m$ , при которых неравенство

$$\frac{x^2 - 8x + 20}{mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4} < 0$$

выполняется для любых действительных значений  $x$ .

*Решение.*

Так как  $x^2 - 8x + 20 > 0$  при  $x \in \mathbb{R}$ , то необходимо

$$mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4 < 0.$$

Последнее неравенство истинно для  $x \in \mathbb{R}$ , когда

$$\begin{cases} (m+1)^2 - m(9m+4) < 0, \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m^2 + 2m - 1 > 0, \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}.$$

Ответ:  $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ .

9.116. При каких значениях  $x$  разность  $\frac{11x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} - x$  принимает

только отрицательные значения?

*Решение.*

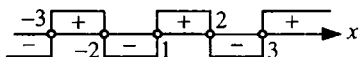
Имеем

$$\frac{11x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} - x < 0 \Leftrightarrow \frac{11x^2 - 5x + 6 - x^3 - 5x - 6x}{x^2 + 5x + 6} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^3 + 6x^2 - 11x + 6}{x^2 + 5x + 6} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 + 5x + 6} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+3)(x+2)} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)(x+3)(x+2) > 0.$$

Методом интервалов получаем  $x \in (-3; -2) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$ .



Ответ:  $x \in (-3; -2) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$ .

9.117. При каких значениях  $m$  неравенство  $\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$  выполняется

для любых  $x$ ?

*Решение.*

Из условия получаем

$$\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + mx - 1 - 2x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 2x + 3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + (m+2)x - 4}{2x^2 - 2x + 3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - (m+2)x + 4}{2x^2 - 2x + 3} > 0.$$

Так как  $2x^2 - 2x + 3 > 0$  при  $x \in \mathbb{R}$ , то  $x^2 - (m+2)x + 4 > 0$  для  $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 - 16 < 0, (m+2)^2 < 16, -4 < m+2 < 4, -6 < m < 2.$$

Ответ:  $m \in (-6; 2)$ .

**9.118.** При каких значениях  $m$  неравенство  $\frac{x^2 - mx - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$  выполняется для любых  $x$ ?

*Решение.*

Из условия имеем  $\frac{2x^2 - (m+3)x + 2}{x^2 - 3x + 4} > 0$ . Так как  $x^2 - 3x + 4 > 0$  при  $x \in \mathbb{R}$ , то  $2x^2 - (m+3)x + 2 > 0$  для любых  $x$ , откуда  $D = (m+3)^2 - 16 < 0$ ,  $(m+3)^2 < 16$ ,  $-4 < m+3 < 4$ ,  $-7 < m < 1$ .

*Ответ:*  $m \in (-7; 1)$ .

**9.119.** При каких значениях  $a$  сумма  $a + \frac{-1+9a+4a^2}{a^2-3a-10}$  принимает только положительные значения?

*Решение.*

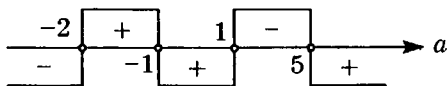
Запишем неравенство

$$a + \frac{-1+9a+4a^2}{a^2-3a-10} > 0, \quad \frac{a^3 - 3a^2 - 10a - 1 + 9a + 4a^2}{a^2 - 3a - 10} > 0,$$

$$\frac{a^3 + a^2 - a - 1}{a^2 - 3a - 10} > 0, \quad \frac{a^2(a+1) - (a+1)}{(a+2)(a-5)} > 0, \quad \frac{(a+1)(a^2-1)}{(a+2)(a-5)} > 0,$$

$$(a+1)^2(a-1)(a+2)(a-5) > 0.$$

Методом интервалов находим  $a \in (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (5; \infty)$ .



*Ответ:*  $a \in (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (5; \infty)$ .

**9.120.** Найти целые значения  $x$ , удовлетворяющие неравенству

$$\log_4 x + \log_2(\sqrt{x} - 1) < \log_2 \log_{\sqrt{5}} 5.$$

*Решение.*

Перейдем к основанию 2. Имеем  $\frac{1}{2} \log_2 x + \log_2(\sqrt{x} - 1) < \log_2 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x} + \log_2(\sqrt{x} - 1) < 1 \Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) < 2, \\ x > 0, \\ \sqrt{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 2 < 0, \\ x > 0, \\ \sqrt{x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \sqrt{x} < 2, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 4, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

Ответ:  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 3$ .

**9.121.** Показать, что при любых действительных значениях  $x$  функция

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \text{ не может принимать значений, больших } \frac{3}{2} \text{ и меньших } \frac{1}{2}.$$

*Решение.*

Пусть, от противного, имеем

$$1) \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2 > 3x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 < 0, \text{ нет решений};$$

$$2) \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2 < x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 < 0, \text{ нет решений.}$$

Полученные противоречия показывают, что  $y$  не может принять значения, меньшие, чем  $\frac{1}{2}$  или большие, чем  $\frac{3}{2}$ .

Что и требовалось доказать.

Найти области определения функций (**9.122—9.129**):

$$\mathbf{9.122.} \quad y = 2\sqrt{|x-3| - |8-x|}.$$

*Решение.*

Областью определения данной функции будут все те значения  $x$ , для которых выполняется неравенство  $|x-3| - |8-x| \geq 0$ . Раскрывая модули, получаем три случая:

$$1) \begin{cases} x < 3, \\ -x + 3 - 8 + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ -5 \geq 0, \end{cases} \quad x \in \emptyset;$$

$$2) \begin{cases} 3 \leq x < 8, \\ x - 3 - 8 + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x < 8, \\ x \geq \frac{11}{2}, \end{cases} \quad \frac{11}{2} \leq x < 8;$$

$$3) \begin{cases} x \geq 8, \\ x - 3 + 8 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 8, \\ 5 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 8, \\ x \in R, \end{cases} \quad x \geq 8.$$

Ответ:  $x \in \left[ \frac{11}{2}; \infty \right)$ .

9.123.  $y = \frac{\sqrt{4x - x^2}}{\log_3|x - 4|}$ .

Решение.

Получаем

$$\begin{cases} 4x - x^2 \geq 0, \\ \log_3|x - 4| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 4) \leq 0, \\ |x - 4| \neq 1, \\ x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4, \\ x \neq 3, \\ x \neq 5, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Ответ:  $x \in [0; 3) \cup (3; 4)$ .

9.124.  $y = \log_3 \left( 0,64^{2 - \log_{\sqrt{2}} x} - 1,25^{8 - (\log_2 x)^2} \right)$ .

Решение.

Рассмотрим неравенство  $0,64^{2 - \log_{\sqrt{2}} x} - 1,25^{8 - (\log_2 x)^2} > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0,64^{2 - \log_{\sqrt{2}} x} > 1,25^{8 - (\log_2 x)^2} \Leftrightarrow \left( \frac{4}{5} \right)^{4 - 2 \log_{\sqrt{2}} x} > \left( \frac{4}{5} \right)^{(\log_2 x)^2 - 8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2 \log_{\sqrt{2}} x > \log_2^2 x - 8. \text{ Переходя к основанию 2, получаем}$$

$\log_2^2 x + 4 \log_2 x - 12 > 0$ . Решая это неравенство как квадратное относи-

тельно  $\log_2 x$ , имеем  $\begin{cases} \log_2 x > 2, \\ \log_2 x < -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ 0 < x < \frac{1}{64}. \end{cases}$

Ответ:  $x \in \left( 0; \frac{1}{64} \right) \cup (4; \infty)$ .



$$9.125. y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \log_3 |x-3|}.$$

*Решение.*

Областью определения данной функции будут те значения  $x$ , для которых имеет место неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_3 |x-3| \geq 0 \Leftrightarrow 0 < \log_3 |x-3| \leq 1 \Leftrightarrow 1 < |x-3| \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| \leq 3, \\ |x-3| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3 \leq 3, \\ \begin{cases} x-3 > 1, \\ x-3 < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 6, \\ \begin{cases} x > 4, \\ x < 2. \end{cases} \end{cases}$$

*Ответ:*  $x \in [0; 2) \cup (4; 6]$ .

$$9.126. y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}^2 (x-3) - 1}.$$

*Решение.*

Получаем неравенство  $\log_{\frac{1}{2}}^2 (x-3) - 1 \geq 0$ ,  $\log_{\frac{1}{2}}^2 (x-3) \geq 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} (x-3) \geq 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} (x-3) \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x-3 \leq \frac{1}{2}, \\ x-3 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x \leq \frac{7}{2}, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

*Ответ:*  $x \in \left(3; \frac{7}{2}\right] \cup [5; \infty)$ .

$$9.127. y = \sqrt[4]{2 - \lg|x-2|}.$$

*Решение.*

Имеем неравенство  $2 - \lg|x-2| \geq 0$ ,  $\lg|x-2| \leq 2 \Leftrightarrow 0 < |x-2| \leq 100 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| \leq 100, \\ |x-2| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -100 \leq x-2 \leq 100, \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -98 \leq x \leq 102, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

*Ответ:*  $x \in [-98; 2) \cup (2; 102]$ .

$$9.128. y = \log_3(2^{\log_{x-3} 0,5} - 1) + \frac{1}{\log_3(2x-6)}.$$

*Решение.*

Область определения данной функции найдем, решив систему неравенств

$$\begin{cases} 2^{\log_{x-3} 0,5} - 1 > 0, \\ \log_3(2x-6) \neq 0, \\ 2x-6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\log_{x-3} 0,5} > 1, \\ 2x-6 \neq 1, \\ 2x-6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{x-3} 0,5 > 0, \\ 2x \neq 7, \\ 2x > 6. \end{cases}$$

Получаем два случая:

$$1) \begin{cases} 0 < x-3 < 1, \\ 0,5 < 1, \\ x \neq \frac{7}{2}, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 4, \\ x \neq \frac{7}{2}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x-3 > 1, \\ 0,5 > 1, \\ x \neq \frac{7}{2}, \\ x > 3, \end{cases} \quad \emptyset.$$

Ответ:  $x \in \left(3; \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; 4\right).$

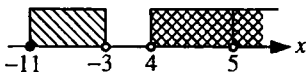
$$9.129. y = \sqrt{\frac{x^2-1}{(x+3)(x-4)}} - 1 + \frac{1}{\log_8(x-4)}.$$

*Решение.*

Из условия получаем систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x^2-1}{(x+3)(x-4)} - 1 \geq 0, \\ \log_8(x-4) \neq 0, \\ x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+11}{(x+3)(x-4)} \geq 0, \\ x-4 \neq 1, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+11)(x+3)(x-4) \geq 0, \\ x \neq -3, \\ x \neq 5, \\ x > 4. \end{cases}$$

Методом интервалов имеем  $x \in (4; 5) \cup (5; \infty)$ .



Ответ:  $x \in (4; 5) \cup (5; \infty)$ .

Решить неравенства (9.130 — 9.205):

$$9.130. \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| < 3.$$

Решение.

Неравенство равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} \frac{3x+1}{x-3} < 3, \\ \frac{3x+1}{x-3} > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+1}{x-3} - 3 < 0, \\ \frac{3x+1}{x-3} + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{x-3} < 0, \\ \frac{3x-4}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < 0, \\ (3x-4)(x-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}.$$

Ответ:  $x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$ .

$$9.131. \log_{|x-1|} 0,5 > 0,5.$$

Решение.

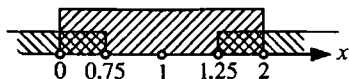
Из условия имеем две системы неравенств:

$$1) \begin{cases} 0 < |x-1| < 1, \\ 0,5 < \sqrt{|x-1|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,25 < |x-1| < 1, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} |x-1| > 1, \\ 0,5 > \sqrt{|x-1|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| > 1, \\ |x-1| < 0,25, \end{cases} \emptyset.$$

$$\text{Из системы 1) имеем } \begin{cases} 0 < x < 2, \\ x \neq 1, \\ \begin{cases} x > 1,25, \\ x < 0,75. \end{cases} \end{cases}$$

Методом интервалов получаем  $x \in (0; 0,75) \cup (1,25; 2)$ .



Ответ:  $x \in (0; 0,75) \cup (1,25; 2)$ .

9.132.  $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0$ .

Решение.

Данное неравенство равносильно следующим двум системам неравенств:

$$1) \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} < 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \frac{x^2-3x+2}{x^2+1} > 0, \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2-3x+2 > 0, \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 1;$$

$$2) \begin{cases} x > 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \frac{x^2-3x+2}{x^2+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x^2-3x+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Ответ:  $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$ .

9.133  $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}} > 0$ .

Решение.

ОДЗ:  $4-x^3 > 0$ ,  $x^3 < 4$ ,  $x < \sqrt[3]{4}$ .

Отсюда получаем  $|x+2|-|x| > 0$ . Раскрывая модули, имеем следующие три случая:

$$1) \begin{cases} x < -2, \\ -x-2+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ -2 > 0 \end{cases} \emptyset;$$

$$2) \begin{cases} -2 \leq x < 0, \\ x+2+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0, \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0;$$

$$3) \begin{cases} x \geq 0, \\ x+2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$$

$x \in (-1; \infty)$ . Учитывая ОДЗ, имеем  $x \in (-1; \sqrt[3]{4})$ .

Ответ:  $x \in (-1; \sqrt[3]{4})$ .

9.134.  $0,5\sqrt{3} < 0,5 \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} < 0,5$ .

Решение.

Данное неравенство равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} > 1, \\ \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} < \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} - 1 > 0, \\ \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} - \sqrt{3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin 2x - 1 + \cos 2x}{1-\cos 2x} > 0, \\ \frac{\sin 2x - \sqrt{3} + \sqrt{3} \cos 2x}{1-\cos 2x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2 \sin x \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}{1 - \cos^2 x + \sin^2 x} > 0, \\ \frac{2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x + \sqrt{3} \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x}{1 - \cos^2 x + \sin^2 x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2 \sin x (\cos x - \sin x)}{2 \sin^2 x} > 0, \\ \frac{2 \sin x (\cos x - \sqrt{3} \sin x)}{2 \sin^2 x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x - 1 > 0, \\ \operatorname{ctg} x - \sqrt{3} < 0, \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x > 1, \\ \operatorname{ctg} x < \sqrt{3}, \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < \operatorname{ctg} x < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x \in \left( \frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$

$$9.135. \text{ а) } \frac{3\log_a x + 6}{\log_a^2 x + 2} > 1; \text{ б) } \log_2 \log_4 x + \log_4 \log_2 x \leq -4.$$

*Решение.*

$$\text{а) Перепишем неравенство в виде } \frac{\log_a^2 x - 3\log_a x - 4}{\log_a^2 x + 2} < 0.$$

Так как  $\log_a^2 x + 2 > 0$  при  $0 < a \neq 1$  и  $x > 0$ , то  $\log_a^2 x - 3\log_a x - 4 < 0$ .

Решая последнее неравенство как квадратное относительно  $\log_a x$ , имеем

$$-1 < \log_a x < 4 \Rightarrow$$

$$1) \begin{cases} 0 < a < 1, \\ a^4 < x < \frac{1}{a}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} a > 1, \\ \frac{1}{a} < x < a^4. \end{cases}$$

*Ответ:*  $x \in \left(a^4; \frac{1}{a}\right)$  для  $0 < a < 1$  и  $x \in \left(\frac{1}{a}; a^4\right)$ , если  $a > 1$ .

б)  $\log_2 \log_4 x + \log_4 \log_2 x \leq -4$ . Перейдем к основанию 2. Имеем

$$\log_2 \log_2 \sqrt{x} + \log_2 \sqrt{\log_2 x} \leq -4 \Rightarrow \log_2 (\log_2 \sqrt{x} \cdot \sqrt{\log_2 x}) \leq -4,$$

$$\log_2 \sqrt{x} \cdot \sqrt{\log_2 x} \leq \frac{1}{16}, \quad \log_2 x \cdot \sqrt{\log_2 x} \leq \frac{1}{8}.$$

Возводя обе части неравенства в квадрат, получим  $\log_2^3 x \leq \frac{1}{64}$ . Отсюда  $0 < \log_2 x \leq \frac{1}{4}$ ,  $1 < x \leq \sqrt[4]{2}$ .

*Ответ:*  $x \in [1; \sqrt[4]{2}]$ .

$$9.136. \left(\frac{x^2}{8} + \frac{3x}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - x - \frac{(x-2)^2 \cdot (1-x)}{(x+2)^2}\right) > 0.$$

*Решение.*

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{8x} \cdot \frac{(1-x)(x+2)^2 - (x-2)^2 \cdot (1-x)}{(x+2)^2} > 0 \Leftrightarrow$$

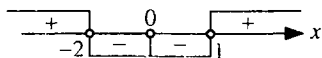
$$\Leftrightarrow \frac{(x^3 + 8) + (6x^2 + 12x)}{8x} \cdot \frac{(1-x)((x+2)^2 - (x-2)^2)}{(x+2)^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x^2-2x+4)+6x(x+2)}{8x} \cdot \frac{(1-x)((x+2+x-2)(x+2-x+2))}{(x+2)^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x^2+4x+4)}{8x} \cdot \frac{(1-x) \cdot 8x}{(x+2)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+2)^2(x-1) \cdot x}{x(x+2)^2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1) < 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Методом интервалов находим  $x \in (-2; 0) \cup (0; 1)$ .



Ответ:  $x \in (-2; 0) \cup (0; 1)$ .

$$9.137. (\log_2 x)^4 - \left( \log_2 \frac{x^3}{8} \right)^2 + 9 \cdot \log_2 \frac{32}{x^2} < 4 \cdot \left( \log_{\frac{1}{2}} x \right)^2.$$

Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Перейдем к основанию 2. Имеем

$$\log_2^4 x - \left( \log_2 \frac{x^3}{8} \right)^2 + 9 \log_2 \frac{32}{x^2} - 4 \log_2^2 x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4 x - (3 \log_2 x - 3)^2 + 9(5 - 2 \log_2 x) - 4 \log_2^2 x < 0 \Leftrightarrow$$

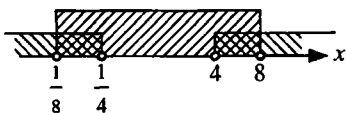
$$\Leftrightarrow \log_2^4 x - 9 \log_2^2 x + 18 \log_2 x - 9 + 45 - 18 \log_2 x - 4 \log_2^2 x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4 x - 13 \log_2^2 x + 36 < 0.$$

Решая это неравенство как биквадратное относительно  $\log_2 x$ , получаем систему неравенств

$$\begin{cases} -3 < \log_2 x < 3, \\ \log_2 x > 2, \\ \log_2 x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{8} < x < 8, \\ x > 4, \\ 0 < x < \frac{1}{4}. \end{cases}$$

С помощью числовой прямой получаем  $x \in \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right) \cup (4; 8)$ .



Ответ:  $x \in \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right) \cup (4; 8)$ .

9.138.  $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$ .

Решение.

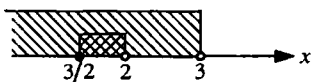
ОДЗ:  $x \neq 2, 3$ .

Раскрывая модуль, получаем два случая:

$$1) \begin{cases} x-3 < 0, \\ \frac{-x+3}{x^2-5x+6} - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ \frac{-2x^2+9x-9}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ \frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)}{(x-2)(x-3)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ \left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2) \leq 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем  $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right)$ .



$$2) \begin{cases} x-3 \geq 0, \\ \frac{x-3}{x^2-5x+6} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ \frac{-2x^2+11x-15}{x^2-5x+6} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\begin{cases} x \geq 3, \\ 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x-3) \\ \frac{\quad}{(x-2)(x-3)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, 3; \\ (x-2)\left(x - \frac{5}{2}\right) \leq 0, \quad \emptyset. \\ x > 3, \end{cases}$$

Ответ:  $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right)$ .

9.139.  $\frac{m^2x+1}{2} - \frac{m^2x+3}{3} < \frac{m+9x}{6}$ .

Решение.

Перепишем неравенство в виде  $\frac{m^2x+1}{2} - \frac{m^2x+3}{3} - \frac{m+9x}{6} < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3m^2x+3-2m^2x-6-m-9x}{6} < 0 \Leftrightarrow (m^2-9)x - (m+3) < 0,$$

$$(m+3)((m-3)x-1) < 0.$$

Полученное неравенство равносильно следующим пяти системам неравенств:

$$1) \begin{cases} m < -3, \\ x < \frac{1}{m-3}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} m = -3, \\ \emptyset; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} -3 < m < 3, \\ x > \frac{1}{m-3}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} m = 3, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} m > 3, \\ x < \frac{1}{m-3}. \end{cases}$$

Ответ: Если  $m > 3$  или  $m < -3$ , то  $x \in \left(-\infty; \frac{1}{m-3}\right)$ ;

если  $-3 < m < 3$ , то  $x \in \left(\frac{1}{m-3}; \infty\right)$ ;

если  $m = 3$ , то  $x \in (-\infty; \infty)$ ;

если  $m = -3$ , то решений нет.

$$9.140. \frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x < 2.$$

Так как  $\sqrt{2-x} > 0$ , то имеем  $(\sqrt{2-x})^2 + 2(\sqrt{2-x}) - 4 > 0$ . Решив это неравенство как квадратное относительно  $\sqrt{2-x}$ , получаем  $\sqrt{2-x} < -1 - \sqrt{5}$ ,  $\emptyset$ ; или  $\sqrt{2-x} > -1 + \sqrt{5} \Leftrightarrow 2-x > (\sqrt{5}-1)^2$ ,  $x < -4 + 2\sqrt{5}$ .

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -4 + 2\sqrt{5}).$$

$$9.141. \sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9.$$

*Решение.*

Перепишем данное неравенство в виде  $\sqrt{3^{2x} - 9 \cdot 3^x} > 3^x - 9$ . Оно равносильно следующим двум системам неравенств:

$$1) \begin{cases} 3^x - 9 < 0, \\ 3^{2x} - 9 \cdot 3^x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x < 3^2, \\ 3^x(3^x - 3^2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \geq 2, \end{cases} \emptyset;$$

$$2) \begin{cases} 3^x - 9 \geq 0, \\ 3^{2x} - 9 \cdot 3^x > (3^x - 9)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq 3^2, \\ 3^{2x} - 9 \cdot 3^x > (3^x - 9)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq 3^2, \\ 3^{2x} - 9 \cdot 3^x > 3^{2x} - 18 \cdot 3^x + 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ 9 \cdot 3^x > 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

$$\text{Ответ: } x \in (2; \infty).$$

$$9.142. \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1.$$

*Решение.*

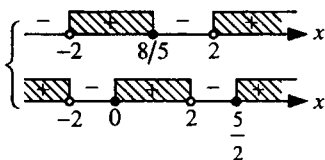
$$\text{ОДЗ: } x \neq \pm 2.$$

Данное неравенство равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \leq 1, \\ \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} - 1 \leq 0, \\ \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4 - x^2 + 4}{x^2 - 4} \leq 0, \\ \frac{x^2 - 5x + 4 + x^2 - 4}{x^2 - 4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-5x + 8}{x^2 - 4} \leq 0, \\ \frac{2x^2 - 5x}{x^2 - 4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{8}{5}\right)(x - 2)(x + 2) \geq 0, \\ x\left(x - \frac{5}{2}\right)(x - 2)(x + 2) \geq 0, \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$



Для системы неравенств графически получаем  $x \in \left[0; \frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; \infty\right)$ .

Ответ:  $x \in \left[0; \frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; \infty\right)$ .

9.143.  $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$ .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Так как обе части неравенства неотрицательны, то, возведя обе части в квадрат, получим

$$x+3 < x-1+2\sqrt{(x-1)(x-2)}+x-2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(x-2)} > 6-x$ . Последнее неравенство, с учетом ОДЗ, равносильно следующим двум системам неравенств:

$$1) \begin{cases} 6-x < 0, \\ (x-1)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6, \\ (x-1)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 6;$$

$$2) \begin{cases} 6-x \geq 0, \\ x \geq 2, \\ 4(x-1)(x-2) > (6-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 6, \\ x^2 > \frac{28}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 6, \\ x > \sqrt{\frac{28}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{28}{3}} < x \leq 6.$$

Объединяя промежутки решений, получаем, что  $x > \sqrt{\frac{28}{3}}$ .

Ответ:  $x \in \left( \sqrt{\frac{28}{3}}; \infty \right)$ .

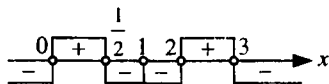
9.144.  $\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)(3-x)}{\log_2|x-1|} > 0.$

Решение.

ОДЗ:  $|x-1| > 0, x \neq 1.$

Корнями уравнений  $\left(x - \frac{1}{2}\right)(3-x) = 0$  и  $\log_2|x-1| = 0$  являются числа

$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3, x_3 = 2, x_4 = 0$ , которые не являются решениями заданного неравенства, поэтому на числовой оси отмечаем их полыми кружками:



(включая  $x = 1$ ). Эти точки разбивают числовую ось на шесть промежутков. Подставляя из каждого промежутка значение  $x$  в данное неравенство, получаем знак неравенства в рассматриваемом промежутке. С помощью рисунка находим ответ:  $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (2; 3)$ .

Ответ:  $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (2; 3)$ .

$$9.145. \sqrt{3} \cos^{-2} x < 4 \operatorname{tg} x .$$

*Решение.*

Запишем неравенство в виде

$$\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - \frac{4 \sin x}{\cos x} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3} - 4 \sin x \cos x}{\cos^2 x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} - 2 \sin 2x < 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z .$$

*Ответ:*  $x \in \left( \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n \right), n \in Z .$

$$9.146. \sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1 .$$

*Решение.*

Перепишем неравенство в виде

$$\sin 4x + \frac{\cos 4x \cos 2x}{\sin 2x} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sin 4x \sin 2x + \cos 4x \cos 2x}{\sin 2x} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} > 1, \operatorname{ctg} 2x > 1, \pi n < 2x < \frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z,$$

$$\frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{8} (4n+1), n \in Z .$$

*Ответ:*  $x \in \left( \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} (4n+1) \right), n \in Z .$

$$9.147. 2 + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x < 0 .$$

*Решение.*

Из условия имеем

$$2 + \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 2x + 2 \operatorname{tg} 2x + 1}{\operatorname{tg} 2x} < 0, \frac{(\operatorname{tg} 2x + 1)^2}{\operatorname{tg} 2x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 2x + 1 \neq 0, \\ \operatorname{tg} 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 2x \neq -1, \\ \operatorname{tg} 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ -\frac{\pi}{2} + \pi n < 2x < \pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \\ -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi n}{2}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x \in \left( \frac{\pi}{4}(2n-1); \frac{\pi}{8}(4n-1) \right) \cup \left( \frac{\pi}{8}(4n-1); \frac{\pi n}{2} \right), n \in \mathbb{Z}.$

9.148.  $\frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8}{x^2} < 0.$

Решение.

Данное неравенство равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8 < 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^4 - x^3) + (4x^3 - 4) + (4x^2 - 4) < 0, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3(x-1) + 4(x-1)(x^2+x+1) + 4(x-1)(x+1) < 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

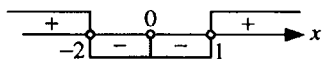
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^3 + 4x^2 + 8x + 8) < 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)((x^3 + 8) + (4x^2 + 8x)) < 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2)(x^2 - 2x + 4) + 4x(x+2) < 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2)(x^2 + 2x + 4) < 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) < 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем  $x \in (-2; 0) \cup (0; 1)$ .



Ответ:  $x \in (-2; 0) \cup (0; 1)$ .

$$9.149. \frac{3}{6x^2 - x - 12} < \frac{25x - 47}{10x - 15} - \frac{3}{3x + 4}.$$

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

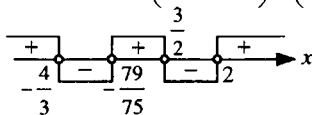
$$\frac{3}{(3x+4)(2x-3)} - \frac{25x-47}{5(2x-3)} + \frac{3}{3x+4} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{15 - (25x-47)(3x+4) + 15(2x-3)}{5(3x+4)(2x-3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-75x^2 + 71x + 158}{(3x+4)(2x-3)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{75x^2 - 71x - 158}{(3x+4)(2x-3)} > 0, \frac{75\left(x + \frac{79}{75}\right)(x-2)}{(3x+4)(2x-3)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{79}{75}\right)(x-2)(3x+4)(2x-3) > 0.$$

Методом интервалов имеем  $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{79}{75}; \frac{3}{2}\right) \cup (2; \infty)$ .



Ответ:  $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{79}{75}; \frac{3}{2}\right) \cup (2; \infty)$ .

$$9.150. \frac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2 - 4x} < 0.$$

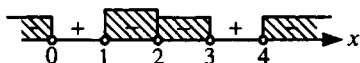
Решение.

ОДЗ:  $|x-2| > 0$ ,  $x \neq 2$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \neq 4$ .

Корнями уравнений  $\log_{0,3}|x-2| = 0$  и  $x^2 - 4x = 0$  будут числа  $x_1 = 1$ ,

$x_2 = 3$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 4$ ,  $x_5 = 2$  — не подходит по ОДЗ.

Эти точки разбивают числовую ось на 6 промежутков. Из каждого промежутка выбираем значение  $x$  и, подставляя его в данное неравенство, определяем знак неравенства на рассматриваемом промежутке. Методом интервалов получаем, что  $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (4; \infty)$ .



Ответ:  $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (4; \infty)$ .

9.151.  $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$ .

Решение.

Неравенство равносильно следующим двум системам неравенств:

$$1) \begin{cases} x - 3 < 0, \\ x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x(x - 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0;$$

$$2) \begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ x^2 - 4x > (x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x > \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{9}{2}.$$

Объединяя полученные промежутки, имеем  $x \in (-\infty; 0] \cup \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$ .

Ответ:  $x \in (-\infty; 0] \cup \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$ .

9.152.  $\frac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \leq \frac{1}{2}$ .

Решение.

Перейдем к основанию 2.

$$\text{Имеем } \frac{1 - \frac{1}{2} \log_2 x}{1 + \log_2 x} - \frac{1}{2} \leq 0, \quad \frac{2 - \log_2 x - 1 - \log_2 x}{2(1 + \log_2 x)} \leq 0,$$

$$\frac{1 - 2 \log_2 x}{1 + \log_2 x} \leq 0, \quad \frac{\log_2 x - \frac{1}{2}}{\log_2 x + 1} \geq 0.$$



Умножив обе части этого неравенства на квадрат знаменателя, получим

$$\begin{cases} \left(\log_2 x - \frac{1}{2}\right)(\log_2 x + 1) \geq 0, \\ \log_2 x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq \frac{1}{2}, \\ \log_2 x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{2}, \\ 0 < x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ:  $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [\sqrt{2}; \infty)$ .

9.153.  $\log_{\frac{4}{3}}(\sqrt{x+3} - x) > 0$ .

Решение.

Из условия имеем  $\sqrt{x+3} - x > 1$ ,  $\sqrt{x+3} > x+1$ . Полученное неравенство равносильно двум системам неравенств:

1)  $\begin{cases} x+1 < 0, \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x < -1;$

2)  $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x+3 > (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 1.$

Ответ:  $x \in [-3; 1)$ .

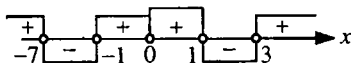
9.154.  $\frac{2-x}{x^3+x^2} > \frac{1-2x}{x^3-3x^2}$ .

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде  $\frac{2-x}{x^2(x+1)} - \frac{1-2x}{x^2(x-3)} > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-x)(x-3) - (1-2x)(x+1)}{x^2(x+1)(x-3)} > 0, \frac{x^2+6x-7}{x^2(x+1)(x-3)} > 0, \frac{(x+7)(x-1)}{x^2(x+1)(x-3)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1)(x-3)(x+7)(x-1) > 0. \text{ Методом интервалов получаем } x \in (-\infty; -7) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (3; \infty).$$



Ответ:  $x \in (-\infty; -7) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (3; \infty)$ .

$$9.155. 0,2^{\frac{6\log_4 x - 3}{\log_4 x}} > \sqrt[3]{0,008^{2\log_4 x - 1}}.$$

*Решение.*

Запишем уравнение в виде  $0,2^{\frac{6\log_4 x - 3}{\log_4 x}} > 0,2^{2\log_4 x - 1} \Leftrightarrow$

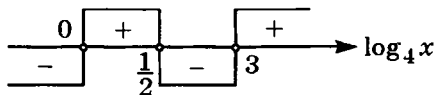
$$\Leftrightarrow \frac{6\log_4 x - 3}{\log_4 x} < 2\log_4 x - 1, \frac{6\log_4 x - 3}{\log_4 x} - 2\log_4 x + 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\log_4 x - 3 - 2\log_4^2 x + \log_4 x}{\log_4 x} < 0, \frac{2\log_4^2 x - 7\log_4 x + 3}{\log_4 x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(\log_4 x - \frac{1}{2}\right)(\log_4 x - 3)}{\log_4 x} > 0 \Leftrightarrow \left(\log_4 x - \frac{1}{2}\right)(\log_4 x - 3)\log_4 x > 0.$$

Методом интервалов находим

$$\begin{cases} 0 < \log_4 x < \frac{1}{2}, \\ \log_4 x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ x > 64. \end{cases}$$



*Ответ:*  $x \in (1; 2) \cup (64; \infty)$ .

$$9.156. (2,25)^{\log_2(x^2 - 3x - 10)} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\log_1(x^2 + 4x + 4)}{2}}$$

*Решение.*

Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log_2(x^2 - 3x - 10)} > \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{\log_1(x^2 + 4x + 4)}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x^2 - 3x - 10) > -\frac{\log_1(x^2 + 4x + 4)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x^2 - 3x - 10) > \log_2(x + 2)^2 \Leftrightarrow$$

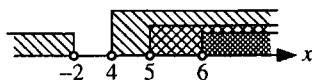
$$\Leftrightarrow 2 \log_2(x^2 - 3x - 10) > 2 \log_2|x + 2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 3x - 10) > \log_2|x + 2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 > |x + 2|, \\ x^2 - 3x - 10 > 0, \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 < x^2 - 3x - 10, \\ x + 2 > -x^2 + 3x + 10, \\ x^2 - 3x - 10 > 0, \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 12 > 0, \\ x^2 - 2x - 8 > 0, \\ x^2 - 3x - 10 > 0, \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6, \\ x < -2; \\ x > 4, \\ x < -2; \\ x > 5, \\ x < -2; \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Методом интервалов находим  $x \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$ .



Ответ:  $x \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$ .

**9.157.**  $\log_{0,5}(x + 3) < \log_{0,25}(x + 15)$ .

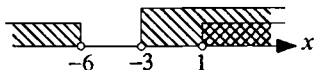
Решение.

Перейдем к основанию 2. Имеем  $\log_{0,5}(x + 3) < \log_{0,5} \sqrt{x + 15}$ . Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x + 3 > 0, \\ x + 15 > 0, \\ x + 3 > \sqrt{x + 15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x > -15, \\ x^2 + 6x + 9 > x + 15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x^2 + 5x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ \begin{cases} x > 1, \\ x < -6. \end{cases} \end{cases}$$

С помощью числовой прямой имеем  $x \in (1; \infty)$ .



Ответ:  $x \in (1; \infty)$ .

$$9.158. \log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(5-x) < 1.$$

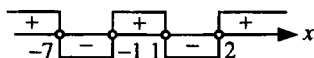
Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-1 > 0, \\ x+1 > 0, \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 5.$$

Перейдем к основанию 3. Имеем

$$\begin{aligned} -\log_3(x-1) - \log_3(x+1) + 2\log_3(5-x) > 1 &\Leftrightarrow \log_3 \frac{(5-x)^2}{(x-1)(x+1)} > 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(5-x)^2}{(x-1)(x+1)} > 3 &\Leftrightarrow \frac{(5-x)^2}{(x-1)(x+1)} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{(5-x)^2 - 3(x^2-1)}{(x-1)(x+1)} > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-2x^2 - 10x + 28}{(x-1)(x+1)} > 0, &\frac{x^2 + 5x - 14}{(x-1)(x+1)} < 0, \frac{(x+7)(x-2)}{(x-1)(x+1)} < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+7)(x-2)(x-1)(x+1) < 0. \end{aligned}$$

С учетом ОДЗ методом интервалов получаем  $2 < x < 5$ .



Ответ:  $x \in (2; 5)$ .

$$9.159. 2\log_3 \log_3 x + \log_{\frac{1}{3}} \log_3 (9\sqrt[3]{x}) \geq 1.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \log_3 x > 0.$$

Перейдем к основанию 3.  $2\log_3 \log_3 x - \log_3 \log_3 9\sqrt[3]{x} \geq 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_3 \log_3^2 x - \log_3 \log_3 9\sqrt[3]{x} \geq 1, \log_3 \frac{\log_3^2 x}{\log_3 9\sqrt[3]{x}} \geq 1, \frac{\log_3^2 x}{\log_3 9\sqrt[3]{x}} \geq 3 \Leftrightarrow$$

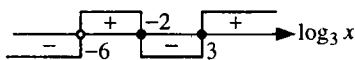
$$\Leftrightarrow \frac{\log_3^2 x}{2 + \frac{1}{3} \log_3 x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3^2 x - \log_3 x - 6}{\log_3 x + 6} \geq 0,$$

$$\frac{(\log_3 x + 2)(\log_3 x - 3)}{\log_3 x + 6} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_3 x + 2)(\log_3 x - 3)(\log_3 x + 6) \geq 0, \\ \log_3 x + 6 \neq 0. \end{cases}$$

Относительно  $\log_3 x$  методом интервалов получаем

1)  $-6 < \log_3 x \leq -2$ , не подходит по ОДЗ;

2)  $\log_3 x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 27$ .



Ответ:  $x \in [27; \infty)$ .

**9.160.**  $0,008^x + 5^{1-3x} + 0,04^{\frac{3}{2}(x+1)} < 30,04$ .

Решение.

Из условия имеем  $0,2^{3x} + \frac{5}{5^{3x}} + 0,08 \cdot 0,2^{3x} < 30,04 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 + 5 + 0,08 < 30,04 \cdot 5^{3x} \Leftrightarrow 5^{3x} > 5^{-1} \Leftrightarrow 3x > -1, x > -\frac{1}{3}.$$

Ответ:  $x \in \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$ .

**9.161.**  $0,4^{\log_3 \frac{3}{x} \log_3 3x} > 6,25^{\log_3 x^2 + 2}$ .

Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Перепишем неравенство в виде  $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_3 \frac{3}{x} \log_3 3x} > \left(\frac{2}{5}\right)^{-2 \log_3 x^2 - 4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{3}{x} \log_3 3x > -2 \log_3 x^2 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 3 - \log_3 x)(\log_3 3 + \log_3 x) < -4 \log_3 x - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \log_3 x)(1 + \log_3 x) + 4 \log_3 x + 4 < 0, \log_3^2 x - 4 \log_3 x - 5 > 0.$$

Решая это неравенство как квадратное относительно  $\log_3 x$ , получаем

$$\begin{cases} \log_3 x > 5, \\ \log_3 x < -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 243, \\ 0 < x < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ:  $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (243; \infty)$ .

9.162.  $0,3^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots} < \sqrt[3]{0,3^{3x^2+5x}} < 1$ .

Решение.

Запишем неравенство в виде  $0,3^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots} < 0,3^{\frac{3x^2+5x}{3}} < 0,3^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots > \frac{3x^2+5x}{3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots > \frac{3x^2+5x}{3}, \\ \frac{3x^2+5x}{3} > 0. \end{cases}$$

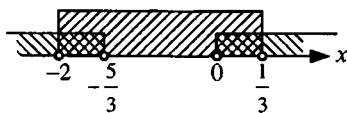
Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой

$$b_1 = 1, q = -\frac{1}{2}, S = \frac{b_1}{1-q}, \text{ следовательно, } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{2}{3} > \frac{3x^2+5x}{3}, \\ \frac{3x^2+5x}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+5x-2 < 0, \\ 3x^2+5x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < \frac{1}{3}, \\ x > 0, \\ x < -\frac{5}{3}. \end{cases}$$

С помощью числовой прямой находим  $x \in \left(-2; -\frac{5}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$ .



Ответ:  $x \in \left(-2; -\frac{5}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$ .

$$9.163. \frac{\lg 7 - \lg(-8x - x^2)}{\lg(x+3)} > 0.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -8x - x^2 > 0, \\ x + 3 > 0, \\ \lg(x+3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2, \\ -2 < x < 0. \end{cases}$$

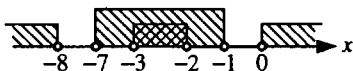
$$\text{Из условия имеем } \frac{\lg \frac{7}{-8x - x^2}}{\lg(x+3)} > 0, \log_{x+3} \frac{7}{-8x - x^2} > 0. \text{ Получен}$$

неравенство равносильно следующим двум системам неравенств:

$$1) \begin{cases} 0 < x + 3 < 1, \\ \frac{7}{-8x - x^2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2, \\ 1 + \frac{7}{8x + x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2, \\ \frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 8x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2, \\ (x+7)(x+1)(x+8)x > 0. \end{cases}$$

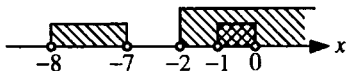
Отсюда методом интервалов находим  $-3 < x < -2$ .



$$2) \begin{cases} x + 3 > 1, \\ \frac{7}{-8x - x^2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ 1 + \frac{7}{x^2 + 8x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ \frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 8x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ (x+8)x(x+7)(x+1) < 0. \end{cases}$$

С помощью числовой прямой находим  $-1 < x < 0$ .



$$\text{Объединяя оба случая, получаем } \begin{cases} -3 < x < -2, \\ -1 < x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x \in (-3; -2) \cup (-1; 0).$$

$$9.164. \log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} - \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{4x-1} < 0.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \log_4 \frac{4x-1}{x+1} > 0, \\ \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{4x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-1}{x+1} > 1, \\ \frac{x+1}{4x-1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-2}{x+1} > 0, \\ \frac{3x-2}{4x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3}, \\ x < -1. \end{cases}$$

Перейдем в исходном неравенстве к основаниям 3 и 4. Получим

$$\log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} + \log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < 0 \Rightarrow 2 \log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow 0 < \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{4x-1}{x+1} < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-1}{x+1} < 4, \\ \frac{4x-1}{x+1} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-1}{x+1} - 4 < 0, \\ \frac{4x-1}{x+1} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{x+1} < 0, \\ \frac{3x-2}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0, \\ (3x-2)(x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ \begin{cases} x > \frac{2}{3}, \\ x < -1. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ:  $x \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$ .

$$9.165. 2^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} > 2,5.$$

Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Перепишем неравенство в виде  $2^{\log_{0,5} x \cdot \log_{0,5} x} + x^{\log_{0,5} x} - 2,5 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(2^{\log_{0,5} x}\right)^{\log_{0,5} x} + x^{\log_{0,5} x} - 2,5 > 0 \Leftrightarrow \left(2^{\log_2 \frac{1}{x}}\right)^{\log_{0,5} x} + x^{\log_{0,5} x} - 2,5 > 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^{\log_{0,5} x}} + x^{\log_{0,5} x} - 2,5 > 0. \text{ Так как } 0 < x^{\log_{0,5} x} \neq 1, \text{ то}$$

$$(x^{\log_{0,5} x})^2 - 2,5(x^{\log_{0,5} x}) + 1 > 0. \text{ Решая это неравенство как квадратное}$$

относительно  $x^{\log_{0,5} x}$ , получаем

$$\begin{cases} x^{\log_{0,5} x} > 2, \\ x^{\log_{0,5} x} < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Логарифмируя первое и второе неравенства совокупности по основанию 2, имеем

$$\begin{cases} \log_2 x^{\log_{0,5} x} > \log_2 2, \\ \log_2 x^{\log_{0,5} x} < \log_2 \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{0,5} x \log_2 x > 1, \\ \log_{0,5} x \log_2 x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\log_2^2 x > 1, \\ -\log_2^2 x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x < -1, \emptyset; \\ \log_2^2 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_2 x + 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x > 1, \\ \log_2 x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ 0 < x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ:  $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (2; \infty)$ .

9.166.  $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2$ .

Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Запишем данное неравенство в виде  $243 \cdot (3^{\lg x})^2 - 9 \cdot 3^{\lg x} - 2 > 0$ . Ре-

шив его как квадратное относительно  $3^{\lg x}$ , находим

$$\begin{cases} 3^{\lg x} > 3^{-2}, \\ 3^{\lg x} < -\frac{18}{243}, \emptyset. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x > -2, x > 0,01.$$

Ответ:  $x \in (0,01; \infty)$ .

$$9.167. \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \leq \frac{1-2x}{x^3+1}.$$

Решение.

ОДЗ:  $x \neq -1$ .

$$\text{Из условия имеем } \frac{x^2-x+1-2x-2}{x^3+1} \leq \frac{1-2x}{x^3+1},$$

$$\frac{x^2-3x-1}{x^3+1} - \frac{1-2x}{x^3+1} \leq 0, \quad \frac{x^2-3x-1-1+2x}{x^3+1} \leq 0, \quad \frac{x^2-x-2}{x^3+1} \leq 0,$$

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-x+1} \leq 0, \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \leq 0, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Ответ:  $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2]$ .

$$9.168. \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}.$$

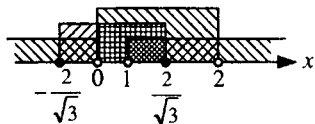
Решение.

Неравенство равносильно системе трех неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \geq 0, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2} > 0, \\ \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} < \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4-3x^2}{4x^2} \geq 0, \\ \frac{2-x}{2x} > 0, \\ \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq \frac{4}{3}, \\ x \neq 0, \\ (x-2)x < 0, \\ (x-1)x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ x \neq 0, \\ 0 < x < 2, \\ \begin{cases} x > 1, \\ x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

С помощью числовой прямой имеем  $x \in \left[1; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ .



Ответ:  $x \in \left[1; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ .

$$9.169. \frac{1}{x^2 - 4} + \frac{4}{2x^2 + 7x + 6} \leq \frac{1}{2x + 3} + \frac{4}{2x^3 + 3x^2 - 8x - 12}.$$

Решение.

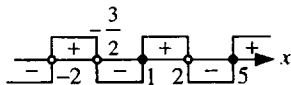
Перепишем неравенство в виде

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} + \frac{4}{(x+2)(2x+3)} - \frac{1}{2x+3} - \frac{4}{(2x+3)(x-2)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+3+4x-8-x^2+4-4}{(2x+3)(x-2)(x+2)} \leq 0, \quad \frac{x^2-6x+5}{(2x+3)(x-2)(x+2)} \geq 0,$$

$$\frac{(x-1)(x-5)}{(2x+3)(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-5)(2x+3)(x-2)(x+2) \geq 0, \\ x \neq -\frac{3}{2}, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем  $x \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right) \cup [1; 2) \cup [5; \infty)$ .



Ответ:  $x \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right) \cup [1; 2) \cup [5; \infty)$ .

$$9.170. \frac{10(5-x)}{3(x-4)} - \frac{11}{3} \cdot \frac{6-x}{x-4} \geq \frac{5(6-x)}{x-2}.$$

Решение.

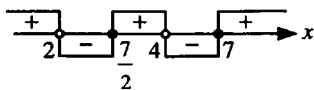
ОДЗ:  $x \neq 2, x \neq 4$ .

$$\text{Имеем } \frac{x-16}{3(x-4)} - \frac{5(6-x)}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-16)(x-2) - 15(6-x)(x-4)}{3(x-4)(x-2)} \geq 0,$$

$$\frac{x^2 - 34x + 76}{(x-4)(x-2)} \geq 0, \frac{\left(x - \frac{7}{2}\right)(x-7)}{(x-4)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{7}{2}\right)(x-7)(x-4)(x-2) \geq 0, \\ x \neq 4, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем  $x \in (-\infty; 2) \cup \left[\frac{7}{2}; 4\right) \cup [7; \infty)$ .



Ответ:  $x \in (-\infty; 2) \cup \left[\frac{7}{2}; 4\right) \cup [7; \infty)$ .

$$9.171. 0,6^{\lg^2(-x)+3} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{2\lg x^2}.$$

Решение.

ОДЗ:  $x < 0$ .

Так как  $\lg x^{2k} = 2k \lg|x|$ , то, учитывая ОДЗ, перепишем данное неравенство в виде

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{\lg^2(-x)+3} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{-4\lg(-x)} \Leftrightarrow \lg^2(-x)+3 \geq -4\lg(-x), \lg^2(-x)+4\lg(-x)+3 \geq 0.$$

Решив его как квадратное относительно  $\lg(-x)$ , получим

$$\begin{cases} \lg(-x) \geq -1, \\ \lg(-x) \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0,1, \\ -x \leq 0,001 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -0,1, \\ x \geq -0,001. \end{cases}$$

Ответ:  $x \in (-\infty; -0,1] \cup [-0,001; 0)$ .

9.172.  $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-9$ .

Решение.

Запишем неравенство в виде  $(x-3)\sqrt{x^2+4} - (x-3)(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\sqrt{x^2+4} - (x+3)\right) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \leq 0, \\ \sqrt{x^2+4} - (x+3) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0, \\ \sqrt{x^2+4} - (x+3) \leq 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ \sqrt{x^2+4} \geq x+3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x+3 \leq 0, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq -3, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq -3, \\ x \leq -\frac{5}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x^2+4 \geq x^2+6x+9; \\ x \geq 3, \\ x^2+4 \leq x^2+6x+9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq -\frac{5}{6}, \\ x \geq 3, \\ x \leq -\frac{5}{6}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3, \\ -3 \leq x \leq -\frac{5}{6}, \\ x \geq 3. \end{cases}$$

Ответ:  $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup [3; \infty)$ .

9.173.  $\left(\frac{3}{5}\right)^{13x^2} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{x^4+36} < \left(\frac{3}{5}\right)^{12x^2}$ .

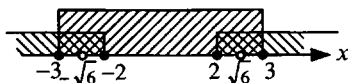
*Решение.*

Данное неравенство равносильно неравенству  $13x^2 \geq x^4 + 36 > 12x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 36 > 12x^2, \\ x^4 + 36 \leq 13x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 12x^2 + 36 > 0, \\ x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 6)^2 > 0, \\ 4 \leq x^2 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6 \neq 0, \\ x^2 \leq 9, \\ x^2 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm\sqrt{6}, \\ -3 \leq x \leq 3, \\ \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq -2. \end{cases} \end{cases}$$

Методом интервалов получаем  $x \in [-3; -\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{6}; -2] \cup [2; \sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; 3]$ .



*Ответ:*  $x \in [-3; -\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{6}; -2] \cup [2; \sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; 3]$ .

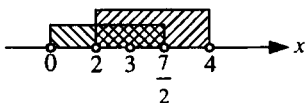
9.174.  $|x-3|^{2x^2-7x} > 1$ .

*Решение.*

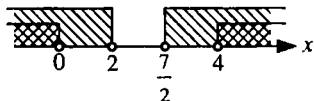
Перепишем неравенство в виде  $|x-3|^{2x^2-7x} > |x-3|^0$ . Оно равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} \begin{cases} 0 < |x-3| < 1, \\ 2x^2 - 7x < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} |x-3| > 1, \\ 2x^2 - 7x > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -1 < x-3 < 1, \\ x-3 \neq 0, \\ x(2x-7) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 > 1, \\ x-3 < -1, \\ x(2x-7) > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2 < x < 4, \\ x \neq 3, \\ 0 < x < \frac{7}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 4, \\ x < 2, \\ \begin{cases} x > \frac{7}{2}, \\ x < 0. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Решением первой системы неравенств будет  $(2; 3) \cup \left(3; \frac{7}{2}\right)$ .



Решением второй системы неравенств является  $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ .



Ответ:  $x \in (-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup \left(3; \frac{7}{2}\right) \cup (4; \infty)$ .

9.175.  $\log_{\frac{1}{5}} x + \log_4 x > 1$ .

Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Перейдем к основанию 4. Имеем  $\frac{\log_4 x}{\log_4 \frac{1}{5}} + \log_4 x > 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_4 x}{-\log_4 5} + \log_4 x > 1 \Leftrightarrow \log_4 x \cdot \left(\frac{1 - \log_4 5}{-\log_4 5}\right) > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x \cdot \left(\frac{\log_4 5 - 1}{\log_4 5}\right) > 1 \Leftrightarrow \log_4 x > \frac{\log_4 5}{\log_4 5 - 1}, \log_4 x > \frac{\log_4 5}{\log_4 \frac{5}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x > \log_5 5 \Leftrightarrow x > 4^{\frac{\log_5 5}{4}}.$$

$$\text{Далее } 4^{\frac{\log_5 5}{4}} = 4^{\frac{\log_5 \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}{4}} = 4^{\frac{-\log_5 0,2}{4}} = 4^{\frac{\log_4 0,2}{5}} = 4^{\log_{0,8} 0,2}.$$

Ответ:  $x \in \left(4^{\log_{0,8} 0,2}; \infty\right)$ .

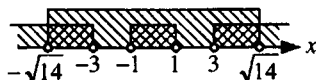
$$9.176. -9 < x^4 - 10x^2 < 56.$$

*Решение.*

Из условия получаем

$$\begin{cases} x^4 - 10x^2 + 9 > 0, \\ x^4 - 10x^2 - 56 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 9, \\ x^2 < 1, \\ -4 < x^2 < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x < -3, \\ -1 < x < 1, \\ -\sqrt{14} < x < \sqrt{14}. \end{cases}$$

Методом интервалов находим  $x \in (-\sqrt{14}; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; \sqrt{14})$ .



*Ответ:*  $x \in (-\sqrt{14}; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; \sqrt{14})$ .

$$9.177. 216x^6 + 19x^3 < 1.$$

*Решение.*

$216x^6 + 19x^3 - 1 < 0$ . Решаем неравенство как квадратное относительно

$$x^3, -\frac{1}{8} < x^3 < \frac{1}{27} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}.$$

*Ответ:*  $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ .

$$9.178. x^{0,5 \log_{0,5} x - 3} \geq 0,5^{3 - 2,5 \log_{0,5} x}.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $x > 0$ .

Логарифмируя обе части данного неравенства по основанию 0,5, получаем

$$\begin{aligned} \log_{0,5} x^{0,5 \log_{0,5} x - 3} &\leq \log_{0,5} 0,5^{3 - 2,5 \log_{0,5} x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (0,5 \log_{0,5} x - 3) \log_{0,5} x &\leq (3 - 2,5 \log_{0,5} x) \log_{0,5} 0,5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,5 \log_{0,5}^2 x - 3 \log_{0,5} x &\leq 3 - 2,5 \log_{0,5} x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,5 \log_{0,5}^2 x - 0,5 \log_{0,5} x - 3 &\leq 0. \end{aligned}$$

Решив это неравенство как квадратное относительно  $\log_{0,5} x$ , найдем

$$-2 \leq \log_{0,5} x \leq 3 \Leftrightarrow 0,125 \leq x \leq 4.$$

*Ответ:*  $x \in [0,125; 4]$ .



$$9.179. |x-6| > |x^2 - 5x + 9|.$$

*Решение.*

Так как  $x^2 - 5x + 9 > 0$  при  $x \in R$ , то данное неравенство имеет вид  $|x-6| > x^2 - 5x + 9$ . Оно равносильно двум неравенствам

$$1) x-6 > x^2 - 5x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 15 < 0, \emptyset;$$

$$2) x-6 < -x^2 + 5x - 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

*Ответ:*  $x \in (1; 3)$ .

$$9.180. \frac{6x}{x-2} - \sqrt{\frac{12x}{x-2}} - 2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} > 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \frac{x}{x-2} \geq 0; x \neq 2.$$

Пусть  $\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} = y \geq 0$ . Относительно  $y$  неравенство имеет вид

$$\frac{y^4}{2} - y^2 - 2y > 0 \Leftrightarrow y(y^3 - 2y - 4) > 0 \Leftrightarrow y(y-2)(y^2 + 2y + 2) > 0.$$

Так как  $y^2 + 2y + 2 > 0$  при  $y \in R$ , то получаем неравенство  $y(y-2) > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y > 2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} > 2, \frac{12x}{x-2} > 16, \frac{3x}{x-2} - 4 > 0, \frac{3x-4+8}{x-2} > 0,$$

$$\frac{-x+8}{x-2} > 0, \frac{x-8}{x-2} < 0, (x-8)(x-2) < 0, 2 < x < 8.$$

*Ответ:*  $x \in (2; 8)$ .

$$9.181. \log_{0,3} \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} < 0.$$

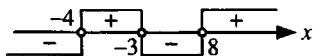
*Решение.*

Исходное неравенство равносильно неравенству  $\log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4} > 6 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4} - 6 > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-6x-24}{x+4} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x - 24}{x+4} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-8)}{x+4} > 0, (x+3)(x-8)(x+4) > 0.$$

Методом интервалов получаем  $x \in (-4; -3) \cup (8; \infty)$ .



Ответ:  $x \in (-4; -3) \cup (8; \infty)$ .

**9.182.**  $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$ .

*Решение.*

Исходное неравенство равносильно следующим системам неравенств:

$$1) \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x > 6, \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2};$$

$$2) \begin{cases} 2x > 1, \\ x^2 - 5x + 6 < 2x, \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 < 0, \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ 1 < x < 6, \\ \begin{cases} x > 3, \\ x < 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ 3 < x < 6. \end{cases}$$

Ответ:  $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$ .

**9.183.**  $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$ .

*Решение.*

Исходное неравенство равносильно неравенству  $0 < \log_2 \log_{x-1} 9 < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 < \log_{x-1} 9 < 2$ . Получаем две системы неравенств:

$$1) \begin{cases} 0 < x-1 < 1, \\ (x-1)^2 < 9 < x-1, \end{cases} \quad \emptyset;$$

$$2) \begin{cases} x-1 > 1, \\ x-1 < 9 < (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x < 10, \\ \begin{cases} x-1 > 3, \\ x-1 < -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 10, \\ \begin{cases} x > 4, \\ x < -2. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ:  $x \in (4; 10)$ .

$$9.184. \log_{0,25} \left| \frac{2x+1}{x+3} + \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2}.$$

Решение.

Данное неравенство равносильно неравенству

$$0 < \left| \frac{2x+1}{x+3} + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}, \quad 0 < \left| \frac{4x+2+x+3}{2(x+3)} \right| < \frac{1}{2}, \quad 0 < \left| \frac{5x+5}{2(x+3)} \right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x+5}{2(x+3)} \neq 0, \\ \frac{5x+5}{2(x+3)} < \frac{1}{2}, \\ \frac{5x+5}{2(x+3)} > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq -3, \\ \frac{2x+1}{x+3} < 0, \\ \frac{3x+4}{x+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq -3, \\ -3 < x < -\frac{1}{2}, \\ \begin{cases} x > -\frac{4}{3}, \\ x < -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right).$$

$$9.185. x^2(x^4+36) - 6\sqrt{3}(x^4+4) < 0.$$

Решение.

$$\text{Имеем } x^6 - 6\sqrt{3}x^4 + 36x^2 - 24\sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2\sqrt{3})^3 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow x^2 < 2\sqrt{3}. \text{ Отсюда } -\sqrt{2\sqrt{3}} < x < \sqrt{2\sqrt{3}},$$

$$-\sqrt[4]{12} < x < \sqrt[4]{12}.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\sqrt[4]{12}; \sqrt[4]{12}\right).$$

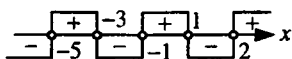
$$9.186. \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + 3x - 10} < 0.$$

*Решение.*

Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{(x^3 - x) + (3x^2 - 3)}{(x+5)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1)}{(x+5)(x-2)} < 0, \frac{(x^2 - 1)(x+3)}{(x+5)(x-2)} < 0,$$

$$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)(x-2) < 0. \quad x \in (-\infty; -5) \cup (-3; -1) \cup (1; 2).$$



$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -5) \cup (-3; -1) \cup (1; 2).$$

$$9.187. 2 \log_{\log_3 x} 3 < 1.$$

*Решение.*

Перепишем неравенство в виде  $\log_{\log_3 x} 9 < 1$ . Оно равносильно двум системам неравенств:

$$1) \begin{cases} 0 < \log_3 x < 1, \\ 9 > \log_3 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3, \\ x < 3^9 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3;$$

$$2) \begin{cases} \log_3 x > 1, \\ 9 < \log_3 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x > 3^9 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3^9.$$

$$\text{Ответ: } x \in (1; 3) \cup (3^9; \infty).$$

$$9.188. \sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x+4} > 0.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x-2 \geq 0, \\ 2x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Запишем данное неравенство в виде  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2} > \sqrt{2x+4}$  и возведем обе его части в квадрат. Имеем

$$\begin{aligned} x+3 + 2\sqrt{(x+3)(x-2)} + x-2 > 2x+4 &\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(x-2)} > 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4(x+3)(x-2) > 9, 4x^2 + 4x - 33 > 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x > \frac{-1 + \sqrt{34}}{2}, \\ x < \frac{-1 - \sqrt{34}}{2}. \end{cases} \text{ С учетом ОДЗ имеем } x > \frac{-1 + \sqrt{34}}{2}.$$

Ответ:  $x \in \left( \frac{-1 + \sqrt{34}}{2}; \infty \right)$ .

9.189.  $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 > 1$ .

Решение.

ОДЗ:  $0 < x \neq 1$ .

Перейдем к основанию 5, тогда  $\frac{\log_5 \sqrt{3x+4}}{\log_5 x} > 1$ . Отсюда имеем

$\log_x \sqrt{3x+4} > 1$ . Последнее неравенство равносильно двум системам неравенств:

$$1) \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \sqrt{3x+4} < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < 3x+4 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 - 3x - 4 > 0, \end{cases} \quad \emptyset;$$

$$2) \begin{cases} x > 1, \\ \sqrt{3x+4} > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 3x+4 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ (x-4)(x+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

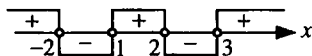
Ответ:  $x \in (1; 4)$ .

9.190.  $\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 2} > 0$ .

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде  $\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{x-2} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-3)(x-2) > 0$ . Методом интервалов получаем  $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$ .



Ответ:  $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$ .

$$9.191. 2 \cos x (\cos x - \sqrt{8} \operatorname{tg} x) < 5.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \cos x \neq 0.$$

Перепишем неравенство в виде  $2 \cos x \left( \cos x - \sqrt{8} \frac{\sin x}{\cos x} \right) - 5 < 0$ . Име-

$$\text{ем } \begin{cases} 2 \cos^2 x - 2\sqrt{8} \sin x - 5 < 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin^2 x + 2\sqrt{8} \sin x + 3 > 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x < -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \emptyset, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{Отсюда } x \in \left( 2\pi n - \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \cup \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left( 2\pi n - \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \cup \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$9.192. \sqrt{x^3 + 3x + 4} > -2.$$

*Решение.*

Решениями данного неравенства являются значения неизвестного,

принадлежащие ОДЗ:  $x^3 + 3x + 4 \geq 0$ ,  $(x+1)(x^2 - x + 4) \geq 0$ . Здесь

$x^2 - x + 4 > 0$  при  $x \in \mathbb{R}$ . Тогда  $x+1 \geq 0$ ,  $x \geq -1$ .

$$\text{Ответ: } x \in [-1; \infty).$$

$$9.193. \log_2^2(x-1)^2 - \log_{0,5}(x-1) > 5.$$

*Решение.*

Запишем данное неравенство в виде  $4 \log_2^2(x-1) + \log_2(x-1) - 5 > 0$ .

Решив его как квадратное относительно  $\log_2(x-1)$ , имеем

$$\left[ \begin{array}{l} \log_2(x-1) > 1, \\ \log_2(x-1) < -\frac{5}{4} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x-1 > 2, \\ 0 < x-1 < \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x > 3, \\ 1 < x < \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} + 1. \end{array} \right]$$

Ответ:  $x \in \left(1; \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} + 1\right) \cup (3; \infty)$ .

9.194.  $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$ .

Решение.

Запишем данное неравенство в виде  $(25 \cdot 2^x - 25) - (10^x - 5^x) > 0$ ,

$$25(2^x - 1) - 5^x(2^x - 1) > 0, (2^x - 1)(25 - 5^x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2^x - 1 > 0, \\ 25 - 5^x > 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2^x > 2^0, \\ 5^x < 5^2; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0, \\ x < 2; \end{array} \right. \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2^x - 1 < 0, \\ 25 - 5^x < 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2^x < 2^0, \\ 5^x > 5^2; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ x > 2; \end{array} \right. \Leftrightarrow \emptyset;$$

Ответ:  $x \in (0; 2)$ .

9.195.  $\log_3 \log_{x^2} \log_{x^2} x^4 > 0$ .

Решение.

Данное неравенство равносильно неравенству  $\log_{x^2} \log_{x^2} (x^2)^2 > 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_{x^2} 2 \log_{x^2} x^2 > 1, \log_{x^2} 2 > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < x^2 < 1, \\ x^2 > 2; \\ x^2 > 1, \\ x^2 < 2; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 < x < 1, \\ x \neq 0, \\ \left[ \begin{array}{l} x > \sqrt{2}, \\ x < -\sqrt{2}, \end{array} \right. \emptyset; \\ \left[ \begin{array}{l} x > 1, \\ x < -1, \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}; \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} -\sqrt{2} < x < -1, \\ 1 < x < \sqrt{2}. \end{array} \right.$$

Ответ:  $x \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$ .

$$9.196. 0,5^{2\sqrt{x}} + 2 > 3 \cdot 0,5^{\sqrt{x}}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x \geq 0.$$

Запишем данное неравенство в виде  $0,5^{2\sqrt{x}} - 3 \cdot 0,5^{\sqrt{x}} + 2 > 0$  и решим его как квадратное относительно  $0,5^{\sqrt{x}}$ . Получим  $\begin{cases} 0,5^{\sqrt{x}} > 2, \\ 0,5^{\sqrt{x}} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,5^{\sqrt{x}} > 0,5^{-1}, \\ 0,5^{\sqrt{x}} < 0,5^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < -1, \emptyset; \\ \sqrt{x} > 0. \end{cases} \text{ Отсюда } x > 0.$$

Ответ:  $x \in (0; \infty)$ .

$$9.197. x^2(x + 3\sqrt{5}) + 5(3x + \sqrt{5}) > 0.$$

Решение.

Из условия

$$x^3 + 3\sqrt{5}x^2 + 15x + 5\sqrt{5} > 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{5})^3 > 0, x + \sqrt{5} > 0, x > -\sqrt{5}.$$

Ответ:  $x \in (-\sqrt{5}; \infty)$ .

$$9.198. 9^{\log_2(x-1)-1} - 8 \cdot 5^{\log_2(x-1)-2} > 9^{\log_2(x-1)} - 16 \cdot 5^{\log_2(x-1)-1}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x > 1.$$

$$\text{Имеем } \frac{9^{\log_2(x-1)}}{9} - \frac{8 \cdot 5^{\log_2(x-1)}}{25} > 9^{\log_2(x-1)} - \frac{16 \cdot 5^{\log_2(x-1)}}{5},$$

$$\frac{9^{\log_2(x-1)}}{9} - 9^{\log_2(x-1)} > \frac{8 \cdot 5^{\log_2(x-1)}}{25} - \frac{16 \cdot 5^{\log_2(x-1)}}{5},$$

$$-\frac{8}{9} \cdot 9^{\log_2(x-1)} > -\frac{72}{25} \cdot 5^{\log_2(x-1)}, \frac{1}{9} \cdot 9^{\log_2(x-1)} < \frac{9}{25} \cdot 5^{\log_2(x-1)},$$

$$\frac{9^{\log_2(x-1)}}{9^2} < \frac{5^{\log_2(x-1)}}{5^2} \Leftrightarrow \frac{9^{\log_2(x-1)}}{5^{\log_2(x-1)}} < \frac{9^2}{5^2}, \left(\frac{9}{5}\right)^{\log_2(x-1)} < \left(\frac{9}{5}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1) < 2, 0 < x-1 < 4, 1 < x < 5.$$

Ответ:  $x \in (1; 5)$ .



$$9.199. \frac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)} > \frac{1}{2}.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sqrt{4x+5}-1 > 0, \\ \sqrt{4x+5}+11 > 0, \\ \log_2(\sqrt{4x+5}+11) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x+5} > 1, \\ \sqrt{4x+5} > -11, \\ \sqrt{4x+5}+11 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x+5} > 1, 4x+5 > 1, x > -1.$$

Из условия имеем

$$\log_{\sqrt{4x+5}+11}(\sqrt{4x+5}-1) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{4x+5}+11}(\sqrt{4x+5}-1) > \log_{\sqrt{4x+5}+11}(\sqrt{\sqrt{4x+5}+11}).$$

Для  $x > -1$  очевидно, что  $\sqrt{4x+5}+11 > 1$ , поэтому получаем

$$\begin{cases} \sqrt{4x+5}+11 > 1, \\ \sqrt{4x+5}-1 > \sqrt{\sqrt{4x+5}+11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ \sqrt{4x+5}-1 > \sqrt{\sqrt{4x+5}+11}. \end{cases}$$

Так как обе части последнего неравенства неотрицательны, то, возведя их в квадрат, имеем

$$\begin{cases} x > -1, \\ (\sqrt{4x+5})^2 - 2\sqrt{4x+5} + 1 > \sqrt{4x+5} + 11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ (\sqrt{4x+5})^2 - 3\sqrt{4x+5} - 10 > 0. \end{cases}$$

Решая второе неравенство этой системы как квадратное относительно  $\sqrt{4x+5}$ , находим  $\sqrt{4x+5} < -2, \emptyset; \sqrt{4x+5} > 5$ , откуда  $x > 5$ .

Ответ:  $x \in (5; \infty)$ .

$$9.200. \frac{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}-1)}{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}+5)} < \frac{1}{2}.$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+3 \geq 0, \\ \sqrt{x+3} > 1, \end{cases} \Leftrightarrow x > -2.$$

Для  $x > -2$ ,  $\sqrt{x+3} + 5 > 1$ , следовательно,  $\log_{0,5}(\sqrt{x+3} + 5) < 0$ , поэтому из условия получаем  $2 \log_{0,5}(\sqrt{x+3} - 1) > \log_{0,5}(\sqrt{x+3} + 5) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ (\sqrt{x+3} - 1)^2 < \sqrt{x+3} + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ (\sqrt{x+3})^2 - 3\sqrt{x+3} - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} > 1, \\ -1 < \sqrt{x+3} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x+3} < 4 \Leftrightarrow 1 < x+3 < 16 \Leftrightarrow -2 < x < 13.$$

*Ответ:*  $x \in (-2; 13)$ .

$$9.201. \frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $1 < x \neq 2$ .

Рассмотрим два случая:

1)  $1 < x < 2$ , тогда  $\log_2(x-1) < 0$ ,  $\log_2 \sqrt{x+1} > 0$  и неравенство принимает вид  $\log_2 \sqrt{x+1} > \log_2(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} > x-1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x+1 > x^2 - 2x+1 \Leftrightarrow x^2 - 3x < 0, x(x-3) < 0, \text{отсюда } x \in (1; 2);$$

2)  $x > 2$ , тогда  $\log_2(x-1) > 0$ ,  $\log_2 \sqrt{x+1} > 0$  и неравенство имеет вид  $\log_2 \sqrt{x+1} < \log_2(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < x-1, x^2 - 3x > 0, x(x-3) > 0$ , отсюда  $x \in (3; +\infty)$ .

В ответ записываем объединение обоих интервалов.

*Ответ:*  $x \in (1; 2) \cup (3; +\infty)$ .

$$9.202. x^{\log_2 x} + 16x^{-\log_2 x} < 17.$$

*Решение.*

ОДЗ:  $0 < x \neq 1$ .

Перепишем данное неравенство в виде  $x^{\log_2 x} + \frac{16}{x^{\log_2 x}} - 17 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^{2 \log_2 x} - 17x^{\log_2 x} + 16 < 0$ . Решив это неравенство как квадратное относительно  $x^{\log_2 x}$ , получим  $1 < x^{\log_2 x} < 16$ . Прологарифмировав по основанию 2, имеем неравенство  $0 < \log_2^2 x < 4$ , которое равносильно

$$\text{системе неравенств } \begin{cases} -2 < \log_2 x < 2, \\ \log_2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} < x < 4, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

*Ответ:*  $x \in \left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 4)$ .

**9.203.**  $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < 10$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $x > 0$ .

Перепишем неравенство в виде

$$5^{\log_5 x \log_5 x} + x^{\log_5 x} < 10 \Leftrightarrow x^{\log_5 x} + x^{\log_5 x} < 10 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2x^{\log_5 x} < 10, x^{\log_5 x} < 5$ . Логарифмируя обе части этого неравенства по основанию 5, получаем  $\log_5 x \log_5 x < \log_5 5, \log_5^2 x < 1, -1 < \log_5 x < 1, \frac{1}{5} < x < 5$ .

*Ответ:*  $x \in \left(\frac{1}{5}; 5\right)$ .

**9.204.**  $\log_3 (\log_2 (2 - \log_4 x) - 1) < 1$ .

*Решение.*

Данное неравенство равносильно двойному неравенству

$$0 < \log_2 (2 - \log_4 x) - 1 < 3 \Leftrightarrow 1 < \log_2 (2 - \log_4 x) < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 < 2 - \log_4 x < 16, 0 < -\log_4 x < 14 \Leftrightarrow -14 < \log_4 x < 0,$$

$$\frac{1}{4^{14}} < x < 1, 2^{-28} < x < 1.$$

*Ответ:*  $x \in (2^{-28}; 1)$ .

$$9.205. (x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7 < 0.$$

*Решение.*

Перепишем данное неравенство в виде

$$(x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 10) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 10)(x^2 + 4x + 10 - 7) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 10)(x^2 + 4x + 3) < 0. \text{ Так как } x^2 + 4x + 10 > 0 \text{ при } x \in R,$$

то полученное неравенство равносильно неравенству  $x^2 + 4x + 3 < 0$ . Отсюда  $-3 < x < -1$ .

*Ответ:*  $x \in (-3; -1)$ .

$$9.206. \text{ Расположить в порядке возрастания три числа } a_1 = \log_{\frac{1}{2}} \sin 2x,$$

$$a_2 = -1 - \log_2 \sin x, a_3 = \log_{\frac{1}{2}} (1 - \cos 2x), \text{ если } 0 < x < \frac{\pi}{4}.$$

*Решение.*

Перепишем  $a_1, a_2, a_3$  в виде

$$a_1 = -\log_2 2 \sin x \cos x = -1 - \log_2 \sin x - \log_2 \cos x,$$

$$a_2 = -1 - \log_2 \sin x,$$

$$a_3 = -\log_2 2 \sin^2 x = -1 - 2 \log_2 \sin x.$$

При  $0 < x < \frac{\pi}{4}$   $\log_2 \sin x < 0$ ,  $\log_2 \cos x < 0$ , следовательно, разме-

щение в порядке возрастания данных чисел будет  $a_2, a_1, a_3$ .

*Ответ:*  $a_2, a_1, a_3$ .

Решить системы неравенств (9.207 — 9.214):

$$9.207. \begin{cases} 0,2^{\cos x} \leq 1, \\ \frac{x-1}{2-x} + \frac{1}{2} > 0. \end{cases}$$

*Решение.*

ОДЗ:  $x \neq 2$ .

Перепишем данную систему неравенств в виде

$$\begin{cases} 0,2^{\cos x} \leq 0,2^0, \\ \frac{2x-2+2-x}{2(2-x)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 0, \\ x(x-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ 0 < x < 2. \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}. \text{ Отсюда имеем } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ответ:  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

9.208.  $\sqrt{x^2 - 9x + 20} \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x^2 - 13}$ .

Решение.

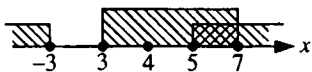
$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 9x + 20 \geq 0, \\ x - 1 \geq 0, \\ x^2 - 13 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{13} \leq x \leq 4, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 9x + 20} \leq \sqrt{x-1}, \\ \sqrt{x^2 - 13} \geq \sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 20 \leq x-1, \\ x^2 - 13 \geq x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 21 \leq 0, \\ x^2 - x - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 7, \\ x \geq 4, \\ x \leq -3. \end{cases}$$

Методом интервалов имеем (с учетом ОДЗ)  $\begin{cases} x = 4, \\ 5 \leq x \leq 7. \end{cases}$



Ответ:  $x \in [5; 7] \cup 4$ .

$$9.209. \begin{cases} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 16x + 64} > 0, \\ \lg \sqrt{x+7} > \lg(x-5) - 2 \lg 2. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ:  $x > 5$ ,  $x \neq 8$ .

Данная система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 4}{(x-8)^2} > 0, \\ \lg \sqrt{x+7} > \lg \frac{x-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 8, \\ \sqrt{x+7} > \frac{x-5}{4}, \\ x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 8, \\ x+7 > \frac{(x-5)^2}{16}, \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 8, \\ x^2 - 26x - 87 < 0, \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 8, \\ -3 < x < 29, \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 8, \\ 5 < x < 29. \end{cases}$$

Ответ:  $x \in (5; 8) \cup (8; 29)$ .

$$9.210. \frac{5x-7}{x-5} < 4 - \frac{x}{5-x} + \frac{3x}{x^2-25} < 4.$$

Решение.

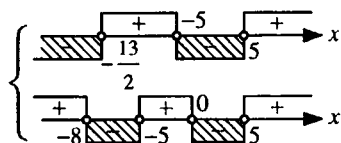
ОДЗ:  $x \neq \pm 5$ .

Перепишем неравенство в виде системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{5x-7}{x-5} < 4 - \frac{x}{5-x} + \frac{3x}{x^2-25}, \\ 4 - \frac{x}{5-x} + \frac{3x}{x^2-25} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x-7}{x-5} - 4 - \frac{x}{x-5} - \frac{3x}{x^2-25} < 0, \\ \frac{3x}{(x-5)(x+5)} + \frac{x}{x-5} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+13}{(x-5)(x+5)} < 0, \\ \frac{x^2+8x}{(x-5)(x+5)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+13)(x-5)(x+5) < 0, \\ x(x+8)(x-5)(x+5) < 0. \end{cases}$$

Полученную систему будем решать методом интервалов



Общими решениями двух неравенств системы будут  $x \in \left(-8; -\frac{13}{2}\right) \cup (0; 5)$ .

Ответ:  $x \in \left(-8; -\frac{13}{2}\right) \cup (0; 5)$ .

9.211. 
$$\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ:  $\frac{7}{4} \leq x \leq 5$ .

Из условия имеем

$$\begin{cases} 4x-7 \geq 0, \\ x > 0, \\ 4x-7 < x^2, \\ x+5 \geq 0, \\ 5-x \geq 0, \\ x+5+2\sqrt{25-x^2}+5-x > 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{4}, \\ x > 0, \\ x^2 - 4x + 7 > 0, \\ x \geq -5, \\ x \leq 5, \\ \sqrt{25-x^2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{4} \leq x \leq 5, \\ 25-x^2 > 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{4} \leq x \leq 5, \\ x^2 < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{4} \leq x \leq 5, \\ -4 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{4} \leq x < 4.$$

Ответ:  $x \in \left[\frac{7}{4}; 4\right)$ .

$$9.212. \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64}, \\ 2^{x^2 - 6x - 3,5} < 8\sqrt{2}. \end{cases}$$

*Решение.*

Перепишем данную систему неравенств в виде

$$\begin{cases} \frac{2^{x-3x}}{3^{x-2x}} > \frac{27}{64}, \\ 2^{x^2 - 6x - 3,5} < 2^{3,5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^x > \left(\frac{3}{4}\right)^3, \\ x^2 - 6x - 3,5 < 3,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 6x - 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ -1 < x < 7. \end{cases}$$

*Ответ:*  $x \in (-1; 3)$ .

$$9.213. \begin{cases} |x^2 + 5x| < 6, \\ |x + 1| \leq 1. \end{cases}$$

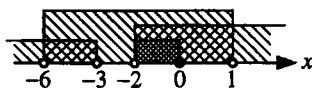
*Решение.*

Система равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} -6 < x^2 + 5x < 6, \\ -1 \leq x + 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x < 6, \\ x^2 + 5x > -6, \\ x + 1 \leq 1, \\ x + 1 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 6 < 0, \\ x^2 + 5x + 6 > 0, \\ x \leq 0, \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x < 1, \\ x > -2, \\ x < -3, \\ -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем  $x \in (-2; 0]$ .



*Ответ:*  $x \in (-2; 0]$ .



$$9.214. \begin{cases} |x^2 - 4x| < 5, \\ |x + 1| < 3. \end{cases}$$

*Решение.*

Система неравенств равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4x < 5, \\ x^2 - 4x > -5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ x^2 - 4x + 5 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 5, \\ x \in \mathbb{R}, \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2.$$

$$\begin{cases} -3 < x + 1 < 3 \\ -4 < x < 2 \end{cases}$$

*Ответ:*  $x \in (-1; 2)$ .

**9.215.** Найти область определения функции

$$y = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11}} + \frac{2}{x^2 - 49}.$$

*Решение.*

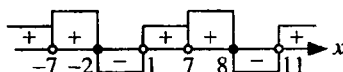
Областью определения данной функции являются все значения  $x$ , удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11} \geq 0, \\ x^2 - 49 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-8)(x+2)}{(x-1)(x-11)} \geq 0, \\ x^2 \neq 49 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-8)(x+2)(x-1)(x-11) \geq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 11, \\ x \neq \pm 7. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем

$$x \in (-\infty; -7) \cup (-7; -2] \cup (1; 7) \cup (7; 8] \cup (11; \infty).$$



*Ответ:*  $x \in (-\infty; -7) \cup (-7; -2] \cup (1; 7) \cup (7; 8] \cup (11; \infty)$ .

## ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Произвольный треугольник ( $a, b, c$  — стороны;  $\alpha, \beta, \gamma$  — противолежащие им углы;  $p$  — полупериметр;  $R$  — радиус описанной окружности;  $r$  — радиус вписанной окружности;  $S$  — площадь;  $h_a$  — высота, проведенная к стороне  $a$ ):

$$S = \frac{1}{2} ah_a; \quad (10.1)$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha; \quad (10.2)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \quad (10.3)$$

$$r = \frac{S}{p}; \quad (10.4)$$

$$R = \frac{abc}{4S}; \quad (10.5)$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}; \quad (10.6)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \text{ (теорема косинусов);} \quad (10.7)$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \text{ (теорема синусов).} \quad (10.8)$$

2. Прямоугольный треугольник ( $a, b$  — катеты;  $c$  — гипотенуза;  $a_c, b_c$  — проекции катетов на гипотенузу):

$$S = \frac{1}{2} ab; \quad (10.9)$$

$$S = \frac{1}{2} ch_c; \quad (10.10)$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}; \quad (10.11)$$

$$R = \frac{c}{2}; \quad (10.12)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (теорема Пифагора);} \quad (10.13)$$

$$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}; \quad (10.14)$$

$$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}; \quad (10.15)$$

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}; \quad (10.16)$$

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta. \quad (10.17)$$

3. Равносторонний треугольник:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; \quad (10.18)$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad (10.19)$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \quad (10.20)$$

4. Произвольный выпуклый четырехугольник ( $d_1$  и  $d_2$  — диагонали;  $\varphi$  — угол между ними;  $S$  — площадь):

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi. \quad (10.21)$$

5. Параллелограмм ( $a$  и  $b$  — смежные стороны;  $\alpha$  — угол между ними;  $h_a$  — высота, проведенная к стороне  $a$ ):

$$S = ah_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi. \quad (10.22)$$

6. Ромб:

$$S = ah_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2. \quad (10.23)$$

7. Прямоугольник:

$$S = ab = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi. \quad (10.24)$$

8. Квадрат ( $d$  — диагональ):

$$S = a^2 = d^2 / 2. \quad (10.25)$$

9. Трапеция ( $a$  и  $b$  — основания;  $h$  — расстояние между ними;  $l$  — средняя линия):

$$l = \frac{a+b}{2}; \quad (10.26)$$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = lh. \quad (10.27)$$

10. Описанный многоугольник ( $p$  — полупериметр;  $r$  — радиус вписанной окружности):

$$S = pr. \quad (10.28)$$

11. Правильный многоугольник ( $a_n$  — сторона правильного  $n$ -угольника;  $R$  — радиус описанной окружности;  $r$  — радиус вписанной окружности):

$$a_3 = R\sqrt{3}; \quad a_4 = R\sqrt{2}; \quad a_6 = R; \quad (10.29)$$

$$S = \frac{na_n r}{2}. \quad (10.30)$$

12. Окружность, круг ( $r$  — радиус;  $C$  — длина окружности;  $S$  — площадь круга):

$$C = 2\pi r; \quad (10.31)$$

$$S = \pi r^2. \quad (10.32)$$

13. Сектор ( $l$  — длина дуги, ограничивающей сектор;  $n^\circ$  — градусная мера центрального угла;  $\alpha$  — радианная мера центрального угла):

$$l = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ} = r\alpha; \quad (10.33)$$

$$S = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} r^2 \alpha. \quad (10.34)$$

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

1. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

2. Длина медианы треугольника выражается формулой

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2},$$

где  $a, b, c$  — длины сторон треугольника.

3. Длина стороны треугольника выражается формулой

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2},$$

где  $m_a, m_b, m_c$  — длины медиан треугольника.

4. Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам.

5. Длина биссектрисы треугольника выражается формулой

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1},$$

где  $a$  и  $b$  — длины двух сторон треугольника  $ABC$ ;  $a_1$  и  $b_1$  — отрезки третьей стороны.

6. Длина биссектрисы треугольника выражается через длины его сторон  $a, b$  и  $c$  по формуле

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

7. Для всякого треугольника зависимость между его высотами  $h_a, h_b, h_c$  и радиусом  $r$  вписанной окружности выражается формулой

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

8. Площадь  $S$  равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты, т.е.  $S = h^2$ .

9. Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим ее оснований.

Доказательство всех этих дополнительных соотношений можно найти в любом издании данного сборника задач последних лет.

**10.191.** Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов ее боковой стороны на расстояния 3 и 9 см. Найдите стороны трапеции.

*Решение.*

По условию  $OC = 3$  см,  $OD = 9$  см (см. рис. 10.1). Пусть  $N, P, M, E$  — точки касания окружности со сторонами трапеции  $BC, CD, AD, AB$  соответственно. По свойству касательных:

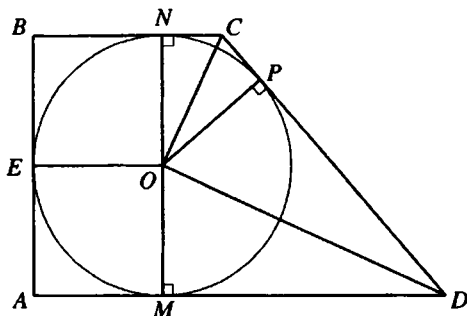


Рис. 10.1

1)  $ON \perp BC, OP \perp CD, OM \perp AD$ .

2)  $\angle NCO = \angle PCO, \angle MDO = \angle PDO$ .

Тогда  $\angle OCD + \angle ODC = \frac{1}{2}(\angle BCD + \angle ADC) = 90^\circ \Rightarrow \triangle COD$  — прямоугольный, откуда  $CD = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}$  см. Пусть  $r$  — радиус вписанной окружности.  $S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}CD \cdot OK = \frac{1}{2}OC \cdot OD$  или  $3 \cdot \sqrt{10} \cdot r = 3 \cdot 9$ ,  $r = \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{10}$ . Из  $\triangle CPO$ :

$$CP = \sqrt{OC^2 - OP^2} = \sqrt{3^2 - \frac{9^2}{10}} = 3\sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10};$$

$$PD = CD - CP = 3\sqrt{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10} = 3\sqrt{10} \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{27\sqrt{10}}{10}.$$

По свойству касательной  $MD = PD, NC = CP$ . Очевидно  $BNOE$  — квадрат, поэтому

$$BE = BN = r = \frac{9\sqrt{10}}{10}, AB = 2r = \frac{9\sqrt{10}}{5} \text{ см};$$

$$BC = BN + CN = \frac{9\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{6\sqrt{10}}{5} \text{ см};$$

$$AD = AN + ND = \frac{9\sqrt{10}}{10} + \frac{27\sqrt{10}}{10} = \frac{18\sqrt{10}}{5} \text{ см}.$$

Ответ:  $\frac{9\sqrt{10}}{5}, \frac{6\sqrt{10}}{5}, 3\sqrt{10}, \frac{18\sqrt{10}}{5}$  см.

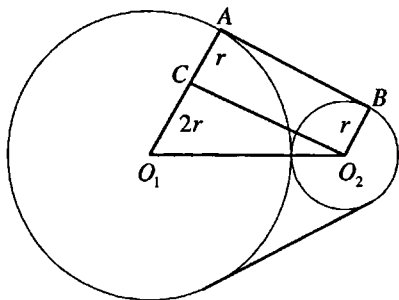


Рис. 10.2

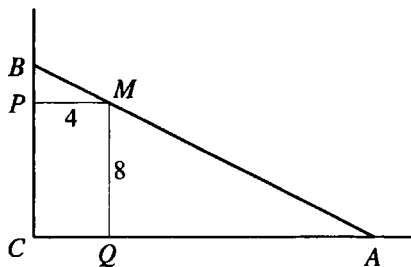


Рис. 10.3

**10.192.** Две окружности касаются внешним образом. Их радиусы относятся как 3:1, а длина их общей внешней касательной равна  $6\sqrt{3}$ . Определить периметр фигуры, образованной внешними касательными и внешними частями окружностей.

*Решение.*

Пусть  $O_2B = r$ ; тогда  $O_1A = R = 3r$  (рис. 10.2). Проведем  $O_2C \parallel AB$ ; имеем  $AC = r$ ,  $O_1C = 2r$ ,  $O_1O_2 = 4r$ , т.е.  $O_1O_2 = 2O_1C$  и, значит,  $\angle CO_2O_1 = 30^\circ$ . Так как  $O_2C = AB = 6\sqrt{3}$ , то из  $\Delta O_1CO_2$  находим  $O_1O_2 = O_2C : \cos 30^\circ = 6\sqrt{3} : (\sqrt{3}/2) = 12$ , откуда  $r = 3$ ,  $R = 9$ . Дуги, входящие в указанную фигуру, содержат соответственно  $120^\circ$  и  $240^\circ$ , поэтому их длины равны  $\frac{2\pi r}{3}$  и  $\frac{4\pi r}{3}$ . Искомый периметр составляет

$$P = 2 \cdot 6\sqrt{3} + \frac{2\pi r}{3} + \frac{4\pi r}{3} = 12\sqrt{3} + 14\pi.$$

*Ответ:*  $14\pi + 12\sqrt{3}$ .

**10.193.** Внутри прямого угла дана точка  $M$ , расстояния от которой до сторон угла равны 4 и 8 см. Прямая, проходящая через точку  $M$ , отсекает от прямого угла треугольник площадью  $100 \text{ см}^2$ . Найти катеты треугольника.

*Решение.*

По условию  $\angle C = 90^\circ$ ,  $MP = 4$  см,  $MQ = 8$  см,  $S_{\Delta ABC} = 100 \text{ см}^2$  (рис. 10.3); найдем  $BC$  и  $AC$ . Пусть  $BC = x$ ,  $AC = y$ ; тогда  $0,5xy = 100$ , т.е.  $xy = 200$ . Так как  $\Delta BPM \sim \Delta MQA$ , то  $\frac{MP}{AQ} = \frac{BP}{MQ}$  или  $\frac{4}{y-4} = \frac{x-8}{8}$ .

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{4}{y-4} = \frac{x-8}{8}, \\ xy = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 50, \\ xy = 200 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 25y + 100 = 0, \quad y_1 = 5 \text{ см},$$

$y_2 = 20$  см. Получаем два решения:  $x_1 = 40$  см,  $y_1 = 5$  см;  $x_2 = 10$  см,  $y_2 = 20$  см.

*Ответ:* 40 и 5 см или 10 и 20 см.

**10.194.** Точка  $C_1$  — середина стороны  $AB$  треугольника  $ABC$ ; угол  $COC_1$ , где  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника, является прямым. Доказать, что  $|\angle B - \angle A| = 90^\circ$ .

*Решение.*

Обозначим  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$ .

Пусть для определенности  $\beta > \alpha$  (рис. 10.4).

$\angle CAB$  вписан в окружность с центром в точке  $O$  и опирается на ту же дугу  $BC$ , что и центральный угол  $\angle COB$ , поэтому  $\angle COB = 2\angle CAB = 2\alpha$ .  $OC \perp OC_1$ ,  $AB \perp OC_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow OC \parallel AB$ , тогда  $\angle BOC = \angle OBA$ , как накрест лежащие, поэтому  $\angle OBA = 2\alpha$ .  $\triangle OAB$  — равнобедренный, тогда  $\angle OAB = \angle OBA$ , следовательно,  $\angle OAB = 2\alpha$ .  $\angle AOB = 2\angle ACB = 2\gamma$  (как центральный угол). Из  $\triangle AOB$ :  $\angle AOB + \angle OAB + \angle OBA = 180^\circ$ ,  $2\alpha + 2\alpha + 2\gamma = 180^\circ$ ,  $2\alpha + \gamma = 90^\circ$ , в то же время  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ . Отсюда получаем  $\beta - \alpha = 90^\circ$ . Что и требовалось доказать.

**10.195.** Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 и 23 см. Найти радиус окружности.

*Решение.*

Пусть  $M$  и  $K$  — точки касания окружности и сторон  $AB$  и  $AD$  квадрата  $ABCD$  (рис. 10.5),  $M$  и  $K$  — точки пересечения окружности с указанными сторонами квадрата, а  $P$  и  $E$  — со сторонами  $BC$  и  $CD$ . По условию

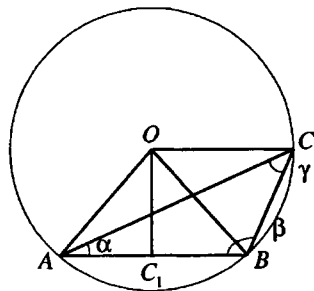


Рис. 10.4



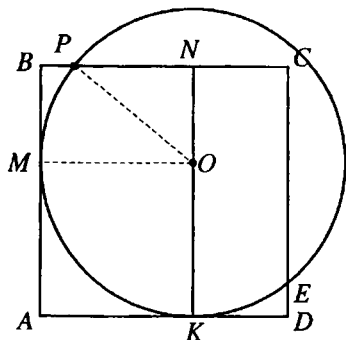


Рис. 10.5

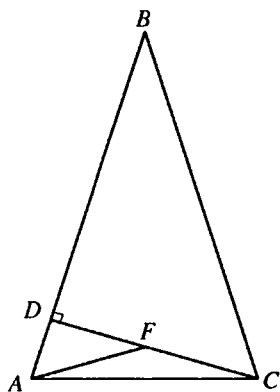


Рис. 10.6

$BP = DE = 2$  см,  $CP = CE = 23$  см. Проведем  $ON \perp BC$ .  $OM = OP = NB = OK = R$ , где  $R$  — радиус данной окружности.  $AB = NK = BC = CP + PB = 25$  см,  $ON = NK - KO = (25 - R)$  см,  $PN = BN - BP = (R - 2)$  см. Из прямоугольного треугольника  $PNO$ :  $OP^2 = ON^2 + NP^2$  или  $R^2 = (R - 2)^2 + (25 - R)^2$ , откуда  $\begin{cases} R = 17 \\ R = 37 \end{cases}$ . Условию удовлетворяет  $R = 17$ .

*Ответ:* 17 см.

**10.196.** Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $2h_c = AB$  и  $\angle A = 75^\circ$ . Найти величину угла  $C$ .

*Решение.*

Обозначим высоту  $CD$  через  $h$ , а отрезок  $AD$  — через  $x$  (рис. 10.6). Имеем  $\angle ACD = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$ . Проведем  $AF$  так, чтобы  $\angle CAF = \angle ACD = 15^\circ$ . Тогда  $\angle AFD = 30^\circ$  и из  $\triangle ADF$  получим  $AF = FC = 2x$ ,

$DF = x\sqrt{3}$ . Но  $DF = h - FC = h - 2x \Rightarrow x = \frac{h}{2 + \sqrt{3}} = h(2 - \sqrt{3})$ . Так как

$AB = 2h$ , то  $BD = AB - AD = 2h - x = h\sqrt{3}$ . Из  $\triangle BDC$  имеем  $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = 2h \Rightarrow \angle B = 30^\circ$  и  $\angle C = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ$ .

*Ответ:*  $75^\circ$ .

**10.197.** В прямоугольный треугольник со сторонами 6, 8 и 10 см вписана окружность. Через центр окружности проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Вычислить длины средних отрезков сторон треугольника, отсекаемых построенными прямыми.

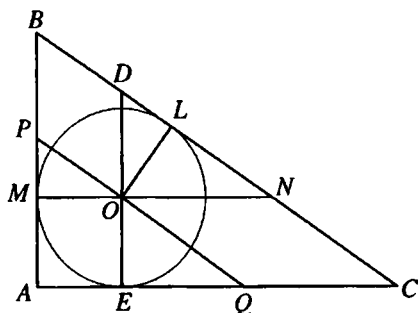


Рис. 10.7

*Решение.*

Найдем радиус вписанной ок-

ружности. Имеем  $r = \frac{S}{p} = \frac{0,5 \cdot 6 \cdot 8}{0,5(6+8+10)} = \frac{24}{12} = 2$  см. Далее, так как  $\triangle ABC \sim \triangle MPO$  (рис. 10.7), то  $\frac{AB}{MP} = \frac{AC}{MO}$ , откуда  $MP = \frac{AB \cdot MO}{AC} = \frac{6 \cdot 2}{8} = \frac{3}{2}$  см.

Аналогично,  $\triangle EOQ \sim \triangle MPO$ :  $\frac{EQ}{MO} = \frac{OE}{PM}$ , откуда  $EQ = \frac{OE \cdot MO}{PM} = \frac{2 \cdot 2}{3/2} = \frac{8}{3}$  см.

Проведем  $OL \perp BC$ ; тогда  $DN = DL + LN$ .  $\triangle EOQ = \triangle MPO$  (по катету и острому углу); значит,  $LN = EQ = \frac{8}{3}$  см. Точно так же из равенства тре-

угольников  $MPO$  и  $DLO$  находим  $DL = MP = \frac{3}{2}$  см и, следовательно,

$$DN = \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{25}{6} \text{ см.}$$

*Ответ:*  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{8}{3}$  и  $\frac{25}{6}$  см.

**10.198.** Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найти все стороны трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис 15 и 13 см.

*Решение.*

Пусть в трапеции  $ABCK$  (рис. 10.8)  $BC \parallel AK$ ,  $BD$  и  $CD$  — биссектрисы  $\angle ABC$  и  $\angle BCK$ ,  $DE$  — высота,  $DE = 12$  см,  $BD = 15$  см,  $CD = 13$  см.

Из  $\triangle BED$  ( $\angle BED = 90^\circ$ ):  $BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = 9$  см. Из прямо-

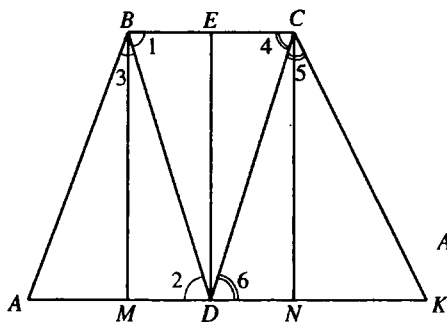


Рис. 10.8

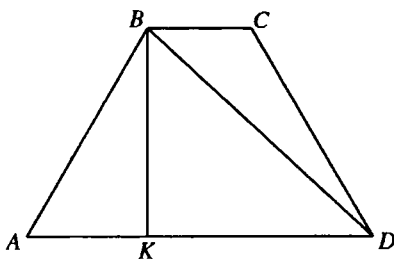


Рис. 10.9

угольного треугольника  $\triangle CED$   $CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} = 5$  см. Тогда  $BC = BE + CE = 14$  см.  $\angle 1 = \angle 3$  — по условию,  $\angle 1 = \angle 2$  — внутренние накрест лежащие при  $BC \parallel AD$  и секущей  $BD$ . Следовательно,  $\angle 2 = \angle 3$ ,  $AD = AB$ . Аналогично,  $\angle 5 = \angle 6$ ,  $CK = DK$ .  $BM$  и  $CN$  — высоты трапеции.  $BM = CN = DE = 12$  см, отсюда  $MD = BE = 9$  см,  $DN = EC = 5$  см. Пусть  $AB = x$  см, тогда  $AM = (x - 9)$  см. Из прямоугольного треугольника  $\triangle AMB$   $AB^2 = AM^2 + BM^2$ ;  $x^2 = (x - 9)^2 + 144$ ,  $x = 12,5$ . Следовательно,  $AD = AB = 12,5$  см. Пусть  $CK = y$  см. Тогда  $NK = (y - 5)$  см. Из  $\triangle CNK$  ( $\angle CNK = 90^\circ$ ):  $CK^2 = CN^2 + NK^2$ ;  $y^2 = (y - 5)^2 + 144$ ;  $y = 16,9$ . Следовательно,  $DK = CK = 16,9$  см. Тогда  $AK = AD + DK = 29,4$  см.

*Ответ:* 29,4 см; 12,5 см; 14 см; 16,9 см.

**10.199.** Основания трапеции равны 4 и 16 см. Найти радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

*Решение.*

В трапеции  $ABCD$  (рис. 10.9)  $BC \parallel AD$ ,  $BC = 4$  см,  $AD = 16$  см. Так как около данной трапеции описана окружность, то  $AB = CD$ . Так как в данную трапецию можно вписать окружность, то  $AD + BC = AB + CD = 2AB$ ;  $AB = \frac{AD + BC}{2} = 10$  см.  $BK$  — высота тра-

печи. Тогда  $AK = \frac{AD - BC}{2} = 6$  см. Из  $\triangle AKB$  ( $\angle AKB = 90^\circ$ ):

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = 8 \text{ см. Радиус вписанной окружности } r = \frac{1}{2}BK = 4 \text{ см.}$$

Радиус  $R$  описанной окружности найдем как радиус окружности, описанной около  $\triangle ABD$ :

$$R = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S_{\triangle ABD}}, \quad KD = AD - AK = 10 \text{ см. Из } \triangle BKD$$

$$(\angle BKD = 90^\circ): BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 2\sqrt{41} \text{ см. } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BK = 64 \text{ см}^2.$$

$$\text{Тогда } R = \frac{10 \cdot 2\sqrt{41} \cdot 16}{4 \cdot 64} = \frac{5\sqrt{41}}{4} \text{ (см).}$$

Ответ: 4 см;  $\frac{5\sqrt{41}}{4}$  см.

**10.200.** В треугольник вписан ромб со стороной  $m$  так, что один угол у них общий, а противоположная вершина ромба лежит на стороне треугольника и делит эту сторону на отрезки длиной  $p$  и  $q$ . Найти стороны треугольника.

Решение.

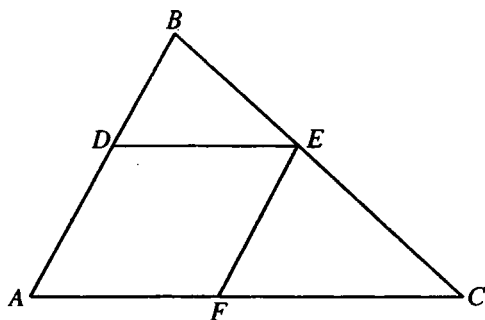


Рис. 10.10

В  $\triangle ABC$  (рис. 10.10)

вписан ромб  $ADEF$ ,

$BE = p$ ,  $EC = q$ ,  $DE = FE = m$ , тогда  $BC = p + q$ .  $\triangle DBE \sim \triangle ABC$  (по

двум углам). Тогда  $\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC}$ ;  $AC = \frac{DE \cdot BC}{BE} = \frac{m(p+q)}{p}$ .  $\triangle FEC \sim$

$\triangle ABC$ . Тогда  $\frac{FE}{AB} = \frac{EC}{BC}$ ;  $AB = \frac{FE \cdot BC}{EC} = \frac{m(p+q)}{q}$ .

Ответ:  $p + q$ ;  $\frac{m(p+q)}{p}$ ;  $\frac{m(p+q)}{q}$ .

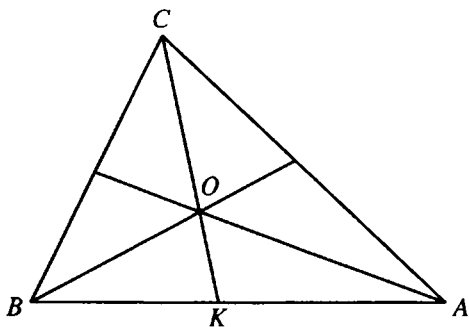


рис. 10.11

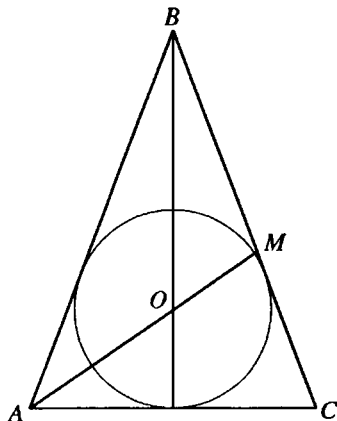


Рис. 10.12

**10.201.** Дан треугольник  $ABC$  такой, что  $AB = 15$  см,  $BC = 12$  см и  $AC = 18$  см. Вычислить, в каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису угла  $C$ .

*Решение.*

Пусть  $CK$  — биссектриса  $\angle C$ ,  $O$  — центр окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ , — точка пересечения его биссектрис (рис. 10.11). Пусть  $BK = x$  см,

$x > 0$ . Тогда  $AK = (15 - x)$  см. По свойству биссектрисы  $\frac{BK}{BC} = \frac{AK}{AC}$ ;

$\frac{x}{12} = \frac{15 - x}{18}$ ;  $x = 6$ .  $BO$  — биссектриса  $\triangle BCK$ . Тогда  $\frac{CO}{OK} = \frac{BC}{BK} = \frac{12}{6} = 2:1$ .

*Ответ:* 2:1.

**10.202.** Дан равнобедренный треугольник с основанием, равным  $a$ , и боковой стороной, равной  $b$ . Доказать, что центр вписанной окружности делит биссектрису угла при основании в отношении  $(a + b):b$ , считая от вершины угла.

*Решение.*

В  $\triangle ABC$  (рис. 10.12)  $AB = BC = b$ ,  $AC = a$ ,  $O$  — центр вписанной окружности,  $AM$  — биссектриса  $\angle BAC$ ,  $BO$  — биссектриса  $\angle ABM$ .

Тогда  $\frac{AO}{OM} = \frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BM} = \frac{BM + MC}{BM} = 1 + \frac{MC}{BM} = 1 + \frac{AC}{AB} = 1 + \frac{a}{b} = \frac{a + b}{b}$ .

Что и требовалось доказать.

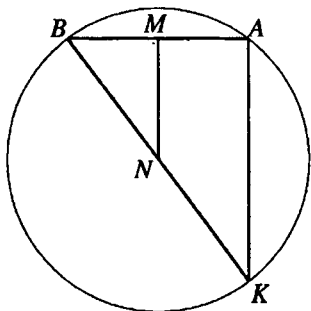


Рис. 10.13

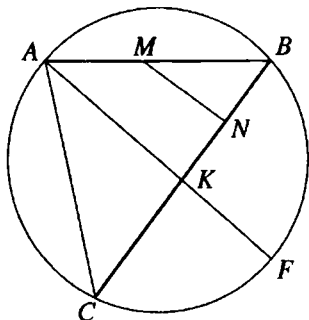


Рис. 10.14

**10.203.** Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17 см. Найти радиус окружности, если расстояние между серединами данных хорд равно 5 см.

*Решение.*

Из точки  $B$  окружности (рис. 10.13) проведены хорды  $AB = 9$  см и  $BK = 17$  см,  $MN = 5$  см. Тогда  $MN$  — средняя линия  $\triangle ABK$ ,  $AK = 2MN = 10$  см. Искомый радиус  $R$  найдем как радиус окружности, описанной около  $\triangle ABK$ :  $R = \frac{AB \cdot AK \cdot BK}{4S_{\triangle ABK}}$ . Полупериметр треугольника

$$p = \frac{AB + AK + BK}{2} = 18 \text{ см. } S_{\triangle ABK} = \sqrt{(18-9)(18-10)(18-7)} \cdot 18 = 36 \text{ см}^2.$$

$$R = 10 \frac{5}{8} \text{ см.}$$

$$R = 10 \frac{5}{8} \text{ см.}$$

*Ответ:*  $10 \frac{5}{8}$  см.

**10.204.** Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 10 и 12 см. Найти радиус окружности, если расстояние от середины меньшей хорды до большей хорды равно 4 см.

*Решение.*

Из точки  $B$  окружности (рис. 10.14) проведены хорды  $AB = 10$  см и  $BC = 12$  см,  $M$  — середина  $AB$ ,  $MN \perp BC$ ,  $MN = 4$  см. Опустим из точки  $A$  перпендикуляр  $AK$  на отрезок  $BC$ . В  $\triangle ABK$  —  $MN$  — средняя линия. Тогда  $AK = 2MN = 8$  см. Из  $\triangle MNB$  ( $\angle MNB = 90^\circ$ ):

$BN = \sqrt{BM^2 - MN^2} = 3$  см. Тогда  $BK = 2BN = 6$  см. Так как  $BC = 12$  см,

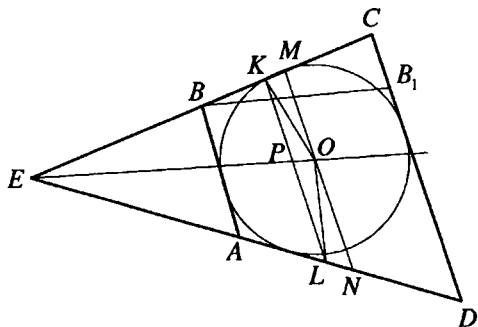


Рис. 10.15

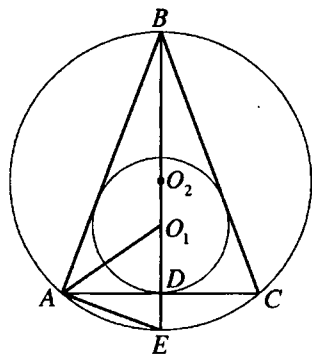


Рис. 10.16

то  $K$  — середина  $BC$ , и, следовательно,  $AC = AB = 10$  см, отрезок  $AK$  лежит на диаметре  $AF$  данной окружности. Пусть  $AF = 2R$ , где  $R$  — радиус данной окружности. Тогда  $KF = AF - AK = 2R - 8$ .  $K$  — точка пересечения диаметра  $AF$  и хорды  $BC$ . По свойству хорды  $AK \cdot KF = CK \cdot KB$ ;  $8(2R - 8) = 6 \cdot 6$ ;  $R = 6,25$ .

*Ответ:* 6,25 см.

**10.205.** В некоторый угол вписана окружность радиуса 5 см. Длина хорды, соединяющей точки касания, равна 8 см. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде. Найти стороны полученной трапеции.

*Решение.*

Окружность с центром  $O$  (рис. 10.15) касается сторон угла  $E$  в точках  $K$  и  $L$ ,  $KL = 8$  см,  $OK = 5$  см,  $AB \parallel CD \parallel KL$ . Проведем диаметр окружности  $MN \parallel KL$ ,  $P$  — точка пересечения  $EO$  и  $KL$ ,  $\angle KPO = 90^\circ$ ,  $\triangle KPO \sim \triangle OKM$  — по двум углам ( $\angle PKO = \angle KOM$ ,  $\angle KPO = \angle OKM = 90^\circ$ ).

Тогда  $\frac{KP}{KO} = \frac{KO}{MO}$ ,  $MO = \frac{KO^2}{KP} = \frac{25}{4}$  см.  $MN = 2MO = \frac{25}{2}$  см.  $MN$  — средняя линия трапеции  $ABCD$  и, так как в эту трапецию вписана окружность, то  $BC = AD = MN = \frac{25}{2}$  см.  $BB_1$  — высота трапеции  $ABCD$ ,

$BB_1 = 2OK = 10$  см. Из  $\triangle BB_1C$  ( $\angle BB_1C = 90^\circ$ ):  $B_1C = \sqrt{BC^2 - BB_1^2} = 7,5$  см.

$CD - AB = 2B_1C = 15$  см,  $CD + AB = 2BC = 25$  см. Тогда  $CD = 20$  см,  $AB = 5$  см.

*Ответ:* 20 см; 5 см; 12,5 см; 12,5 см.

**10.206.** Какими целыми числами выражаются стороны равнобедренного треугольника, если радиус вписанной окружности равен  $3/2$  см, а описанной  $25/8$  см?

*Решение.*

В  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $BD$  — высота,  $O_1$  — центр вписанной, а  $O_2$  — центр описанной окружностей (рис. 10.16), радиусы которых  $r = \frac{3}{2}$  см и

$R = \frac{25}{8}$  см.  $E$  — точка пересечения луча  $BD$  и описанной окружности.

$AO_1$  — биссектриса  $\angle BAC$ . Пусть  $\angle BAO_1 = \angle O_1AD = \alpha$ . Тогда  $\angle AO_1D = 90^\circ - \alpha$ . Так как  $BE$  — диаметр описанной окружности, то

$\angle BAE = 90^\circ$ ,  $\angle O_1AE = 90^\circ - \alpha$ ,  $BE = 2R = \frac{25}{4}$  см. Отсюда  $AE = O_1E$ .

Пусть  $DE = x$  см. Тогда  $AE = O_1E = O_1D + DE = r + x = \frac{3}{2} + x$ . Из  $\triangle BAE$

( $\angle BAE = 90^\circ$ ,  $AD$  — высота):  $AE^2 = DE \cdot BE$ ;  $\left(\frac{3}{2} + x\right)^2 = x \cdot \frac{25}{4}$ ;

$x = \frac{9}{4}$  или  $x = 1$ . Из  $\triangle ADE$  ( $\angle ADE = 90^\circ$ ):  $AD = \sqrt{AE^2 - DE^2}$ . При

$x = \frac{9}{4}$ :  $AE = \frac{15}{4}$  см,  $AD = 3$  см,  $AC = 6$  см. При  $x = 1$ :  $AE = \frac{5}{2}$  см,

$AD = \frac{\sqrt{21}}{2}$  см и  $AC$  выражается иррациональным числом. Следовательно,

но,  $AC = 6$  см,  $AB = BC = \sqrt{BE^2 - AE^2} = 5$  см.

*Ответ:* 5 см, 5 см, 6 см.

**10.207.** В треугольник со сторонами 10, 17 и 21 см вписан прямоугольник с периметром 24 см так, что одна его сторона лежит на большей стороне треугольника. Найти стороны прямоугольника.

*Решение.*

В  $\triangle ABC$  имеем  $AC = 21$  см,  $AB = 10$  см,  $BC = 17$  см, вершины  $L$  и  $Q$  прямоугольника  $MNQL$  принадлежат  $AC$ ,  $M$  —  $AB$ ,  $N$  —  $BC$



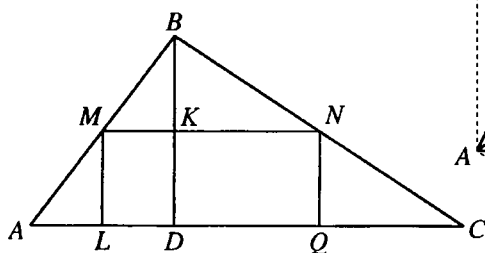


Рис. 10.17

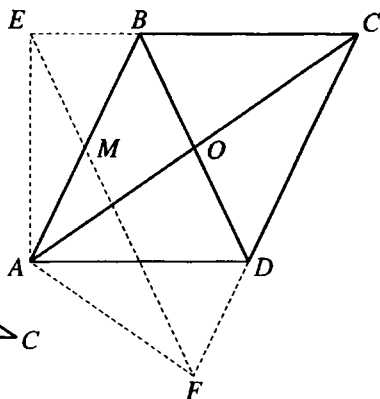


Рис. 10.18

(рис. 10.17). Пусть  $ML = x$  см. Тогда периметр прямоугольника 24 см и  $MN = (12 - x)$  см.  $BD$  — высота  $\triangle ABC$ ,  $K$  — точка пересечения  $BD$  и  $MN$ , а  $BK$  — высота  $\triangle MBN$ . По формуле Герона найдем площадь  $S$  треугольника  $\triangle ABC$ :  $S = 84$  см<sup>2</sup>. Тогда  $BD = \frac{2S}{AC} = 8$  см,  $BK = (8 - x)$  см.

Так как  $MN \parallel AC$ , то  $\triangle MBN \sim \triangle ABC$ . Тогда  $\frac{BK}{BD} = \frac{MN}{AC}$ ;  $\frac{8 - x}{8} = \frac{12 - x}{21}$ ,

$x = 5\frac{7}{13}$ . Следовательно,  $ML = 5\frac{7}{13}$  см,  $MN = 6\frac{6}{13}$  см.

Ответ:  $5\frac{7}{13}$  см,  $6\frac{6}{13}$  см.

**10.208.** Из вершины острого угла ромба проведены перпендикуляры к прямым, содержащим стороны ромба, которым не принадлежит эта вершина. Длина каждого перпендикуляра равна 3 см, а расстояние между их основаниями  $3\sqrt{3}$  см. Вычислить длины диагоналей ромба.

*Решение.*

Так как  $\triangle AEF$  — равнобедренный (рис. 10.18), то биссектриса  $AM$  перпендикулярна  $EF$  и лежит на диагонали ромба. Находим  $AM^2 = AF^2 - MF^2 = 9 - \frac{27}{4} = \frac{9}{4}$ , т.е.  $AM = \frac{3}{2}$  (см). В  $\triangle ACF$  имеем

$\angle F = 90^\circ$  и  $FM \perp AC \Rightarrow AF^2 = AC \cdot AM$ ,  $9 = AC \cdot \frac{3}{2}$ ,  $AC = 6$  (см).

Далее  $\triangle ACD \sim \triangle AEF$  (углы при основании равны как углы со взаимно

перпендикулярными сторонами), поэтому  $\frac{AM}{OD} = \frac{EF}{AC} \Leftrightarrow \frac{3/2}{OD} = \frac{3\sqrt{3}}{6}$ ,

$OD = \sqrt{3}$  см. Получили  $BD = 2\sqrt{3}$  см,  $AC = 6$  см.

*Ответ:* 6 и  $2\sqrt{3}$  см.

**10.209.** Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26 см. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найдите радиус окружности.

*Решение.*

Пусть  $r$  — искомый радиус.

В  $\triangle ABC$   $AB=10$  см,  $BC=24$  см,  $AC = 26$  см (рис. 10.19),  $O$  — центр окружности, касающейся  $AB$  и  $BC$  в точках  $N$  и  $K$  соответственно.

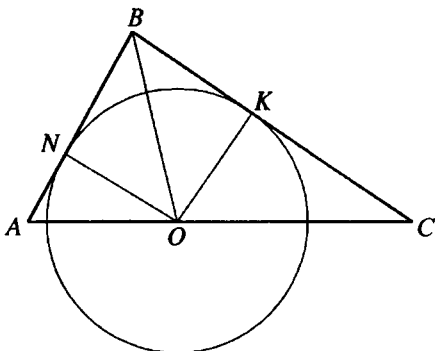


Рис. 10.19

Так как  $26^2 = 10^2 + 24^2$ , то  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 120, S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot ON = 5r; S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot OK = 12r.$$

Так как  $S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} = S_{\triangle ABC}$ , то  $17r = 120$ ,  $r = \frac{120}{17}$ .

*Ответ:*  $\frac{120}{17}$ .

**10.210.** Найти радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 2 и 14 и боковой стороной 10 см.

*Решение.*

Окружность, описанная около трапеции  $ABCD$ , описана и около  $\triangle ACD$  (рис. 10.20), причем такая окружность единственна. Ее радиус находим по формуле  $R = \frac{abc}{4S}$ . Имеем  $S = \frac{1}{2} AD \cdot BE$ , где

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8; \text{ отсюда } S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 8 = 56. \text{ Из}$$

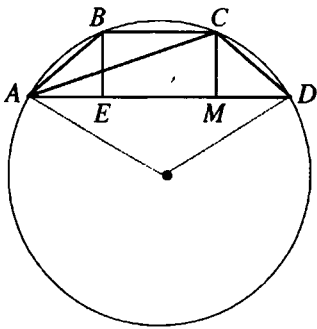


Рис. 10.20

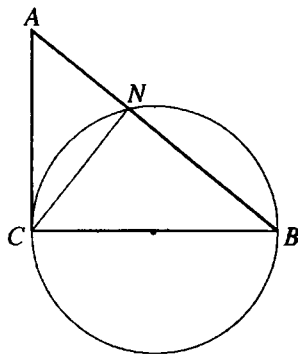


Рис. 10.21

$\triangle ACM$  имеем  $AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$ . Получили

$$R = \frac{14 \cdot 10 \cdot 8\sqrt{2}}{4 \cdot 56} = 5\sqrt{2}.$$

Ответ:  $5\sqrt{2}$ .

**10.211.** На большем катете прямоугольного треугольника как на диаметре построена окружность. Определить радиус этой окружности, если меньший катет треугольника равен 7,5 см, а длина хорды, соединяющей вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы и окружности, равна 6 см.

*Решение.*

В  $\triangle ABC$  (рис. 10.21)  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC > AC$ ,  $AC = 7,5$  см,  $N$  — точка пересечения окружности, о которой говорится в условии, и гипотенузы  $AB$ ,  $CN = 6$  см.  $\angle CNB$  — вписанный и опирается на диаметр. Тогда  $\angle CNB = 90^\circ$ . Из  $\triangle ANC$  ( $\angle ANC = 90^\circ$ ):  $AN = \sqrt{AC^2 - CN^2} = 4,5$  см. Так как  $CN$  — высота прямоугольного  $\triangle ACB$ , то  $\triangle ANC \sim \triangle CNB$ . Следовательно,  $\frac{AN}{AC} = \frac{CN}{BC}$ ,  $BC = \frac{AC \cdot CN}{AN} = 10$  см. Искомый радиус  $R =$

$$= \frac{1}{2} BC = 5 \text{ см.}$$

Ответ: 5 см.

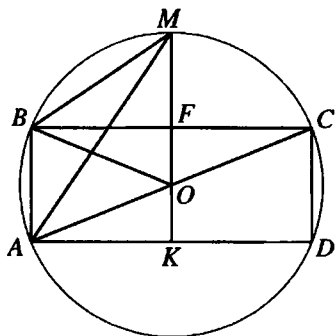


Рис. 10.22

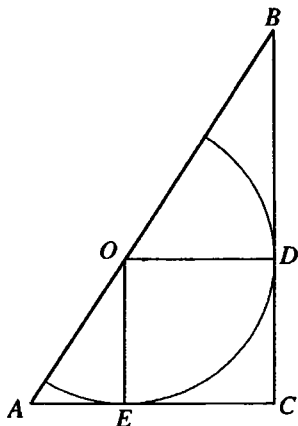


Рис. 10.23

**10.212.** Вершины прямоугольника, вписанного в окружность, делят ее на четыре дуги. Найти расстояния от середины одной из больших дуг до вершин прямоугольника, если стороны его равны 24 и 7 см.

*Решение.*

Так как  $AC$  — диаметр окружности (рис. 10.22), то  $R = 0,5\sqrt{24^2 + 7^2} = 12,5$  см. В  $\triangle BOF$  имеем  $OF = \sqrt{OB^2 - BF^2} = \sqrt{12,5^2 - 12^2} = 3,5$  см; значит,  $MF = 12,5 - 3,5 = 9$  см,  $MK = 12,5 + 3,5 = 16$  см. Из  $\triangle MBF$  и  $\triangle MAK$  находим искомые расстояния:  $MB = \sqrt{MF^2 + BF^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$  см,  $MA = \sqrt{MK^2 + KA^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$  см.

*Ответ:* 15 и 20 см.

**10.213.** Центр полуокружности, вписанной в прямоугольный треугольник так, что ее диаметр лежит на гипотенузе, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40 см. Найти длину дуги полуокружности, заключенной между точками ее касания с катетами.

*Решение.*

Проведем радиусы  $OD$  и  $OE$  в точки касания (рис. 10.23). Имеем  $OD = OE = CE = CD$ , т.е.  $ECDO$  — квадрат. Пусть  $R$  — радиус окружности; тогда длина дуги  $ED$  равна  $\frac{\pi R}{2}$ . Так как  $\triangle AEO \sim \triangle ODB$ ,

то  $\frac{AE}{OD} = \frac{AO}{OB} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$ . Но  $AE^2 = AO^2 - OE^2 = 30^2 - R^2$ , откуда

$$\frac{\sqrt{30^2 - R^2}}{R} = \frac{3}{4}, 16(30^2 - R^2) = 9R^2 \Rightarrow R = 24. \text{ Длина дуги } ED \text{ равна } 12\pi.$$

Ответ:  $12\pi$ .

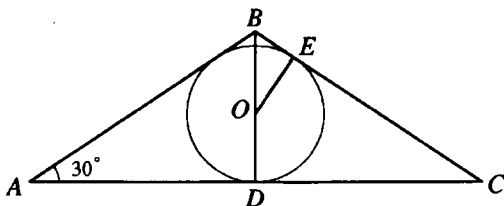


Рис. 10.24

**10.214.** Около круга радиуса 3 описан равнобедренный треугольник с острым углом  $30^\circ$  при основании. Определить стороны треугольника.

Решение.

Проведем радиус  $OE \perp BC$  (рис. 10.24). Так как  $\angle OBE = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ$ ,

то  $\angle BOE = 30^\circ$  и  $BE = \frac{1}{2} BO$ . Из  $\triangle BEO$  находим  $BO^2 = \frac{1}{4} BO^2 + 9$ , откуда

да  $BO = 2\sqrt{3}$ . В  $\triangle ADB$  имеем  $AB = 2BD$ . Но  $BD = BO + OD = 2\sqrt{3} + 3$  и,

следовательно,  $AB = BC = 4\sqrt{3} + 6$ . Наконец,  $AC = 2DC = 2(BC - BE) = 2(4\sqrt{3} + 6 - \sqrt{3}) = 6\sqrt{3} + 12$ .

Ответ:  $4\sqrt{3} + 6, 6\sqrt{3} + 12$ .

**10.215.** В прямоугольном треугольнике медианы катетов равны  $\sqrt{52}$  и  $\sqrt{73}$ . Найти гипотенузу треугольника.

Решение.

В  $\triangle ABC$  (рис. 10.25)  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BP$  и  $AE$  — медианы,  $BP = \sqrt{52}$ ,

$AE = \sqrt{73}$ . Пусть  $BC = x$ ,  $AC = y$ . Тогда  $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Из  $\triangle ACE$  ( $\angle ACE = 90^\circ$ ):

$$AC^2 + CE^2 = AE^2; \quad y^2 + \frac{x^2}{4} = 73.$$

Из  $\triangle BCP$  ( $\angle BCP = 90^\circ$ ):

$$BC^2 + CP^2 = BP^2; \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 52.$$

Решая систему  $\begin{cases} y^2 + \frac{x^2}{4} = 73, \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 52, \end{cases}$  получа-

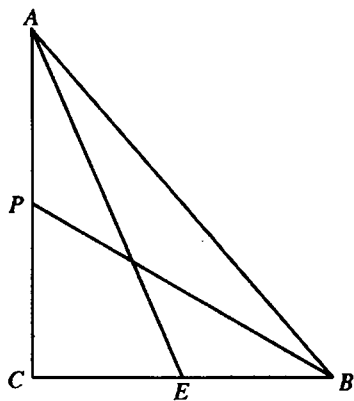


Рис. 10.25

ем  $\begin{cases} 4y^2 + x^2 = 292, \\ 4x^2 + y^2 = 208; \end{cases} \quad 5x^2 + 5y^2 = 500; \quad x^2 + y^2 = 100.$  Следовательно,

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2} = 10.$$

Ответ: 10.

**10.216.** Две окружности, радиусы которых 4 и 8, пересекаются под прямым углом. Определить длину их общей касательной.

Решение.

Пусть  $A$  — точка пересечения окружностей с центрами  $O$  и  $O_1$  (рис. 10.26),  $OA = 8$  см,  $O_1A = 4$  см,

$MN$  — их общая касательная. По условию окружности пересекаются под прямым углом, следовательно, касательные к ним в точке  $A$  взаимно перпендикулярны. Но тогда и радиусы, проведенные в точку

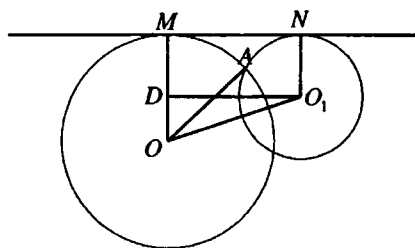


Рис. 10.26

касания также перпендикулярны. Из  $\triangle OAO_1$ :  $OO_1^2 = OA^2 + O_1A^2 = 80$ .

Проведем  $O_1D \parallel MN$ . Тогда  $O_1D \perp OM$ ,  $MN = O_1D$ ,  $MD = NO_1 = 4$ ,  $OD =$

$$= OM - MD = 4. \text{ Из } \triangle ODO_1: O_1D = \sqrt{OO_1^2 - OD^2} = 8.$$

Ответ: 8.

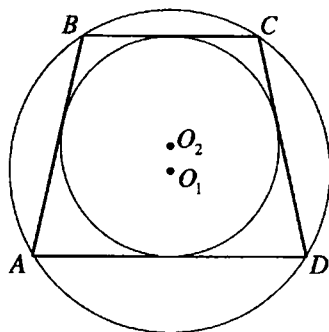


Рис. 10.27

**10.217.** Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять трапеция, чтобы в нее можно было вписать и около нее можно было описать окружность?

*Решение.*

Для того, чтобы в трапецию можно было вписать окружность и вокруг нее можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы трапеция была равнобокой и боковая сторона

равнялась полусумме оснований.

**Необходимость.**

Пусть  $ABCD$  — трапеция, вокруг которой описана окружность с центром в точке  $O_1$  и в которую вписана окружность с центром в точке  $O_2$  (рис. 10.27). Тогда по свойству четырехугольника, вписанного в окружность,

$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ . Но  $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$  и, следовательно,  $\angle BAD = \angle ADC$  и трапеция  $ABCD$  — равнобокая,  $AB = CD$ . Так как в трапецию вписана окружность, то  $AB + CD = BC + AD$  и, значит,

$$AB = CD = \frac{BC + AD}{2}.$$

**Достаточность.**

Пусть  $ABCD$  — равнобокая трапеция ( $AB = CD$ ) и  $AB = CD = \frac{BC + AD}{2}$ . Тогда  $\angle BAD = \angle ADC$ , но  $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$ . Отсюда

$\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ , и вокруг трапеции  $ABCD$  можно описать окружность. Кроме того,  $AB + CD = BC + AD$  и, следовательно, в  $ABCD$  можно вписать окружность. Что и требовалось доказать.

**10.218.** Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если основания трапеции равны 4 и 12 см.

*Решение.*

В трапеции  $ABCD$  (рис. 10.28)  $BC \parallel AD$ ,  $BC = 4$  см,  $AD = 12$  см,  $O$  —

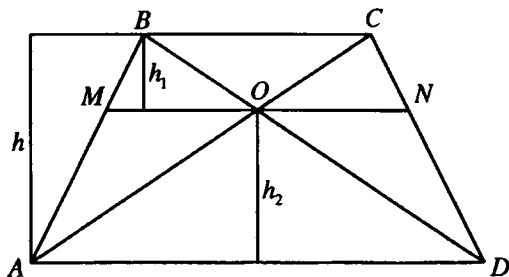


Рис. 10.28

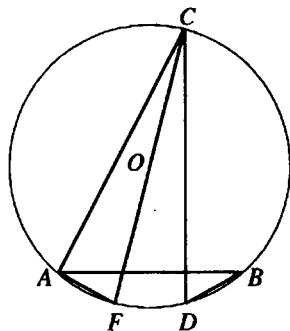


Рис. 10.29

точка пересечения диагоналей,  $MN$  — отрезок искомой длины. Пусть  $h_1$  — расстояние между прямыми  $BC$  и  $MN$ ,  $h_2$  — между  $MN$  и  $AD$ ,  $h$  — между  $BC$  и  $AD$ ,  $h = h_1 + h_2$ .  $\triangle MBO \sim \triangle ABD$ . Тогда  $\frac{MO}{AD} = \frac{h_1}{h}$  (1).

$\triangle OCN \sim \triangle ACD$ . Тогда  $\frac{ON}{AD} = \frac{h_2}{h}$ . Следовательно,  $MO = ON = \frac{1}{2}MN$ .

Пусть  $MO = x$  см. Тогда из (1) имеем:  $\frac{x}{12} = \frac{h_1}{h}$ .  $\triangle MAO \sim \triangle BAC$ . Тогда

$$\frac{MO}{BC} = \frac{h_2}{h}; \quad \frac{x}{4} = \frac{h_2}{h}. \text{ Следовательно, } \frac{x}{12} + \frac{x}{4} = \frac{h_1}{h} + \frac{h_2}{h}; \quad \frac{x}{3} = \frac{h_1 + h_2}{h}; \quad x = 3.$$

Значит,  $MN = 6$  см.

*Ответ:* 6 см.

**10.219.** В окружности радиуса  $R$  проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды  $AB$  и  $CD$ . Доказать, что  $AC^2 + BD^2 = 4R^2$ .

*Решение.*

Проведем диаметр  $CF$  (рис. 10.29). Докажем, что  $AF = BD$  как хорды, стягивающие равные дуги. Действительно,  $\cup AC + \cup BD = 180^\circ$  (так как  $AB \perp CD$ ),  $\cup AC + \cup AF = 180^\circ$  (поскольку  $CF$  — диаметр). Следовательно,  $\cup AF = \cup BD$  и  $AF = BD$ . В прямоугольном треугольнике  $ACF$  имеем  $AC^2 + AF^2 = 4R^2$ , откуда и  $AC^2 + BD^2 = 4R^2$ .

Что и требовалось доказать.



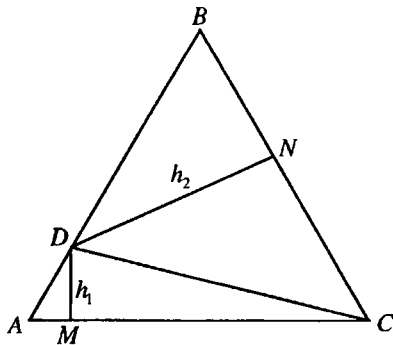


Рис. 10.30

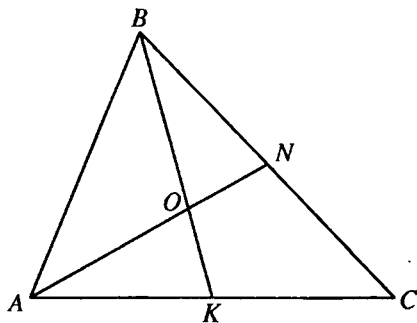


Рис. 10.31

**10.220.** Показать, что сумма расстояний от любой точки, взятой на стороне правильного треугольника, до двух других его сторон есть величина постоянная.

*Решение.*

Пусть  $D$  — произвольная точка стороны  $AB$  равностороннего  $\triangle ABC$  (рис. 10.30). Опустим из точки  $D$  перпендикуляры  $DM$  и  $DN$  на стороны  $AC$  и  $BC$ . Пусть  $DM = h_1$ ,  $DN = h_2$ ,  $AC = a$ . Тогда  $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}ah_1$ ,  $S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2}ah_2$ ,  $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ,  $S_{\triangle ADC} + S_{\triangle BDC} = S_{\triangle ABC}$ ,  $\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ,  $h_1 + h_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \text{const}$ . Что и требовалось доказать.

**10.221.** Две стороны треугольника равны 6 и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти третью сторону треугольника.

*Решение.*

В  $\triangle ABC$  (рис. 10.31)  $AC = 6$  см,  $BC = 8$  см,  $BK$  и  $AN$  — медианы.  $O$  — точка их пересечения,  $AN \perp BK$ . Пусть  $ON = x$  см,  $OK = y$  см. Тогда  $AO = 2x$  см,  $BO = 2y$  см. Из  $\triangle BON$  ( $\angle BON = 90^\circ$ ):  $BO^2 + ON^2 = BN^2$ ;  $4y^2 + x^2 = 16$  (1). Из  $\triangle AOK$  ( $\angle AOK = 90^\circ$ ):  $AO^2 + OK^2 = AK^2$ ;  $4x^2 + y^2 = 9$  (2). Складывая (1) и (2), имеем  $5x^2 + 5y^2 = 25$ ,  $x^2 + y^2 = 5$ . Из  $\triangle AOB$  ( $\angle AOB = 90^\circ$ ):  $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{5}$  (см).

Ответ:  $2\sqrt{5}$  см.

10.222. Окружности радиусов  $R$  и  $r$  касаются друг друга внешним образом. Боковые стороны равнобедренного треугольника являются их общими касательными, а основание касается большей из окружностей. Найти основание треугольника.

*Решение.*

$O$  и  $O_1$  — центры данных окружностей,  $\triangle ABC$  — треугольник, о котором говорится в условии задачи,  $AC = BC$  (рис. 10.32).  $CK$  — высота  $\triangle ABC$ ,  $O$  и  $O_1$  принадлежат  $CK$ .  $F$  и  $E$  — точки касания окружностей с центрами  $O_1$  и

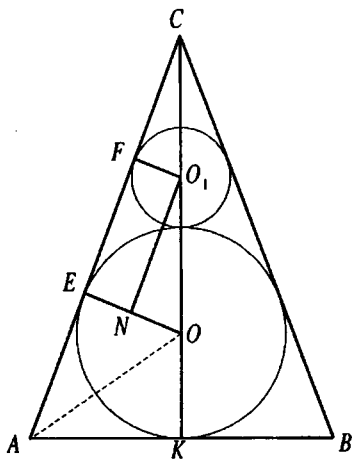


Рис. 10.32

$O$  соответственно со стороной  $AC$  треугольника.  $OE = OK = R$ .  $O_1F = r$ .

Так как  $\triangle AKC \sim \triangle OEC$  (по двум углам:  $\angle AKC = \angle OEC = 90^\circ$ , угол с вершиной  $C$  общий), то  $\angle CAK = \angle COE$ . Так как окружность с центром  $O$  касается сторон  $\angle CAK$ , то  $AO$  — его биссектриса. Пусть  $\angle COE = \alpha$ .

Тогда  $\angle OAK = \frac{\alpha}{2}$ . Проведем  $O_1N \parallel AC$ . Тогда  $O_1N \perp OE$ ,  $EN = O_1F = r$ ,

$ON = OE - EN = R - r$ ,  $OO_1 = R + r$ . Из  $\triangle O_1NO$  ( $\angle O_1NO = 90^\circ$ ):

$\cos \alpha = \frac{ON}{OO_1} = \frac{R-r}{R+r}$ . Из  $\triangle AKO$  ( $\angle AKO = 90^\circ$ ):

$$AK = OK \operatorname{ctg} \angle OAK = R \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = R \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = R \frac{1 + \frac{R-r}{R+r}}{\sqrt{1 - \left(\frac{R-r}{R+r}\right)^2}} =$$

$$= R \frac{R+r+R-r}{(R+r) \sqrt{\frac{(R+r)^2 - (R-r)^2}{(R+r)^2}}} = \frac{2R^2}{\sqrt{4Rr}} = \frac{R^2}{\sqrt{Rr}}.$$

$$AB = 2AK = \frac{2R^2}{\sqrt{Rr}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2R^2}{\sqrt{Rr}}.$$

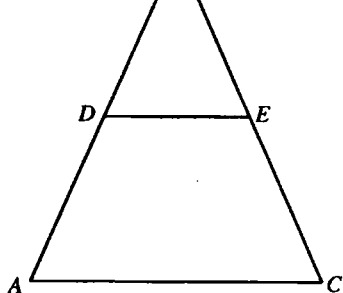


Рис. 10.33

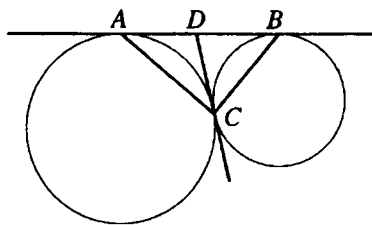


Рис. 10.34

**10.223.** Периметр прямоугольного треугольника равен 60 см. Найти его стороны, если высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см.

*Решение.*

Пусть  $a$  и  $b$  — катеты, а  $c$  — гипотенуза треугольника. Так как  $a + b + c = 60$ , то  $a + b = 60 - c$ , откуда  $(a + b)^2 = (60 - c)^2$  или  $a^2 + 2ab + b^2 = 3600 - 120c + c^2$  (\*). Но  $a^2 + b^2 = c^2$ , а  $6c = 0,5ab$  (площадь треугольника). Подставляя эти выражения в равенство (\*), получим  $c^2 + 24c = 3600 - 120c + c^2$ ,  $144c = 3600$ , т.е.  $c = 25$  см. Имеем систему

уравнений  $\begin{cases} a + b = 35, \\ ab = 300, \end{cases}$  т.е.  $a$  и  $b$  — корни уравнения  $x^2 - 35x + 300 = 0$ .

Значит,  $a_1 = 20$ ,  $a_2 = 15$ ;  $b_1 = 15$ ,  $b_2 = 20$ .

*Ответ:* 15, 20 и 25 см.

**10.224.** Дан равнобедренный треугольник с основанием 12 см и боковой стороной 18 см. Отрезки какой длины нужно отложить от вершины треугольника на его боковых сторонах, чтобы, соединив их концы, получить трапецию с периметром, равным 40 см?

*Решение.*

По условию в  $\triangle ABC$  (рис. 10.33) имеем:  $AB = BC = 18$ ,  $AC = 12$ . Пусть  $BD = BE = x$ . Тогда  $AD = EC = 18 - x$ . Периметр трапеции  $ADEC$ :  $P = AC + DE + 2AD = 40$ , отсюда  $DE = 40 - (2AD + AC) = 2x - 8$ .  $\triangle ABC \sim$

$\triangle DBE$ , следовательно,  $\frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AC}$  или  $\frac{x}{2x - 8} = \frac{18}{12}$ ,  $x = 6$ .

*Ответ:* 6 см.

**10.225.** Две окружности разных радиусов касаются друг друга внешним образом. Найти угол, определяемый хордами, соединяющими точку касания окружностей с точками касания их общей внешней касательной.

*Решение.*

Пусть  $AB$  — общая внешняя касательная данных окружностей,  $C$  — точка их касания,  $D$  — точка пересечения  $AB$  и общей касательной окружностей в точке  $C$  (рис. 10.34). Тогда  $DB = DC$ ,  $DA = DC$ , откуда  $\angle DCB = \angle DBC$ ,  $\angle DAC = \angle DCA$ . Из  $\triangle ACB$ :  $\angle DAC + \angle DBC + \angle ACB = 180^\circ$ , следовательно,  $\angle DAC + \angle DBC = \angle ACB$  и  $2\angle ACB = 180^\circ$ , откуда  $\angle ACB = 90^\circ$ .

*Ответ:*  $90^\circ$ .

**10.226.** В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу в отношении 2:3. Найти стороны треугольника, если центр вписанной окружности удален от вершины прямого угла на расстояние  $\sqrt{8}$  см.

*Решение.*

Обозначим радиус окружности через  $r$ , а длину гипотенузы через  $5x$ . Тогда (рис. 10.35)  $BC = 3x + r$ ,  $AC = 2x + r$ , поскольку  $BK = BL$ ,  $AK = AM$ . Так как  $\angle OCM = 45^\circ$ , то  $r = OC : \sqrt{2} = \sqrt{8} : \sqrt{2} = 2$  см. Для площади треугольника  $ABC$  имеем выражение  $S = 0,5AC \cdot BC$ ; с другой стороны,  $S = pr$ , где  $p = 0,5(AB + BC + AC)$ . Следовательно,  $0,5(2x + 2)(3x + 2) = 2(5x + 2)$  или  $3x^2 - 5x - 2 = 0$ , откуда  $x = 2$  см (второй корень уравнения не подходит). Итак,  $AB = 10$  см,  $AC = 6$  см,  $BC = 8$  см.

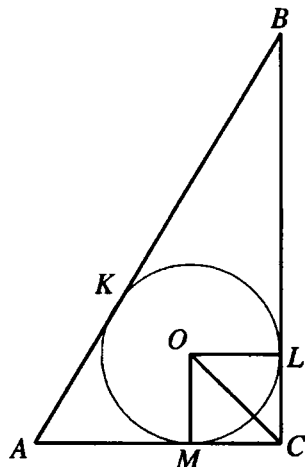


Рис. 10.35

*Ответ:* 6, 8 и 10 см.

**10.227.** Внутри равностороннего треугольника взята точка  $M$ , отстоящая от его сторон на расстояниях  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Найти высоту треугольника.

*Решение.*

Пусть точка  $M$  удалена от стороны  $AB$  равностороннего  $\triangle ABC$  на  $b$ , от  $BC$  на  $c$  и от  $AC$  на  $d$  (рис. 10.36). Пусть  $AB = a$ ,  $h$  — высота  $\triangle ABC$ .

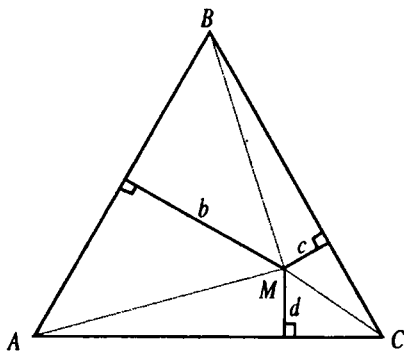


Рис. 10.36

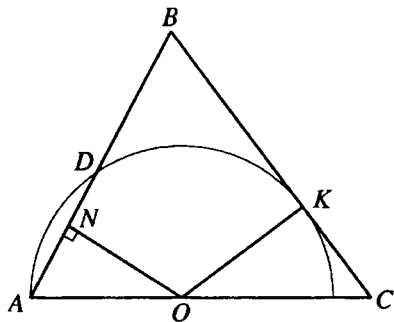


Рис. 10.37

Тогда  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMB} + S_{\triangle BMC} + S_{\triangle AMC}$ ;  $\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}ad$ ;

$$h = b + c + d.$$

Ответ:  $b + c + d$ .

**10.228.** Один конец диаметра полуокружности совпадает с вершиной угла при основании равнобедренного треугольника, а другой принадлежит этому основанию. Найти радиус полуокружности, если она касается одной боковой стороны и делит другую на отрезки длиной 5 и 4 см, считая от основания.

*Решение.*

По теореме о касательной и секущей, имеем (рис. 10.37)  $BK^2 = AB \cdot DB = 9 \cdot 4 = 36$ , откуда  $BK = 6$  см,  $KC = 3$  см. Проведем радиус  $OK$  в точку касания и  $ON \perp AB$ . Тогда  $AN = ND = \frac{5}{2}$  см. Так как

$\triangle ANO \sim \triangle OKC$  (прямоугольные треугольники, у которых  $\angle A = \angle C$ ), то

$$\frac{KC}{AN} = \frac{OK}{AO} = \frac{3}{5/2} = \frac{6}{5}. \text{ Пусть искомый радиус равен } r. \text{ Тогда } AO = r,$$

$$OC = \sqrt{9 + r^2} \text{ и, значит, } 6r = 5\sqrt{9 + r^2}, 36r^2 = 225 + 25r^2, \text{ откуда } r = \frac{15}{\sqrt{11}} \text{ см.}$$

Ответ:  $\frac{15}{\sqrt{11}}$  см.

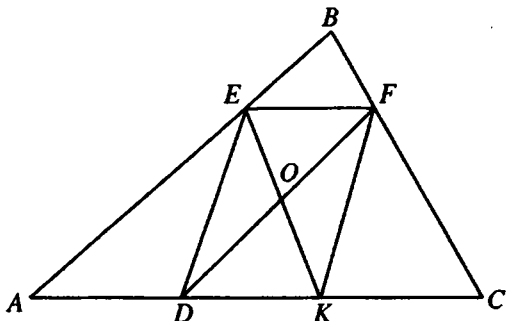


Рис. 10.38

**10.229.** В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 и 5 см и диагональю, равной 6 см. Найти стороны треугольника, если известно, что диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на основании треугольника.

*Решение.*

Пусть в  $\triangle ABC$   $DK = EF = 3$  см,  $DE = 5$  см,  $DF = 6$  см,  $DK \parallel EF$ ,  $O$  — точка пересечения диагоналей  $DF$  и  $EK$  параллелограмма  $DEFK$  (рис. 10.38). Пусть  $EO = x$  см. Тогда  $DF^2 + EK^2 = 2(DE^2 + EF^2)$ ;  $36 + 4x^2 = 2(25 + 9)$ ;  $x = 2\sqrt{2}$ .  $OEBF$  — параллелограмм. Тогда  $BE = FO = 3$  см,  $BF = EO = 2\sqrt{2}$  см.  $KEFC$  — параллелограмм. Тогда  $FC = EK = 4\sqrt{2}$  см,  $KC = EF = 3$  см.  $AEFD$  — параллелограмм. Тогда  $AE = DF = 6$  см,  $AD = EF = 3$  см. Следовательно,  $AB = AE + EB = 9$  см,  $BC = BF + FC = 6\sqrt{2}$  см,  $AC = AD + DK + KC = 9$  см.

*Ответ:* 9 см; 9 см;  $6\sqrt{2}$  см.

**10.230.** Высота, основание и сумма боковых сторон треугольника равны соответственно 24, 28 и 56 см. Найти боковые стороны.

*Решение.*

Площадь треугольника  $S = \frac{24 \cdot 28}{2} = 336$  см<sup>2</sup>. Пусть одна из боковых сторон равна  $x$  см, тогда вторая равна  $(56 - x)$  см. Полупериметр треугольника

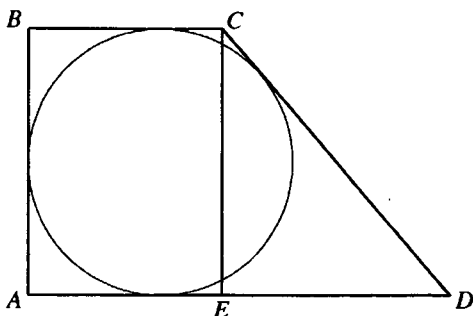


Рис. 10.39

$p = \frac{28 + 56}{2} = 42$  (см). Тогда по формуле Герона площадь треугольника

$S = \sqrt{42 \cdot 14(42-x)(42-56+x)}$ . Следовательно,  $\sqrt{3 \cdot 14^2 \cdot (42-x)(x-14)} = 336$ ;

$\sqrt{3(42-x)(x-14)} = 24$ ;  $\begin{cases} x = 26, \\ x = 30. \end{cases}$  Таким образом, боковые стороны данно-

го треугольника 26 см и 30 см.

*Ответ:* 26 см; 30 см.

**10.231.** В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса  $r$ . Найти стороны трапеции, если ее меньшее основание равно  $4r/3$ .

*Решение.*

Найдем сторону  $AB = 2r$  (рис. 10.39). Пусть  $ED = x$ . Тогда, используя равенство  $AB + CD = BC + AD$ , получим  $2r + CD = \frac{4r}{3} + \frac{4r}{3} + x$ , откуда

$$CD = \frac{2r}{3} + x. \text{ В } \triangle CED \text{ имеем } CD^2 = CE^2 + ED^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2r}{3} + x\right)^2 = 4r^2 + x^2,$$

откуда  $x = \frac{8r}{3}$ . Получили  $CD = \frac{10r}{3}$ ,  $AD = \frac{12r}{3} = 4r$ .

*Ответ:*  $4r$ ,  $\frac{10r}{3}$ ,  $2r$ .

**10.232.** В треугольник с боковыми сторонами 9 и 15 см вписан параллелограмм так, что одна из его сторон длиной 6 см лежит на основании треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам

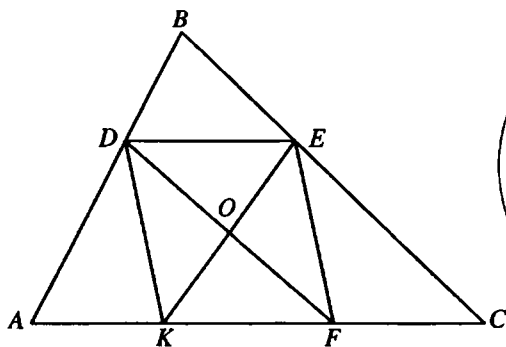


Рис. 10.40

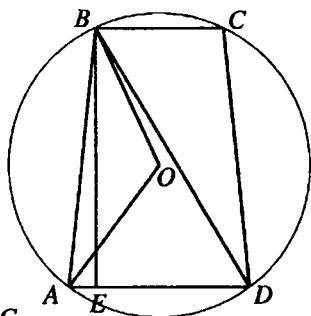


Рис. 10.41

треугольника. Найти другую сторону параллелограмма и основание треугольника.

*Решение.*

В  $\triangle ABC$  (рис. 10.40)  $AB = 9$  см,  $BC = 15$  см,  $KDEF$  — параллелограмм, о котором говорится в условии задачи.  $DE = KF = 6$  см.  $ADEK$ ,  $KDEF$ ,  $FDEC$  — три параллелограмма с общим основанием  $DE = 6$  см. Следовательно,  $AK = KF = FC = DE = 6$  см и  $AC = 3DE = 18$  см.  $\triangle DBE \sim$

$\triangle ABC$  и  $DE = \frac{1}{3} AC$ . Следовательно,  $DB = \frac{1}{3} AB = 3$  см,  $BE = \frac{1}{3} BC = 5$  см.

$O$  — точка пересечения диагоналей  $DF$  и  $KE$  параллелограмма  $KDEF$ . Из параллелограмма  $DBEO$   $EO = DB = 3$  см,  $DO = BE = 5$  см. Тогда  $KE = 6$  см,  $DF = 10$  см. Так как  $2(DE^2 + DK^2) = DF^2 + KE^2$ , то  $2(36 + DK^2) = 100 + 36$ ,  $DK = 4\sqrt{2}$  см.

*Ответ:*  $4\sqrt{2}$  см, 18 см.

**10.233.** Найти среднюю линию равнобедренной трапеции с высотой  $h$ , если боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом  $120^\circ$ .

*Решение.*

В трапеции  $ABCD$  (рис. 10.41)  $BC \parallel AD$ ,  $AB = CD$ ,  $O$  — центр описанной окружности,  $\angle AOB = 120^\circ$ . Тогда вписанный  $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB = 60^\circ$ .

$BE$  — высота трапеции,  $BE = h$ . Так как трапеция равнобокая, то длина



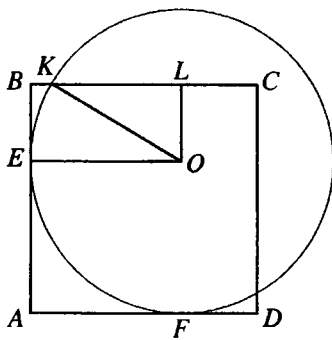


Рис. 10.42

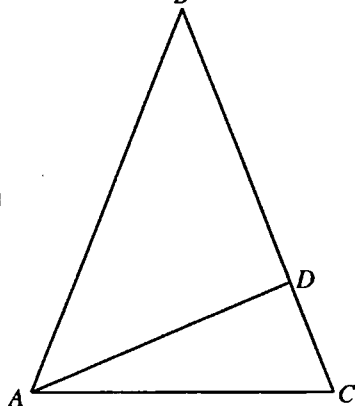


Рис. 10.43

$ED$  равна длине средней линии трапеции. Из  $\triangle BED$  ( $\angle BED = 90^\circ$ ):

$$DE = BE \operatorname{ctg} \angle ADB = \frac{h\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ:  $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ .

**10.234.** Окружность радиуса 13 см касается двух смежных сторон квадрата со стороной 18 см. На какие два отрезка делит окружность каждую из двух других сторон квадрата?

*Решение.*

Проведем радиус  $OK$  (рис. 10.42); тогда  $KL = \sqrt{KO^2 - LO^2}$ .

$$LO = BE = 18 - 13 = 5 \text{ (см)} \Rightarrow KL = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}, BK = 13 - 12 = 1 \text{ (см)}.$$

Получили, что сторона квадрата разделена на отрезки 1 и 17 см.

Ответ: 1 и 17 см.

**10.235.** В равнобедренном треугольнике угол при основании содержит  $72^\circ$ , а биссектриса этого угла имеет длину, равную  $m$ . Найти длины сторон треугольника.

*Решение.*

Пусть в  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $\angle BAC = \angle BCA = 72^\circ$ ,  $AD$  — биссектриса  $\angle BAC$ ,  $AD = m$  (рис. 10.43).  $\angle BAD = \angle DAC = 36^\circ$ ,  $\angle ABC = 180^\circ - 2\angle BAC = 36^\circ$ ,  $\angle ADC = 180^\circ - (\angle DAC + \angle BCA) = 72^\circ$ . Следовательно,  $\triangle ADB$  и

$\triangle CAD$  — равнобедренные,  $BD = AD = AC = m$ . Пусть  $AB = BC = x$ . Тогда  $DC = x - m$ . Так как  $AD$  — биссектриса  $\triangle ABC$ , то  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ ;

$$\frac{m}{x-m} = \frac{x}{m}; x^2 - xm - m^2 = 0, \text{ и так как } x > 0, \text{ то } x = \frac{m(1+\sqrt{5})}{2}.$$

Ответ:  $m; \frac{m(1+\sqrt{5})}{2}$ .

**10.236.** В равнобедренном треугольнике угол при вершине содержит  $36^\circ$ , а биссектриса угла при основании равна  $\sqrt{20}$ . Найти длины сторон треугольника.

*Решение.*

Вспользуемся чертежом к предыдущей задаче. В  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $\angle ABC = 36^\circ$ ,  $AD$  — биссектриса  $\angle BAC$ ,  $AD = \sqrt{20}$ .  $\angle BAC = \angle BCA = 72^\circ$ ,  $\angle BAD = \angle DAC = 36^\circ$ ,  $\angle ADC = \angle BAD + \angle ABC = 72^\circ$ . Следовательно,  $\triangle ADB$  и  $\triangle CAD$  — равнобедренные,  $BD = AD = AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ . Пусть  $AB = BC = x$ . Тогда  $DC = x - 2\sqrt{5}$ . Так как  $AD$  — биссектриса  $\triangle ABC$ , то  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ ,  $\frac{2\sqrt{5}}{x-2\sqrt{5}} = \frac{x}{2\sqrt{5}}$ ,  $x^2 - 2x\sqrt{5} - 20 = 0$  и, так как  $x > 0$ , то  $x = 5 + \sqrt{5}$ .

Ответ:  $2\sqrt{5}; 5 + \sqrt{5}$ .

**10.237.** Диагонали четырехугольника равны, а длины его средних линий составляют  $p$  и  $q$ . Найти площадь четырехугольника.

*Решение.*

Так как  $KL$ ,  $LM$ ,  $NM$ ,  $KN$  — средние линии соответствующих треугольников (рис. 10.44), то  $KL = NM = \frac{1}{2}AC$ ,  $KN = LM = \frac{1}{2}BD$ . По усло-

вию  $AC = BD \Rightarrow KLMN$  — ромб, площадь которого равна  $\frac{1}{2}pq$ . Пусть

искомая площадь равна  $S$ . Тогда  $S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$ . Но  $S_{\triangle AKN} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABD}$ ;

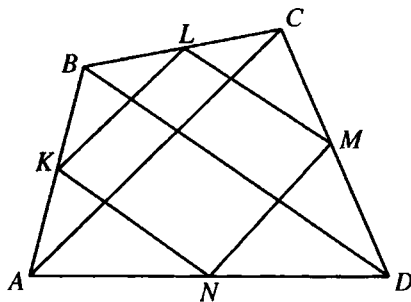


Рис. 10.44

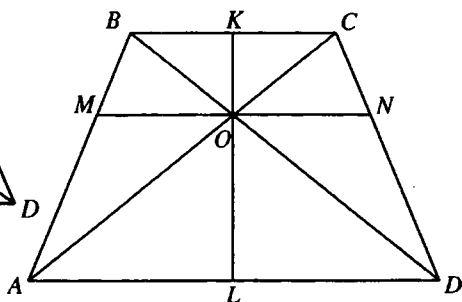


Рис. 10.45

аналогично  $S_{\Delta CML} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ , поэтому  $S_{\Delta AKN} + S_{\Delta CML} = \frac{1}{4} S$ . Аналогично

получаем, что  $S_{\Delta KBL} + S_{\Delta MDN} = \frac{1}{4} S$ . Таким образом, площадь вне ромба

равна  $\frac{1}{2} S$ . Отсюда и площадь ромба равна  $\frac{1}{2} S$ , откуда  $S = pq$ .

*Ответ:*  $pq$ .

**10.238.** Большее основание трапеции в два раза больше ее меньшего основания. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти отношение высоты каждой из двух полученных трапеций к высоте данной трапеции.

*Решение.*

Пусть в трапеции  $ABCD$  (рис. 10.45)  $AD \parallel BC$ ,  $AD = 2BC$ ,  $O$  — точка пересечения  $AC$  и  $BD$ ,  $MN$  — прямая, о которой говорится в условии задачи. Проведем через точку  $O$  высоту  $KL$  трапеции  $ABCD$ . Тогда  $KO$  — высота трапеции  $MBCN$  и  $\Delta BOC$ ,  $OL$  — высота трапеции  $AMND$  и  $\Delta AOD$ .  $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ . Тогда  $\frac{OK}{OL} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$ . Следовательно,

$$\frac{OK}{OL} = \frac{1}{3}, \quad \frac{OL}{KL} = \frac{2}{3}.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}$ .

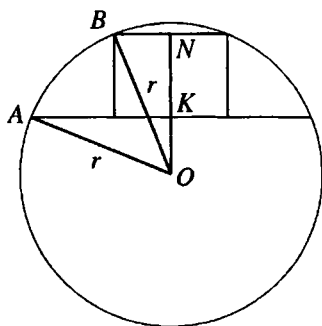


Рис. 10.46

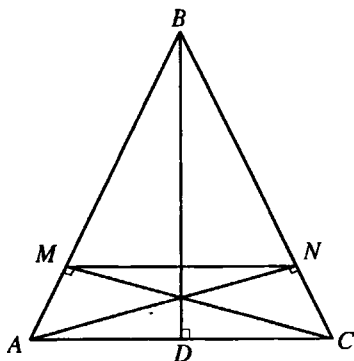


Рис. 10.47

**10.239.** Найти радиус круга, в сегмент которого, соответствующий хорде длиной 6 см, вписан квадрат со стороной 2 см.

*Решение.*

Пусть  $r$  — искомый радиус. В  $\triangle AOK$  (рис. 10.46) имеем  $OK = \sqrt{r^2 - 9}$ , а в  $\triangle OBN$  имеем  $ON^2 + BN^2 = OB^2$  или  $(OK + 2)^2 + 1 = r^2$ . Следовательно,  $r^2 - 9 + 4\sqrt{r^2 - 9} + 4 + 1 = r^2$ , откуда  $r^2 - 9 = 1$ , т.е.  $r = \sqrt{10}$  см.

*Ответ:*  $\sqrt{10}$  см.

**10.240.** Длина основания равнобедренного треугольника равна 12 см, а боковой стороны — 18 см. К боковым сторонам треугольника проведены высоты. Вычислить длину отрезка, концы которого совпадают с основаниями высот.

*Решение.*

Пусть в  $\triangle ABC$  (рис. 10.47)  $AB = BC = 18$  см,  $AC = 12$  см,  $AN$ ,  $CM$ ,  $BD$  — высоты.  $AD = \frac{1}{2} AC = 6$  см.  $MN \parallel AC$  ( $\triangle ABC$  — равнобедренный), тогда  $\triangle MBN \sim \triangle ABC$ .  $\triangle BCD \sim \triangle ANC$  (оба прямоугольные,  $\angle ACN$  — общий). Тогда  $\frac{NC}{CD} = \frac{AC}{BC}$ ,  $NC = \frac{CD \cdot AC}{BC} = 4$ . Поэтому  $BN = BC - NC = 14$  см. Из подобия  $\triangle MNB$  и  $\triangle ABC$ :  $\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC}$ ,  $MN = \frac{AC \cdot BN}{BC} = \frac{28}{3}$ .

*Ответ:*  $\frac{28}{3}$  см.

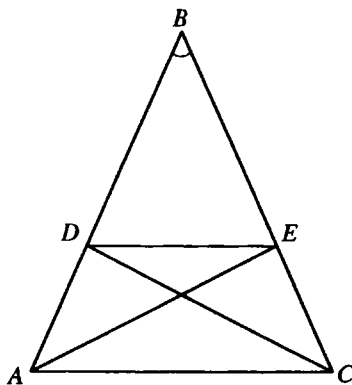


Рис. 10.48

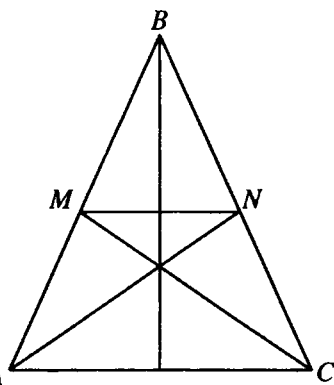


Рис. 10.49

**10.241.** В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной  $b$ , проведены биссектрисы углов при основании. Отрезок прямой между точками пересечения биссектрис с боковыми сторонами равен  $m$ . Определить основание треугольника.

*Решение.*

Так как  $\triangle ABC$  — равнобедренный, то  $CE = AD$  и  $DE \parallel AC$  (рис. 10.48).

Из подобия треугольников  $ABC$  и  $DBE$  следует, что  $\frac{m}{AC} = \frac{BD}{b}$ . Учитывая,

что  $CD$  — биссектриса, имеем  $\frac{BD}{DA} = \frac{BC}{AC}$ . Пусть  $AC = x$ ,  $BD = y$ . Тогда

$$\text{имеем } \begin{cases} \frac{m}{x} = \frac{y}{b}, \\ \frac{y}{b-y} = \frac{b}{x}, \end{cases} \text{ откуда } y = \frac{bm}{x} \text{ и } \frac{bm}{x \left( b - \frac{bm}{x} \right)} = \frac{b}{x}, \text{ т.е. } x = \frac{bm}{b-m}.$$

*Ответ:*  $\frac{bm}{b-m}$ .

**10.242.** Основание равнобедренного треугольника равно 8 см, а боковая сторона — 12 см. Найти длину отрезка, соединяющего точки пересечения биссектрис углов при основании с боковыми сторонами треугольника.

*Решение.*

В  $\triangle ABC$  (рис. 10.49):  $AB = BC = 12$ ,  $AC = 8$ ,  $AN$  и  $CM$  — биссектрисы. Пусть  $MN = x$ . Как и в задаче 10.240,  $MN \parallel AC$ . Так как

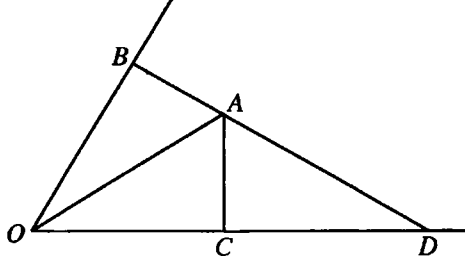


Рис. 10.50

$\angle ACM = \angle NCM$  и  $\angle ACM = \angle NMC$ , то  $\triangle MNC$  — равнобедренный и

$NC = MN = x$ . Тогда  $BN = 12 - x$ . По свойству биссектрисы:  $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC}$ ,

$$\frac{12-x}{x} = \frac{12}{8}, \quad x = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ см.}$$

Ответ: 4,8 см.

**10.243.** Внутри угла в  $60^\circ$  расположена точка, отстоящая на расстояниях  $\sqrt{7}$  и  $2\sqrt{7}$  см от сторон угла. Найти расстояние от этой точки до вершины угла.

Решение.

Пусть точка  $O$  — вершина угла ( $\angle O = 60^\circ$ ),  $AB$  и  $AC$  — расстояние от точки  $A$  до сторон,  $AB = \sqrt{7}$  см,  $AC = 2\sqrt{7}$  см (рис. 10.50).  $D$  — точка пересечения прямой  $AB$  и луча  $OC$ ,  $\angle D = 30^\circ$ . Из  $\triangle ACD$  ( $\angle ACD = 90^\circ$ ):  $AD = 2AC = 4\sqrt{7}$  см.  $BD = AB + AD = 5\sqrt{7}$  см.

Из  $\triangle OBD$  ( $\angle OBD = 90^\circ$ ):  $OB = BD \operatorname{tg} \angle D = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$  см. Из  $\triangle OBA$

( $\angle OBA = 90^\circ$ ):  $OA = \sqrt{OB^2 + AB^2} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$  см.

Ответ:  $\frac{14\sqrt{3}}{3}$  см.

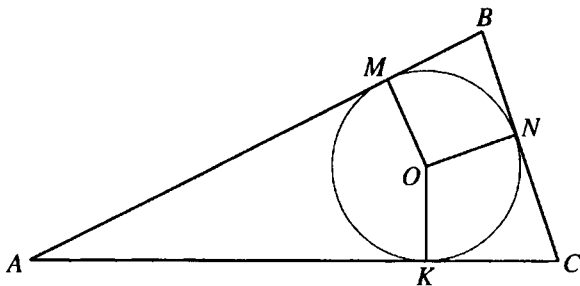


Рис. 10.51

**10.244.** В треугольник вписана окружность радиуса 3 см. Вычислить длины сторон треугольника, если одна из них разделена точкой касания на отрезки 4 и 3 см.

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр окружности радиуса 3, вписанной в  $\triangle ABC$  (рис. 10.51).  $M, N, K$  — точки касания этой окружности соответственно со сторонами  $AB, BC, AC$ .  $BN = 3$  см,  $NC = 4$  см. Тогда  $ON \perp BC$ ,  $OM \perp AB$ ,  $ON = OM = 3$  см.  $BM = BN = 3$  см. Тогда  $BMON$  — ромб, и так как в нем есть два прямых угла, то  $BMON$  — квадрат. Следовательно,  $\triangle ABC$  — прямоугольный. Пусть  $AM = x$  см. Тогда  $AK = AM = x$  см.  $CK = CN = 4$  см. Следовательно,  $AB = (x + 3)$  см,  $BC = 7$  см,  $AC = (x + 4)$  см и  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ . Тогда  $(x + 4)^2 = 49 + (3 + x)^2$ ;  $x = 21$ . Значит,  $AC = 25$  см,  $AB = 24$  см.

*Ответ:* 24 см; 25 см; 7 см.

**10.245.** В угол вписаны три окружности — малая, средняя и большая. Большая окружность проходит через центр средней, а средняя — через центр малой. Определить радиусы средней и большой окружностей, если радиус меньшей равен  $r$  и расстояние от ее центра до вершины угла равно  $a$ .

*Решение.*

Пусть  $O_1, O_2, O_3$  — центры окружностей, о которых говорится в условии задачи, вписанных в угол  $BAC$  (рис. 10.52),  $O_1A = a$ .  $E, F, K$  — соответственно точки касания малой, средней и большой окружностей со стороной  $AC$  угла. Тогда  $O_1E = r$ ,  $O_1E \perp AC$ ,  $O_2F \perp AC$ ,  $O_3K \perp AC$  и  $\triangle AO_1E \sim \triangle AO_2F \sim \triangle AO_3K$ . Пусть  $x$  — радиус средней,  $y$  — радиус большой окружности. Тогда  $O_2O_1 = O_2F = x$ ,  $O_2O_3 = O_3K = y$ . Из подобия  $\triangle AO_1E$  и

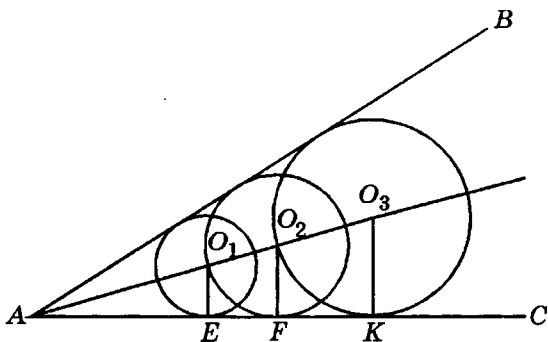


Рис. 10.52

$\triangle AO_2F$  следует, что  $\frac{AO_1}{O_1E} = \frac{AO_2}{O_2F}$ ;  $\frac{a}{r} = \frac{a+x}{x}$ ;  $x = \frac{ar}{a-r}$ . Из подобия

$\triangle AO_1E$  и  $\triangle AO_3K$  следует, что:

$$\frac{AO_1}{O_1E} = \frac{AO_3}{O_3K}; \frac{a}{r} = \frac{a+x+y}{y}; y = \frac{r(a+x)}{a-x} = \frac{r\left(a + \frac{ar}{a-r}\right)}{a-r} = \frac{a^2r}{(a-r)^2}.$$

Ответ:  $\frac{ar}{a-r}$ ;  $\frac{a^2r}{(a-r)^2}$ .

**10.246.** Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстояния 8 и 4 см. Найти среднюю линию трапеции.

*Решение.*

В трапеции  $ABCD$  (рис. 10.53)  $BC \parallel AD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $O$  — центр вписанной окружности,  $OC = 4$  см,  $OD = 8$  см. Так как по условию окружность с центром  $O$  касается сторон  $\angle BCD$  и  $\angle ADC$ , то  $CO$  и  $OD$  — биссектрисы этих углов. Но  $\angle BCD + \angle ADC = 180^\circ$ . Тогда

$$\angle OCD + \angle ODC = \frac{1}{2} \angle BCD + \frac{1}{2} \angle ADC = 90^\circ$$

и  $\angle COD = 180^\circ - (\angle OCD + \angle ODC) = 90^\circ$ .



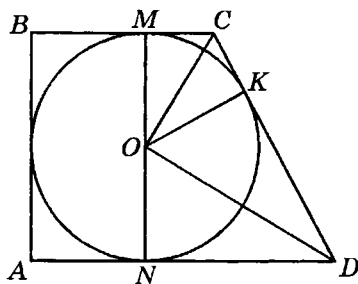


Рис. 10.53

Из  $\triangle COD$  ( $\angle COD = 90^\circ$ ):  $CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = 4\sqrt{5}$  см. Пусть  $M, N, K$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $BC, AD, CD$  трапеции. Тогда  $MN$  — диаметр окружности,  $OK \perp CD, OK = r$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности. Из  $\triangle COD$  ( $\angle COD = 90^\circ$ ):

$$OK = \frac{OC \cdot OD}{CD} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ см}; \quad AB = MN = 2r = 2OK = \frac{16\sqrt{5}}{5} \text{ см.}$$

По свойству трапеции, в которую можно вписать окружность,

$$BC + AD = AB + CD = \frac{16\sqrt{5}}{5} + 4\sqrt{5} = \frac{36\sqrt{5}}{5} \text{ см.}$$

Тогда длина средней линии трапеции равна  $\frac{18\sqrt{5}}{5}$  см.

Ответ:  $\frac{18\sqrt{5}}{5}$  см.

**10.247.** Основания двух правильных треугольников со сторонами  $a$  и  $3a$  лежат на одной и той же прямой. Треугольники расположены по разные стороны от прямой и не имеют общих точек, а расстояние между ближайшими концами их оснований равно  $2a$ . Найти расстояние между вершинами треугольников, не принадлежащими данной прямой.

*Решение.*

Пусть в правильных треугольниках  $ABC$  и  $DFE$  (рис.10.54)  $AC = a, DE = 3a, CD = 2a$ . Так как  $\angle BCD = \angle FDC = 120^\circ$ , то  $BC \parallel DF$ ,  $K$  — точка пересечения прямой  $DF$  и прямой, проходящей через точку  $B$  парал-

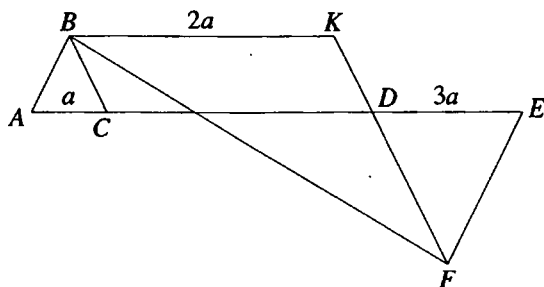


Рис. 10.54

тельно  $AC$ . Следовательно,  $BKDC$  — параллелограмм,  $BK = CD = 2a$ ,  $KD = BC = a$ ,  $KF = KD + DF = 4a$ ,  $\angle BKF = \angle CDF = 120^\circ$ . Из  $\triangle BKF$ :

$$\begin{aligned} BF &= \sqrt{BK^2 + KF^2 - 2BK \cdot KF \cos \angle BKF} = \\ &= \sqrt{4a^2 + 16a^2 - 2 \cdot 2a \cdot 4a \cos 120^\circ} = 2a\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Ответ:  $2a\sqrt{7}$ .

**10.248.** К двум внешне касающимся окружностям радиусов  $R$  и  $r$  построена секущая так, что окружности отсекают на ней три равных отрезка. Найти длины этих отрезков.

*Решение.*

Пусть искомая длина равна  $2x$ . Тогда  $AB = 4x$ ,  $AO_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $BO_2 = \sqrt{r^2 - x^2}$  (рис. 10.55). Проведем  $O_2C \parallel AB$ . В  $\triangle O_1O_2C$  имеем

$$O_1C = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2C^2} \Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{(R+r)^2 - 16x^2} \quad (*).$$

Умножив обе части уравнения (\*) на  $\sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x^2}$ , получим

$$R^2 - r^2 = \sqrt{(R+r)^2 - 16x^2} \left( \sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{(R+r)^2 - 16x^2}} \quad (**).$$

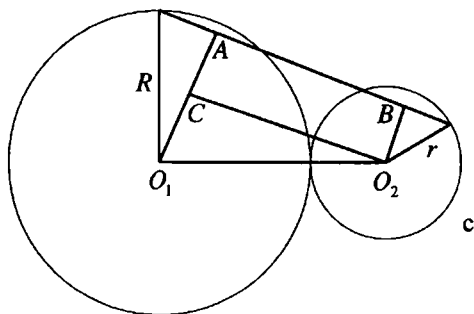


Рис. 10.55

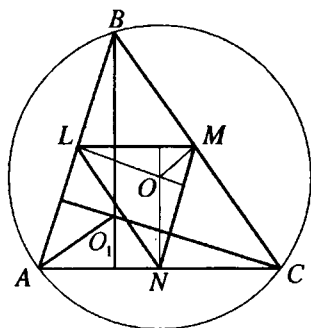


Рис. 10.56

Складывая равенства (\*) и (\*\*), имеем

$$2\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{(R+r)^2 - 16x^2} + \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{(R+r)^2 - 16x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(R+r)^2 - 16x^2 + R^2 - r^2}{\sqrt{(R+r)^2 - 16x^2}} = \frac{2(R^2 + Rr - 8x^2)}{\sqrt{(R+r)^2 - 16x^2}} = \frac{2(R(R+r) - 8x^2)}{\sqrt{(R+r)^2 - 16x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{(R+r)^2 - 16x^2} = R(R+r) - 8x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R^2 - x^2)((R+r)^2 - 16x^2) = (R(R+r) - 8x^2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2(R+r)^2 - 16R^2x^2 - x^2(R+r)^2 + 16x^4 = R^2(R+r)^2 - 16R(R+r)x^2 + 64x^4.$$

Так как  $x \neq 0$ , то приходим к уравнению  $48x^2 = 14Rr - R^2 - r^2$ , откуда

$$x = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{14Rr - R^2 - r^2}{3}} \quad (\text{второй корень уравнения не подходит}). \text{ Искомая}$$

$$\text{длина составляет } 2x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{14Rr - R^2 - r^2}{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \sqrt{\frac{14Rr - R^2 - r^2}{3}}.$$

**10.249.** Доказать, что расстояние от ортоцентра (точки пересечения высот) до вершины треугольника в два раза больше расстояния от центра описанной окружности до стороны, противоположной этой вершине.

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , и  $O_1$  — его ортоцентр (рис. 10.56). Построим  $\triangle LMN$ , сторонами которого служат средние линии заданного треугольника. Высоты  $\triangle LMN$  пересекаются в точке  $O$ , поскольку эти высоты перпендикулярны сторонам  $\triangle ABC$  и проходят через их середины. Но  $\triangle LMN \sim \triangle ABC$  и потому  $\frac{MO}{AO_1} = \frac{LN}{BC} = \frac{1}{2}$ , т.е.  $AO_1 = 2MO$ . Что и требовалось доказать.

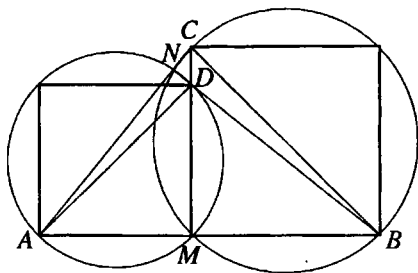


Рис. 10.57

**10.250.** На отрезке  $AB$  взята точка  $M$ , а на отрезках  $AM$  и  $MB$  по одну сторону от прямой  $AB$  построены квадраты, описанные окружности которых пересекаются в точке  $N$ . Доказать, что прямая  $AN$  проходит через вершину второго квадрата и что треугольник  $ANB$  прямоугольный.

*Решение.*

Соединим вершины квадратов  $A$  и  $C$ ,  $B$  и  $D$  (рис. 10.57). Продолжим  $BD$  до пересечения с  $AC$ . Обозначим точку пересечения  $N$  и покажем, что она совпадает с точкой пересечения окружностей, описанных около квадратов. Действительно, так как  $\triangle ACM = \triangle BDM$ , то  $\angle ACM = \angle BDM$  и потому  $BN \perp AC$ . Но прямые углы  $BNC$  и  $AND$  опираются на соответствующие диаметры, а значит, точка  $N$  принадлежит обеим описанным окружностям, откуда и следует доказываемое утверждение. Что и требовалось доказать.

**10.251.** В угол, содержащий  $60^\circ$ , вписаны пять окружностей так, что каждая последующая окружность (начиная со второй) касается предыдущей. Во сколько раз сумма площадей всех пяти соответствующих кругов больше площади меньшего круга?

*Решение.*

Пусть  $A$  — вершина угла.  $O_i$  и  $r_i$  — соответственно центр и радиус  $i$ -й окружности ( $i=1, \dots, 5$ ). Так как  $\frac{1}{2}\angle A = 30^\circ$ , то  $AO_i = 2r_i$ ,  $AO_{i-1} = 2r_{i-1}$ , откуда  $AO_i = AO_{i-1} + r_{i-1} + r_i$  или  $2r_i = 2r_{i-1} + r_{i-1} + r_i$ , т.е.  $r_i = 3r_{i-1}$ . Следовательно, радиусы окружностей образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 3, а сумма площадей пяти кругов составит  $S = \pi r_1^2 (1 + 9 + 9^2 + 9^3 + 9^4) = \frac{\pi r_1^2 (9^5 - 1)}{9 - 1} = 7381\pi r_1^2$ . Итак,  $S : \pi r_1^2 = 7381$ .

*Ответ:* в 7381 раз.

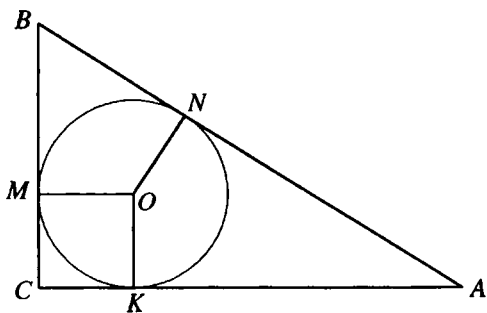


Рис. 10.58

**10.252.** Стороны треугольника относятся как 5:4:3. Найти отношение отрезков сторон, на которые они делятся точкой касания вписанной окружности.

*Решение.*

Так как в  $\triangle ABC$  (рис. 10.58)  $AB : AC : BC = 5 : 4 : 3$ , то  $\angle C = 90^\circ$ . Пусть  $BC = 3x$ . Тогда  $AC = 4x$ ,  $AB = 5x$ . Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности  $r = \frac{BC + AC - AB}{2} = x$ .  $O$  — центр вписанной окружности,  $M, N, K$  — точки ее касания со сторонами  $BC, AB, AC$  треугольника соответственно. Тогда  $CK = CM = r = x$ ,  $AN = AK = 3x$ ,  $BN = BM = 2x$ . Следовательно,  $CK : AK = 1 : 3$ ;  $CM : BM = 1 : 2$ ;  $BN : AN = 2 : 3$ .

*Ответ:* 1 : 3; 1 : 2; 2 : 3.

**10.253.** Для треугольника со сторонами 26, 28 и 30 см найти произведение радиусов описанной и вписанной окружностей.

*Решение.*

Обозначим стороны треугольника:  $a = 26$  см,  $b = 28$  см,  $c = 30$  см.

Полупериметр треугольника  $p = \frac{26 + 28 + 30}{2} = 42$  см. Пусть  $S$  — площадь треугольника.

Радиус описанной окружности  $R = \frac{abc}{4S}$ . Радиус вписанной окружности  $r = \frac{S}{p}$ . Тогда  $R \cdot r = \frac{abc}{4S} \cdot \frac{S}{p} = \frac{abc}{4p} = 130$  см<sup>2</sup>.

*Ответ:* 130 см<sup>2</sup>.

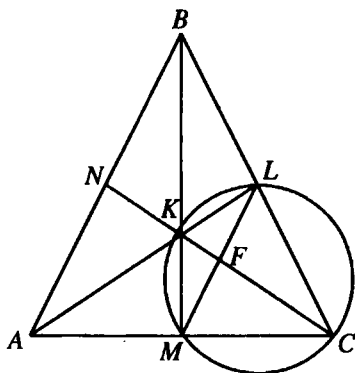


Рис. 10.59

**10.254.** В треугольнике  $ABC$  проведены медианы  $AL$  и  $BM$ , пересекающиеся в точке  $K$ . Вершина  $C$  лежит на окружности, проходящей через точки  $K, L, M$ . Длина стороны  $AB$  равна  $a$ . Найти длину медианы  $CN$ .

*Решение.*

Так как  $CN$  — медиана, то  $CK = \frac{2}{3} CN$  (рис. 10.59). Соединив точки  $L$

и  $M$ , получаем среднюю линию  $LM$ ; поэтому  $\frac{LM}{AB} = \frac{CF}{CN} = \frac{1}{2}$ , т.е.

$CF = \frac{1}{2} CN$ ,  $LM = \frac{a}{2}$ ,  $LF = FM = \frac{1}{2} AN = \frac{a}{4}$ ,  $FK = \frac{1}{6} CN$ . Имеем

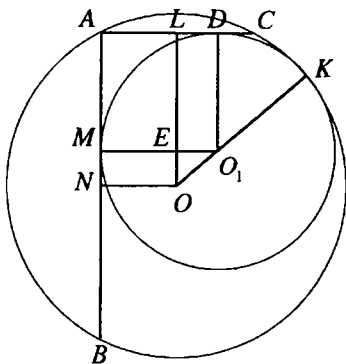


Рис. 10.60

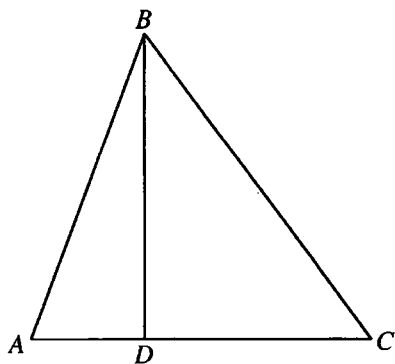


Рис. 10.61

$LF \cdot FM = FK \cdot CF$  (произведение отрезков хорд, проходящих через точку  $F$ ).

Следовательно,  $\frac{a^2}{16} = \frac{1}{6} CN \cdot \frac{1}{2} CN$ , откуда  $CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Ответ:  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**10.255.** Через точку  $A$  окружности радиуса 10 см проведены две взаимно перпендикулярные хорды  $AB$  и  $AC$ . Вычислить радиус окружности, касающейся данной окружности и построенных хорд, если  $AB = 16$  см.

*Решение.*

$O$  — центр окружности радиуса 10 см (рис. 10.60),  $O_1$  — центр окружности, касающейся хорд  $AB$  и  $AC$  и данной окружности соответственно в точках  $M$ ,  $D$  и  $K$ . Тогда  $O_1D \perp AC$ ,  $O_1M \perp AB$ .  $\angle BAC$  — вписанный и прямой. Следовательно,  $BC$  — диаметр данной окружности,  $BC = 20$  см,  $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$  (см). Опустим перпендикуляры  $OL$

и  $ON$  соответственно на  $AC$  и  $AB$ . Тогда  $AL = LC = \frac{1}{2} AC = 6$  см,

$AN = NB = \frac{1}{2} AB = 8$  см. Пусть искомым радиус  $O_1K = O_1D = O_1M = x$  см.  $E$  — точка пересечения  $OL$  и  $O_1M$ . Тогда  $\angle OEO_1 = 90^\circ$ ,  $OE = OL - EL = AN - O_1D = (8 - x)$  см,  $O_1E = O_1M - ME = O_1M - AL = (x - 6)$  см.

$OQ = OK - O_1K = (10 - x)$  см. Из  $\triangle OEQ$  ( $\angle OEQ = 90^\circ$ ):  $OE^2 + EQ^2 = OO_1^2$ ;

$$(8 - x)^2 + (x - 6)^2 = (10 - x)^2; x = 8.$$

Ответ: 8 см.

**10.256.** Длины двух сторон остроугольного треугольника равны  $\sqrt{13}$  и  $\sqrt{10}$  см. Найти длину третьей стороны, зная, что эта сторона равна проведенной к ней высоте.

Решение.

Пусть в  $\triangle ABC$  (рис. 10.61)  $AB = \sqrt{10}$  см,  $BC = \sqrt{13}$  см, высота  $BD = AC$ . Так как треугольник  $ABC$  остроугольный, то точка  $D$  принадлежит отрезку  $AC$ . Пусть  $BD = AC = x$  см. Из  $\triangle ADB$  ( $\angle ADB = 90^\circ$ ):

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{10 - x^2}. \text{ Из } \triangle CDB (\angle CDB = 90^\circ): CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{13 - x^2}.$$

$$\text{Следовательно, } AD + DC = AC; \sqrt{10 - x^2} + \sqrt{13 - x^2} = x;$$

$$\sqrt{13 - x^2} = x - \sqrt{10 - x^2}; 13 - x^2 = x^2 - 2x \cdot \sqrt{10 - x^2} + 10 - x^2; 2x\sqrt{10 - x^2} = x^2 - 3;$$

$$\begin{cases} 4x^2(10 - x^2) = x^2 - 6x^2 + 9, \\ x^2 \geq 3; \end{cases} \begin{cases} 5x^4 - 46x^2 + 9 = 0, \\ x^2 \geq 3; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 9, \\ x^2 = \frac{1}{5}, x^2 = 9. \\ x^2 \geq 3; \end{cases}$$

Отсюда  $AC = 3$  см.

Ответ: 3 см.

**10.257.** Через точку  $P$  диаметра данной окружности проведена хорда  $AB$ , образующая с диаметром угол  $60^\circ$ . Вычислить радиус окружности, если  $AP = a$  и  $BP = b$ .

Решение.

Пусть  $MN$  — диаметр окружности с центром  $O$ , проходящей через точку  $P$  (рис. 10.62),  $\angle APO = 60^\circ$ . Опустим перпендикуляр  $OK$  на хорду  $AB$ .

$$\text{Тогда } BK = \frac{1}{2}AB = \frac{a+b}{2}; PK = BK - BP = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}. \text{ В } \triangle OKP$$

$\angle OKP = 90^\circ$ ,  $\angle KOP = 30^\circ$ . Тогда  $OP = 2PK = a - b$ .  $MP = R + a - b$ ,  $PN = R - (a - b)$ , где  $R$  — искомый радиус окружности. Так как



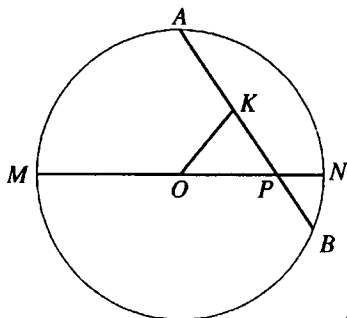


Рис. 10.62

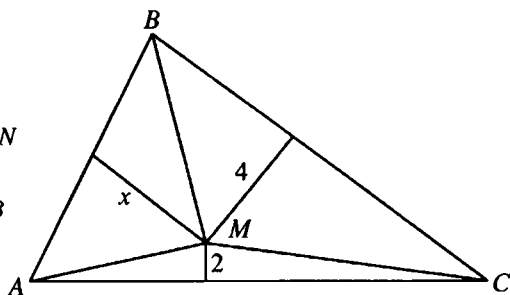


Рис. 10.63

$MP \cdot PN = AP \cdot PB$ , то  $(R + a - b)(R - (a - b)) = ab$ ;  $R^2 - (a - b)^2 = ab$ ;  
 $R = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$ .

Ответ:  $R = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$ .

**10.258.** Расстояния от точки  $M$ , лежащей внутри треугольника  $ABC$ , до его сторон  $AC$  и  $BC$  равны соответственно 2 и 4 см. Вычислить расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB$ , если  $AB = 10$  см,  $BC = 17$  см,  $AC = 21$  см.

Решение.

Пусть искомое расстояние равно  $x$  (рис. 10.63). Тогда  $S_{\Delta AMB} = 0,5 \cdot 10x = 5x$ .

$S_{\Delta AMB} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AMC} - S_{\Delta BMC}$ . Найдем эти площади:  $S_{\Delta ABC} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 7} = 84 \text{ см}^2$ ,  $S_{\Delta AMC} = 0,5 \cdot 21 \cdot 2 = 21 \text{ см}^2$ ,  $S_{\Delta BMC} = 0,5 \cdot 17 \cdot 4 = 34 \text{ см}^2$ . Отсюда  $S_{\Delta AMB} = 84 - 55 = 29 \text{ см}^2$  и  $x = 5,8$  см.

Ответ: 5,8 см.

**10.259.** На отрезке  $AC$  длиной 12 см построена точка  $B$  так, что  $AB = 4$  см. На отрезках  $AB$  и  $AC$  как на диаметрах в одной полуплоскости с границей  $AC$  построены полуокружности. Вычислить радиус окружности, касающейся построенных окружностей и  $AC$ .

Решение.

Точки  $O_1$  и  $O_2$  — центры полуокружностей с диаметрами  $AB$  и  $AC$  и радиусами  $R_1 = 2$  см и  $R_2 = 6$  см соответственно (рис. 10.64).  $O_3$  — центр окружности искомого радиуса  $x$  см,  $x > 0$ . Тогда  $O_1O_3 = (x + 2)$  см,

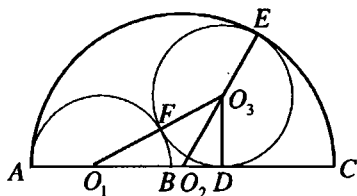


Рис. 10.64

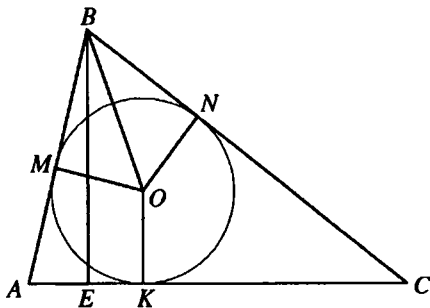


Рис. 10.65

$O_1O_2 = R_2 - R_1 = 4$  см,  $O_2O_3 = (6 - x)$  см.  $D$  — точка касания окружности с центром  $O_3$  и  $AC$ . Тогда  $O_3D \perp AC$ ,  $O_3D = x$  см. В  $\Delta O_1O_2O_3$  полупериметр  $p = \frac{O_1O_3 + O_2O_3 + O_1O_2}{2} = 6$  см. Тогда его площадь

$$S = \sqrt{p(p - O_1O_3)(p - O_1O_2)(p - O_2O_3)} = \sqrt{6(6 - x - 2)(6 - 4)(6 - 6 + x)} = \sqrt{12x(4 - x)}.$$

С другой стороны,  $S = \frac{1}{2} O_1O_2 \cdot O_3D = 2x$ . Тогда  $\sqrt{12x(4 - x)} = 2x$ ;  
 $3x(4 - x) = x^2$ ;  $x = 3$ .

*Ответ:* 3 см.

**10.260.** Сторона треугольника равна 48 см, а высота, проведенная к этой стороне, равна 8,5 см. Найти расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник, до вершины, противолежащей данной стороне, если радиус вписанной окружности равен 4 см.

*Решение.*

В  $\Delta ABC$  (рис. 10.65)  $AC = 48$  см,  $BE$  — высота,  $BE = 8,5$  см,  $O$  — центр вписанной окружности,  $M, N, K$  — точки касания этой окружности соответственно со сторонами  $AB, BC, AC$  треугольника. Тогда  $ON \perp BC$ ,  $ON = 4$  см,  $AM = AK$ ,  $CK = CN$ ,  $BM = BN$ . Площадь треугольника  $ABC$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BE = 204 \text{ см}^2. \text{ Тогда его полупериметр } p = \frac{S}{ON} = 51 \text{ см.}$$

Но  $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = AK + KC + BN = AC + BN$ . Следовательно,

$$BN = p - AC = 3 \text{ см. Из } \Delta BNO (\angle BNO = 90^\circ): OB = \sqrt{BN^2 + ON^2} = 5 \text{ см.}$$

*Ответ:* 5 см.

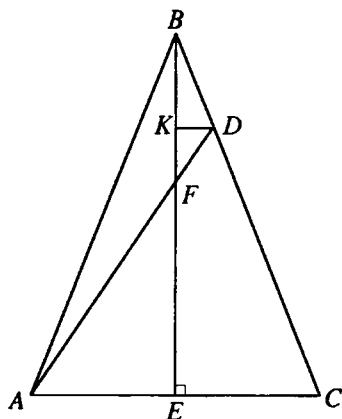


Рис. 10.66

**10.261.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = BC$ ) на стороне  $BC$  взята точка  $D$  так, что  $BD : DC = 1 : 4$ . В каком отношении прямая  $AD$  делит высоту  $BE$  треугольника  $ABC$ , считая от вершины  $B$ ?

*Решение.*

Пусть  $AD$  пересекает  $BE$  в точке  $F$  (рис. 10.66). Проведем  $DK \parallel AC$ . Так как

$$\triangle BCE \sim \triangle BDK, \text{ то } \frac{BK}{BE} = \frac{KD}{EC} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{5},$$

откуда  $BK = \frac{1}{5}BE$ ,  $KD = \frac{1}{5}EC$ . Так как

$$\triangle KFD \sim \triangle AFE, \text{ то } \frac{KD}{AE} = \frac{KF}{FE} = \frac{1}{5}. \text{ Пусть } KF = x; \text{ тогда } FE = 5x \text{ и}$$

$$BK + x + 5x = BE, \text{ откуда } BK + 6x = 5BK \text{ или } 6x = 4BK, \text{ т.е. } BK = \frac{3x}{2}.$$

$$\text{Выразим } BF \text{ через } x: BF = BK + x = \frac{3x}{2} + x = \frac{5x}{2}. \text{ Но } FE = 5x \text{ и, значит,}$$

$$BF : FE = 1 : 2.$$

*Ответ:* 1:2.

**10.262.** В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, равна  $h$ ; радиус вписанной окружности равен  $r$ . Найти гипотенузу.

*Решение.*

Пусть  $a$  и  $b$  — катеты,  $c$  — гипотенуза,  $p$  — полупериметр данного треугольника.  $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - c = p - c$ ;  $p = r + c$ . Площадь тре-

$$\text{угольника } S = \frac{1}{2}ch = pr. \text{ Тогда } \frac{1}{2}ch = (r+c)r; c(h-2r) = 2r^2; c = \frac{2r^2}{h-2r}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2r^2}{h-2r}.$$

**10.263.** Медианы треугольника равны 5,  $\sqrt{52}$  и  $\sqrt{73}$  см. Доказать, что треугольник прямоугольный.

*Решение.*

Обозначим стороны треугольника через  $a, b, c$ , а проведенные к ним медианы —  $m_a, m_b, m_c$  ( $m_a = 5, m_b = \sqrt{52}, m_c = \sqrt{73}$ ). По формуле, выражающей сторону треугольника через его медианы, имеем:

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2} = \frac{2}{3} \sqrt{2(52 + 73) - 25} = 10.$$

Аналогично  $b = \frac{2}{3} \sqrt{2(25 + 73) - 52} = 8, c = \frac{2}{3} \sqrt{2(25 + 52) - 73} = 6$ . Та-

ким образом,  $a^2 = b^2 + c^2$ , следовательно, данный треугольник прямоугольный. Что и требовалось доказать.

**10.264.** Показать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма полупериметра и радиуса вписанной окружности равна сумме катетов.

*Решение.*

Пусть  $a, b, c, p$  — соответственно катеты, гипотенуза и полупериметр треугольника,  $r$  — радиус вписанной окружности. Тогда  $p + r =$

$$= \frac{a+b+c}{2} + r = \frac{a+b}{2} + \frac{c}{2} + r. \text{ Рассмотрим сумму } \frac{c}{2} + r. \text{ Так как пло-}$$

щадь треугольника  $S = \frac{ab}{2} = pr$ , то  $r = \frac{ab}{2p}$ , откуда

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} + r &= \frac{c}{2} + \frac{ab}{2p} = \frac{pc + ab}{2p} = \frac{ac + bc + c^2 + 2ab}{4p} = \frac{ac + bc + a^2 + b^2 + 2ab}{4p} = \\ &= \frac{c(a+b) + (a+b)^2}{4p} = \frac{(a+b)(a+b+c)}{4p} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2p} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

**10.265.** Показать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма диаметров описанной и вписанной окружностей равна сумме его катетов.

*Решение.*

Пусть  $a, b$  — катеты,  $c$  — гипотенуза,  $R$  — радиус описанной окружности,  $r$  — радиус вписанной окружности. Как известно,  $R = \frac{c}{2}$ ,

$r = \frac{a+b-c}{2}$ , тогда  $2R + 2r = c + 2 \cdot \frac{a+b-c}{2} = c + a + b - c = a + b$ . Что и требовалось доказать.

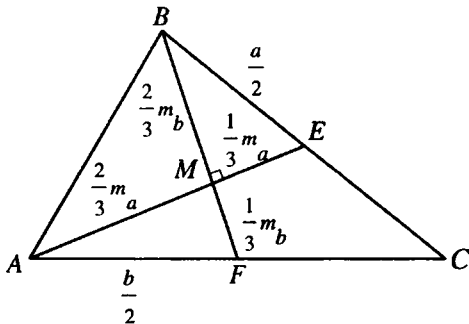


Рис. 10.67

**10.266.** Найти третью сторону остроугольного треугольника, если две его стороны равны  $a$  и  $b$  и известно, что медианы этих сторон пересекаются под прямым углом.

*Решение.*

По условию  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AE$  и  $BF$  — медианы,  $\angle AMF = 90^\circ$  (рис. 10.67). Положим  $AE = m_a$ ,  $BF = m_b$ . Тогда в  $\triangle BME$  и  $\triangle AMF$  соот-

ветственно имеем  $\frac{m_a^2}{9} + \frac{4m_b^2}{9} = \frac{a^2}{4}$ ,  $\frac{4m_a^2}{9} + \frac{m_b^2}{9} = \frac{b^2}{4}$ . Складывая эти равен-

ства, получаем  $\frac{5(m_a^2 + m_b^2)}{9} = \frac{a^2 + b^2}{4}$  или  $m_a^2 + m_b^2 = \frac{9(a^2 + b^2)}{20}$ . Из  $\triangle AMB$

имеем  $AB^2 = \frac{4(m_a^2 + m_b^2)}{9} = \frac{a^2 + b^2}{5}$ , откуда  $AB = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$ .

*Ответ:*  $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$ .

**10.267.** На отрезке  $AB$  взята точка  $C$  и на частях  $AC$  и  $CB$  отрезка  $AB$  как на диаметрах построены полуокружности. Доказать, что сумма длин этих полуокружностей не зависит от положения точки  $C$  на отрезке  $AB$ .

*Решение.*

Пусть длина отрезка  $AB$  равна  $2l$ . Обозначим радиус одной из окружностей через  $x$ ; тогда радиус второй окружности равен  $l - x$ . Сумма длин полуокружностей составляет  $L = \pi x + \pi(l - x) = \pi l$ , т.е. не зависит от  $x$ . Что и требовалось доказать.

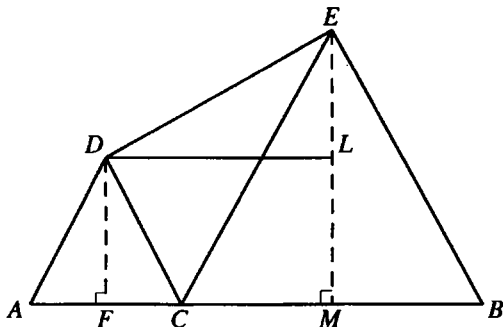


Рис. 10.68

**10.268.** Точка  $C$  перемещается по отрезку  $AB$  длиной  $l$ . На отрезках  $AC$  и  $CB$  как на основаниях построены правильные треугольники по одну сторону от  $AB$ . Где нужно взять точку  $C$ , чтобы расстояние между вершинами треугольников было наименьшим?

*Решение.*

Пусть  $AC = x$ ; тогда  $CB = l - x$  (рис. 10.68). Проведем  $DL \parallel AB$  и опустим перпендикуляры на  $AB$  из точек  $D$  и  $E$ . Так как треугольники  $ADC$  и  $CEB$  — правильные, то  $DL = FM = FC + CM = \frac{x}{2} + \frac{l-x}{2} = \frac{l}{2}$ ,

$$EL = \frac{(l-x)\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{(l-2x)\sqrt{3}}{2}. \text{ Следовательно, } DE^2 = \frac{l^2}{4} + \frac{3(l-2x)^2}{4}.$$

Расстояние  $DE$  является наименьшим при  $l - 2x = 0$ , откуда  $x = l/2$ , т.е. точку  $C$  следует взять в середине отрезка  $AB$ .

*Ответ:* в середине отрезка  $AB$ .

**10.269.** Высоты треугольника равны 12, 15 и 20 см. Доказать, что треугольник прямоугольный.

*Решение.*

Пусть площадь треугольника равна  $S$ . Тогда его стороны:  $a = \frac{2S}{15}$ ,  $b = \frac{2S}{20}$ ,  $c = \frac{2S}{12}$ . Имеем  $a^2 + b^2 = 4S^2 \left( \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} \right) = 4S^2 \left( \frac{1}{225} + \frac{1}{400} \right) = \frac{4S^2}{25} \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \right) = \frac{4S^2}{144}$ , откуда  $a^2 + b^2 = c^2$ , т.е. треугольник прямоугольный. Что и требовалось доказать.

**10.270.** Найти отношение суммы квадратов всех медиан треугольника к сумме квадратов всех его сторон.

*Решение.*

Пусть  $a, b, c$  — стороны треугольника,  $m_a, m_b, m_c$  — медианы, проведенные к этим сторонам. Воспользуемся формулами:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}, \quad m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

$$\text{Тогда } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{4} (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) =$$

$$= \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2). \text{ Отсюда } \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}.$$

*Ответ:*  $\frac{3}{4}$ .

**10.271.** Найти площадь треугольника, если его высоты равны 12, 15 и 20 см.

*Решение.*

Данная задача может рассматриваться как продолжение задачи № 10.269.

Имеем: треугольник — прямоугольный, высоты  $h_a, h_b$  — его катеты. Пло-

щадь треугольника  $S = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 15 \sqrt{a^2 + c^2}$

*Ответ:*  $150 \text{ см}^2$ .

**10.272.** Числа  $m_1, m_2$  и  $m_3$  выражают длины медиан некоторого треугольника. Показать, что если выполняется равенство  $m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$ , то треугольник является прямоугольным.

*Решение.*

Обозначим стороны треугольника через  $a, b, c$ . Тогда  $4m_1^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$ ,  $4m_2^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2$  (см. дополнительные соотношения  $(b^2 + c^2)$  и эти равенства, получим  $4(m_1^2 + m_2^2) = 4c^2 + a^2 + b^2$ . По условию  $m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$ . Но  $4m_3^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$  и, значит,  $\frac{4c^2 + a^2 + b^2}{4} = \frac{5(2(a^2 + b^2) - c^2)}{4}$ , откуда  $4c^2 + a^2 + b^2 = 10(a^2 + b^2) - 5c^2$  или  $c^2 = a^2 + b^2$ , т.е. треугольник прямоугольный. Что и требовалось доказать.

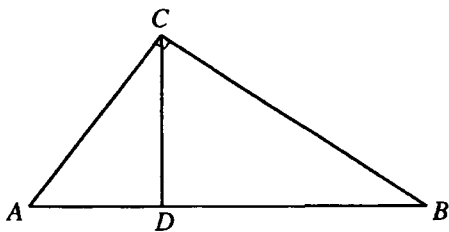


Рис. 10.69

**10.273.** Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника с площадями  $Q$  и  $q$ . Найти катеты.

*Решение.*

В  $\triangle ABC$  (рис. 10.69)  $\angle ACD = 90^\circ$ ,  $CD$  — высота,  $S_{\triangle BDC} = Q$ ,  $S_{\triangle ADC} = q$ .

Из подобия  $\triangle BDC$  и  $\triangle ADC$  следует, что  $\frac{AD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot CD}{\frac{1}{2}BD \cdot CD} = \frac{q}{Q}$ .

Пусть  $AD = qx$ , тогда  $BD = Qx$ .  $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = x\sqrt{qQ}$ .

$$S_{\triangle ADC} = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{qx \cdot x\sqrt{qQ}}{2} = \frac{x^2 q \sqrt{qQ}}{2} = q, \text{ отсюда } x^2 = \frac{2}{\sqrt{qQ}}.$$

$$AC = \sqrt{AB \cdot AD} = \sqrt{(qx + Qx) \cdot qx} = \sqrt{\frac{2q(Q+q)}{\sqrt{qQ}}} = \sqrt{2(Q+q)} \sqrt{\frac{q}{Q}}.$$

$$BC = \sqrt{AB \cdot BD} = \sqrt{2(Q+q)} \sqrt{\frac{Q}{q}}.$$

Ответ:  $\sqrt{2(Q+q)} \sqrt{\frac{q}{Q}}, \sqrt{2(Q+ )} \sqrt{\frac{Q}{q}}$ .

**10.274.** Числа  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$  выражают длины высот некоторого треугольника. Показать, что если выполняется равенство  $(h_1/h_2)^2 + (h_1/h_3)^2 = 1$ , то треугольник является прямоугольным.



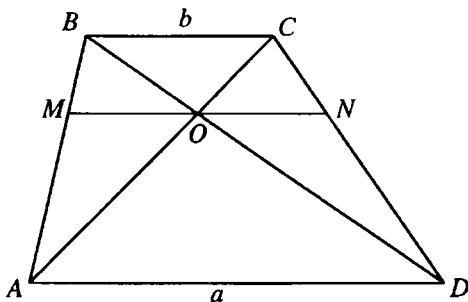


Рис. 10.70

*Решение.*

Пусть  $a, b, c$  — стороны треугольника, которым соответствуют высоты  $h_1, h_2, h_3$ . Воспользуемся тем, что высоты треугольника обратно пропорциональны соответствующим сторонам:  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{b}{a}$ ;  $\frac{h_1}{h_3} = \frac{c}{a}$ . Подставив эти отношения в данное по условию равенство, получаем  $\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$ ;  $b^2 + c^2 = a^2$ , следовательно, данный треугольник — прямоугольный. Что и требовалось доказать.

**10.275.** Через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям проведена прямая, пересекающая боковые стороны в точках  $M$  и  $N$ . Доказать, что  $MN = 2ab/(a+b)$ , где  $a$  и  $b$  — длины оснований.

*Решение.*

Пусть  $AD = a$ ,  $BC = b$  (рис. 10.70). Так как  $\triangle MBO \sim \triangle ABD$ , то  $\frac{MO}{a} = \frac{BO}{BD}$ ,  $MO = a \cdot \frac{BO}{BD}$ . Аналогично  $\triangle OND \sim \triangle BCD$ , откуда  $\frac{ON}{b} = \frac{OD}{BD}$ ,  $ON = b \cdot \frac{OD}{BD}$ . Тогда  $MN = MO + ON = \frac{a \cdot BO + b \cdot OD}{BD} = \frac{2a \cdot BO}{BD}$ , так как  $\triangle AOD \sim \triangle BOC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{OD}{BO}$ ,  $a \cdot BO = b \cdot OD$ . Учитывая, что  $BD = BO + OD$ , окончательно получаем, что

$$MN = \frac{2a \cdot BO}{BO + OD} = \frac{2a \cdot}{1 + \frac{OD}{BO}} = \frac{2a}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{2ab}{a+b}. \text{ Что и требовалось доказать.}$$

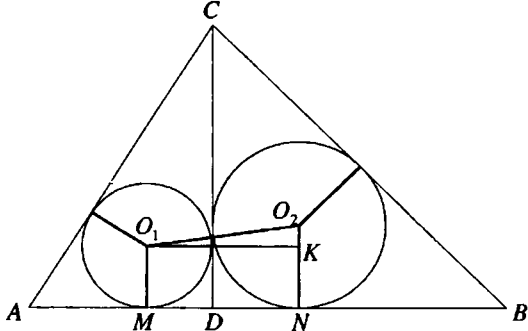


Рис. 10.71

**10.276.** Прямоугольный треугольник  $ABC$  разделен высотой  $CD$ , проведенной к гипотенузе, на два треугольника  $BDC$  и  $ADC$ . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $BDC$  и  $ADC$ , равны соответственно 4 и 3 см. Найти расстояние между их центрами.

*Решение.*

Пусть  $O_2$  — центр окружности, вписанной в  $\triangle BDC$ ,  $O_1$  — центр окружности, вписанной в  $\triangle ADC$  (рис. 10.71),  $N$  и  $M$  — точки касания этих окружностей с прямой  $AB$ . Тогда  $O_2N \perp AB$ ,  $O_1M \perp AB$ ,  $O_2N = r_2 = 4$  см,  $O_1N = r_1 = 3$  см. Опустим перпендикуляр  $O_1K$  на  $O_2N$ . Тогда  $O_2K = r_2 - r_1 = 1$  см,  $O_1K = r_2 + r_1 = 7$  см. Из  $\triangle O_1KO_2$  ( $\angle O_1KO_2 = 90^\circ$ ):  $O_1O_2 = \sqrt{O_1K^2 + O_2K^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$  см.

*Ответ:*  $5\sqrt{2}$  см.

**10.277.** Найти биссектрису прямого угла треугольника, у которого катеты равны  $a$  и  $b$ .

*Решение.*

В  $\triangle ABC$  (рис. 10.72)  $\angle C = 90^\circ$ ,  $CB = a$ ,  $CA = b$ ,  $CK$  — биссектриса  $\angle BCA$ . Пусть  $CK = x$ .  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CBK} + S_{\triangle ACK}$ ;  $\frac{1}{2}AC \cdot CB =$   
 $= \frac{1}{2}AC \cdot CK \sin \angle ACK + \frac{1}{2}BC \cdot CK \sin \angle BCK$ . Тогда  $ab = bx \sin 45^\circ + ax \sin 45^\circ$ ,

$$x = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

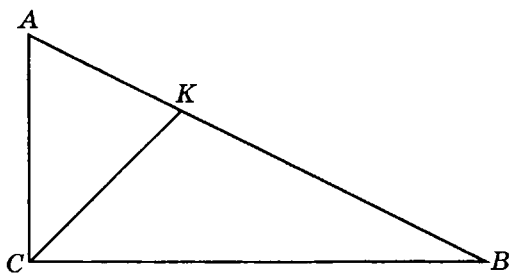


Рис. 10.72

Ответ:  $x = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$ .

**10.278.** Дан квадрат, сторона которого равна  $a$ . Определить стороны равновеликого ему равнобедренного треугольника, у которого сумма длин основания и высоты, опущенной на него, равна сумме длин двух боковых сторон.

*Решение.*

Пусть  $x$  — основание,  $z$  — боковая сторона,  $y$  — высота, проведенная

к основанию искомого треугольника. По условию  $\begin{cases} \frac{1}{2}xy = a^2, \\ x + y = 2z, \end{cases}$  по теореме

Пифагора (рис. 10.73)  $y^2 + \frac{x^2}{4} = z^2$ . Таким образом, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 2a^2, \\ x + y = 2z, \\ y^2 + \frac{x^2}{4} = z^2, \end{cases} \begin{cases} z = \frac{1}{2}(x + y), \\ xy = 2a^2, \\ 4y^2 + x^2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}(x + y)\right)^2, \end{cases} \begin{cases} z = \frac{1}{2}(x + y), \\ xy = 2a^2, \\ 4y^2 + x^2 = x^2 + 2xy + y^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}(x + y), \\ xy = 2a^2, \\ 3y^2 = 4a^2, \end{cases} \begin{cases} y = \frac{2a\sqrt{3}}{3}, \\ x = \frac{2a^2}{y} = a\sqrt{3}, \\ z = \frac{1}{2}\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3} + a\sqrt{3}\right) = \frac{5a\sqrt{3}}{6}. \end{cases}$$

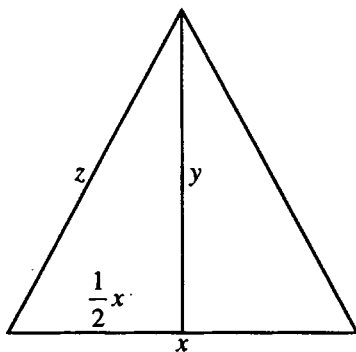


Рис. 10.73

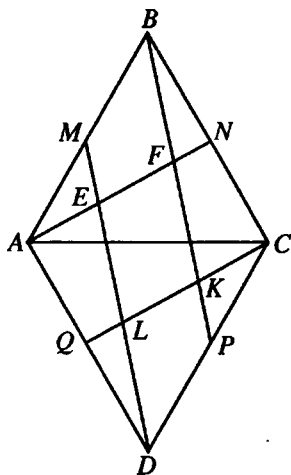


Рис. 10.74

Ответ:  $a\sqrt{3}$ ,  $\frac{5a\sqrt{3}}{6}$ ,  $\frac{5a\sqrt{3}}{6}$ .

10.279. Точки  $M, N, P, Q$  являются серединами сторон  $AB, BC, CD$  и  $DA$  ромба  $ABCD$ . Вычислить площадь фигуры, являющейся пересечением четырехугольников  $ABCD, ANCQ$  и  $BPDM$ , если площадь ромба равна  $100 \text{ см}^2$ .

Решение.

Пусть  $E$  и  $F$  — точки пересечения отрезка  $AN$  соответственно с  $DM$  и  $BP$ , а  $K$  и  $L$  — точки пересечения отрезка  $CQ$  соответственно с  $BP$  и  $DM$  (рис. 10.74).

$\Delta AQC = \Delta ANC$  (по двум сторонам и углу между ними), следовательно,  $\angle QCA = \angle NAC$ , тогда  $AN \parallel CQ$ . Аналогично  $DM \parallel BP$ . Таким образом,

$EFKL$  — параллелограмм.  $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 50$ .  $S_{\Delta CQD} = \frac{1}{2} S_{\Delta ACD} = 25$ .

Так как  $PD = PC$  и  $BP \parallel DM$ , то  $CK = LK$ , аналогично  $DL = EL$ ,  $AE = FE$ . Следовательно,  $QL$  — средняя линия  $\Delta ADE$ , т.е.

$QL = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2} KL$ . Тогда  $QL = \frac{1}{5} CQ$ ,  $S_{\Delta DQL} = \frac{1}{5} S_{\Delta DCQ} = 5$ . Пусть

$$\angle ELK = \alpha, \text{ тогда и } \angle DLQ = \alpha. \frac{S_{EFKL}}{S_{DQL}} = \frac{EL \cdot LK \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} DL \cdot QL \cdot \sin \alpha} = \frac{DL \cdot LK}{4} = 4.$$

Отсюда имеем  $S_{EFKL} = 4S_{\Delta DQL} = 20$ .

Ответ:  $20 \text{ см}^2$ .

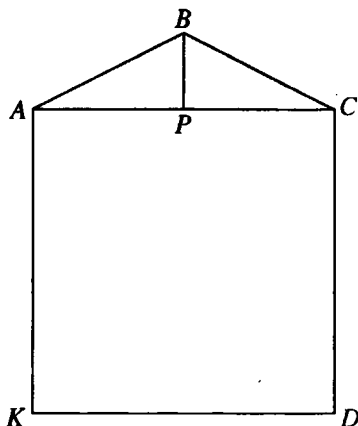


Рис. 10.75

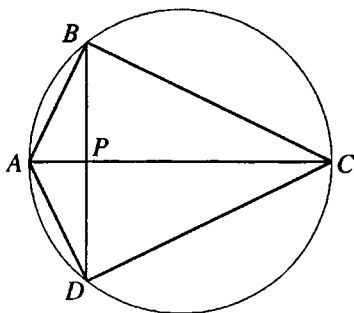


Рис. 10.76

**10.280.** Определить углы равнобедренного треугольника, если его площадь относится к площади квадрата, построенного на основании, как  $\sqrt{3} : 12$ .

*Решение.*

Пусть  $ACDK$  — данный по условию квадрат (рис. 10.75),  $ABC$  — данный по условию треугольник,  $AB = BC$ ,  $BP$  — высота  $\triangle ABC$ . Обозначим  $AC = a$ ,  $BP = h$ ,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah$ ,  $S_{ACDK} = a^2$ . По условию  $\frac{ah}{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

или  $\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ . Из прямоугольного  $\triangle ABP$ :  $\operatorname{tg} \angle BAP = \frac{BP}{AP} = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Сле-

довательно,  $\angle BAP = \angle BCP = 30^\circ$ ,  $\angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

*Ответ:*  $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ .

**10.281.** В окружность вписан четырехугольник с углами  $120, 90, 60$  и  $90^\circ$ .

Площадь четырехугольника равна  $9\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>. Найти радиус окружности, если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны.

*Решение.*

Пусть  $ABCD$  — четырехугольник, о котором говорится в условии задачи (рис. 10.76),  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ,  $\angle BAD = 120^\circ$ ,  $\angle BCD = 60^\circ$ .  $P$  — точка пересечения  $AC$  и  $BD$ ,  $AC \perp BD$ . Так как  $\angle ABC = 90^\circ$ , то  $AC$  —

диаметр данной окружности.  $BP$  — высота прямоугольного  $\triangle ABC$ . Тогда  $\angle ABD = \angle ACB$ .  $\angle ABD$  и  $\angle ACD$  — вписанные и опираются на хорду  $AD$ .

Тогда  $\angle ABD = \angle ACD$ . Следовательно,  $\angle ACB = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle BCD = 30^\circ$ . Тогда

$$\triangle ABC = \triangle ADC \text{ (по гипотенузе и острому углу), } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ см}^2.$$

Пусть  $AB = a$ . Тогда  $BC = AB \operatorname{ctg} \angle ACB = a\sqrt{3}$  и  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ .

Следовательно,  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ ,  $a = 3$ . Искомый радиус  $R = \frac{1}{2} AC = AB = 3$  см.

Ответ: 3 см.

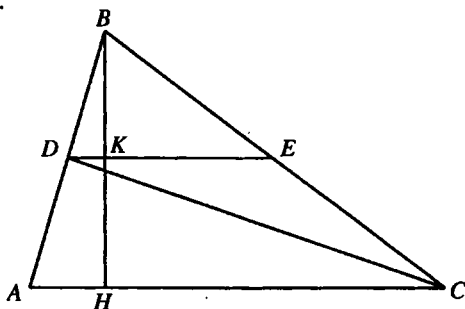


Рис. 10.77

10.282. В треугольнике  $ABC$  проведена прямая  $DE$ , параллельная основанию  $AC$ . Площадь треугольника  $ABC$  равна 8 кв. ед., а площадь треугольника  $DEC$  равна 2 кв. ед. Найти отношение длины отрезка  $DE$  к длине основания треугольника  $ABC$ .

Решение.

Имеем  $S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} DE \cdot HK = 2$  (рис. 10.77) и  $HK = \frac{4}{DE}$ ;  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = 8$ , откуда  $BH = \frac{16}{AC}$ . Так как  $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ , то  $\frac{DE}{AC} = \frac{BK}{BH}$ .

Далее  $BK = BH - HK$  и, значит,

$$\frac{BK}{BH} = \frac{BH - HK}{BH} = 1 - \frac{HK}{BH} = 1 - \frac{4}{DE} \cdot \frac{16}{AC} = 1 - \frac{AC}{4DE}.$$

Пусть  $\frac{DE}{AC} = x$ . Тогда  $x = 1 - \frac{1}{4x}$  или  $4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ . Полу-

чили  $\frac{DE}{AC} = \frac{1}{2}$ .

Ответ: 1:2.

**10.283.** Площадь прямоугольного треугольника равна  $24 \text{ см}^2$ , а гипотенуза равна  $10 \text{ см}$ . Найти радиус вписанной окружности.

Решение.

Пусть  $a$  и  $b$  — катеты треугольника. Имеем систему  $\begin{cases} ab = 48, \\ a^2 + b^2 = 100, \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 196$ ,  $a^2 - 2ab + b^2 = 4$ ,  $\Rightarrow a + b = 14$ ,  $a - b = 2$  и, следовательно,  $a = 8 \text{ (см)}$ ,  $b = 6 \text{ (см)}$ . Так как  $S = pr$ , то  $24 = 12r$ ,  $r = 2 \text{ (см)}$ .

Ответ:  $2 \text{ см}$ .

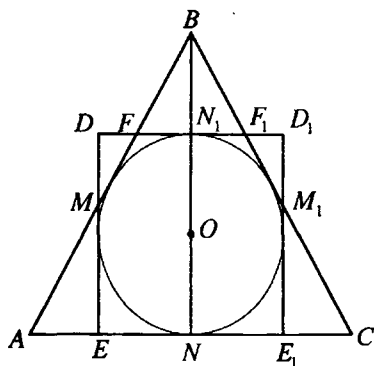


Рис. 10.78

**10.284.** Около круга радиуса  $R$  описаны квадрат и равносторонний треугольник, причем одна из сторон квадрата лежит на стороне треугольника. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

Решение.

$\triangle ABC$  и квадрат  $EDD_1E_1$  (рис. 10.78) те, о которых говорится в условии задачи,  $BN$  — высота  $\triangle ABC$ ,  $O$  — центр данной окружности,  $M$  и  $F$  — точки пересечения  $AB$ ,  $M_1$  и  $F_1$  — точки пересечения  $BC$  со сто-

ронами квадрата,  $N_1$  — точка касания  $DD_1$  с окружностью и пересечения  $DD_1$  с  $BN$ . Шестиугольник  $EMFF_1M_1E_1$  — фигура искомой площади  $S$ .  $S = S_{EDD_1E_1} - (S_{\triangle MDF} + S_{\triangle M_1D_1F_1}) = S_{EDD_1E_1} - 2S_{\triangle MDF}$ .  $BN = 3R$ ;  $NN_1 = 2R$ ;  $BN_1 = R$ ;  $DN_1 = R$ .

Из  $\triangle BN_1F$  ( $\angle BN_1F = 90^\circ$ ):  $FN_1 = BN_1 \operatorname{tg} \angle FBN_1 = R \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ ,

$$DF = DN_1 - FN_1 = R - \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{R(3-\sqrt{3})}{3}, \quad \angle DFM = \angle BFF_1 = 60^\circ. \text{ Из } \triangle MDF$$

$$(\angle MDF = 90^\circ): MD = DF \operatorname{tg} \angle DFM = \frac{R(3-\sqrt{3})}{3} \cdot \sqrt{3} = R(\sqrt{3}-1).$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle MDF} &= \frac{1}{2} DF \cdot DM = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3} \cdot R(\sqrt{3}-1) = \\ &= \frac{R^2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^2}{6} = \frac{R^2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{3}; S_{EDD_1E_1} = 4R^2. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } S = 4R^2 - \frac{2R^2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{3} = R^2 \cdot \frac{12-4\sqrt{3}+6}{3} = \frac{R^2\sqrt{3}(6\sqrt{3}-4)}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{R^2\sqrt{3}(6\sqrt{3}-4)}{3}.$$

**10.285.** В круге радиуса  $R$  проведены по разные стороны от центра две параллельные хорды, одна из которых стягивает дугу в  $60^\circ$ , другая —  $120^\circ$ . Найти площадь части круга, заключенной между хордами.

*Решение.*

Площадь сегмента с дугой  $60^\circ$  равна  $S_1 = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ , а площадь сегмента с дугой  $120^\circ$  равна  $S_2 = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ . Искомая площадь

$$S = \pi R^2 - S_1 - S_2 = \frac{R^2(\pi + \sqrt{3})}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{R^2(\pi + \sqrt{3})}{2}.$$

**10.286.** Две окружности радиусов  $r$  и  $3r$  внешне касаются. Найти площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей внешней касательной.

*Решение.*

Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей радиусов  $r$  и  $3r$  соответственно (рис. 10.79),  $AB$  — их общая внешняя касательная,  $A$  и  $B$  — точки касания. Тогда  $O_1A \perp AB$ ,  $O_2B \perp AB$ ,  $O_1A = r$ ,  $O_2B = 3r$ ,  $O_1O_2 = 4r$ .  $P$  — точка касания данных окружностей. Тогда искомая площадь



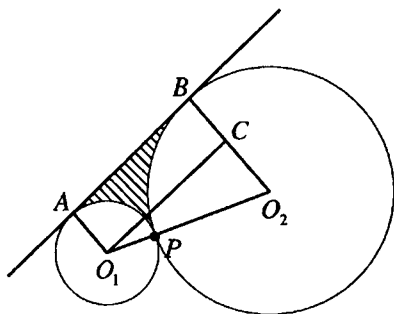


Рис. 10.79

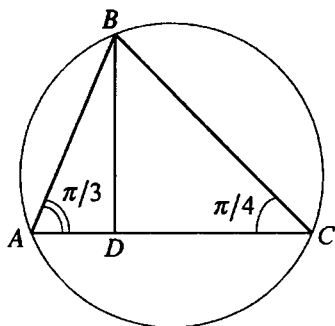


Рис. 10.80

$S = S_1 - (S_2 + S_3)$ , где  $S_1$  — площадь трапеции  $O_1ABO_2$ ,  $S_2$  — площадь сектора  $AO_1P$ ,  $S_3$  — площадь сектора  $BO_2P$ .  $O_1C$  — высота трапеции  $O_1ABO_2$ . Следовательно,  $BC = AO_1 = r$ ,  $CO_2 = BO_2 - BC = 2r$ . Отсюда  $\angle CO_1O_2 = 30^\circ$ ,  $\angle CO_2O_1 = 60^\circ$ ,  $O_1C = 2r\sqrt{3}$ ,  $\angle AO_1O_2 = 120^\circ$ .

$$S_1 = \frac{AO_1 + BO_2}{2} \cdot O_1C = 4r^2\sqrt{3}, \quad S_2 = \frac{\pi r^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi r^2}{3}, \quad S_3 = \frac{\pi(3r)^2 \cdot 60}{360} = \frac{3\pi r^2}{2}.$$

$$\text{Тогда } S = 4r^2\sqrt{3} - \left( \frac{\pi r^2}{3} + \frac{3\pi r^2}{2} \right) = \frac{r^2(24\sqrt{3} - 11\pi)}{6}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{r^2(24\sqrt{3} - 11\pi)}{6}.$$

**10.287.** Найти площадь треугольника, вписанного в круг радиуса 2 см, если два угла треугольника равны  $\pi/3$  и  $\pi/4$ .

*Решение.*

Так как  $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$  (рис. 10.80), то  $AB = 2\sqrt{2}$  см (сторона вписанного

квадрата). Проведем  $BD \perp AC$ . Учитывая, что  $\angle ABD = \frac{\pi}{6}$ , имеем

$AD = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}$  (см); далее, так как  $\triangle BDC$  — равнобедренный, то

$$DC = BD = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{6} \text{ см. Значит, } AC = AD + DC = \sqrt{2} + \sqrt{6} \text{ (см).}$$

$$\text{Получаем: } S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \sqrt{6} = (1 + \sqrt{3}) \sqrt{3} = \sqrt{3} + 3 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ:  $(\sqrt{3} + 3) \text{ см}^2$ .

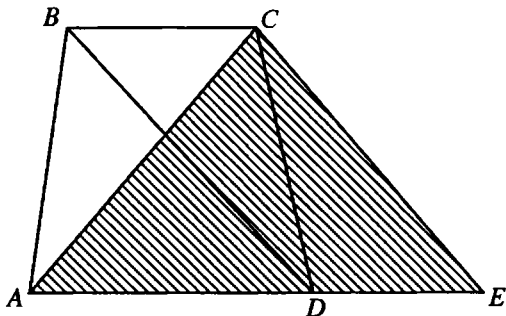


Рис. 10.81

**10.288.** Найти площадь трапеции, диагонали которой равны 7 и 8 см, а основания — 3 и 6 см.

*Решение.*

Пусть в трапеции  $ABCD$  (рис. 10.81)  $BC \parallel AD$ ,  $BC = 3$  см,  $AD = 6$  см,  $AC = 7$  см,  $BD = 8$  см. Проведем  $CE \parallel BD$ . Тогда  $AE = AD + DE = AD + BC = 9$  см,  $CE = BD$ . Следовательно, трапеция  $ABCD$  и треугольник  $ACE$  имеют равные площади (у них равны высоты и основание треугольника равно сумме оснований трапеции). По формуле Герона площадь треугольника  $S = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5} \text{ см}^2$ .

Ответ:  $12\sqrt{5} \text{ см}^2$ .

**10.289.** В ромб со стороной  $a$  и острым углом  $60^\circ$  вписана окружность. Определить площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки касания окружности со сторонами ромба.

*Решение.*

Радиус вписанной в ромб  $ABCD$  окружности (рис. 10.82)  $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ , так как  $\angle A = 60^\circ$ . Четырехугольник  $KLMN$  является прямоугольником, так

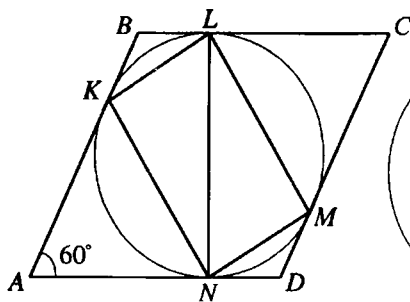


Рис. 10.82

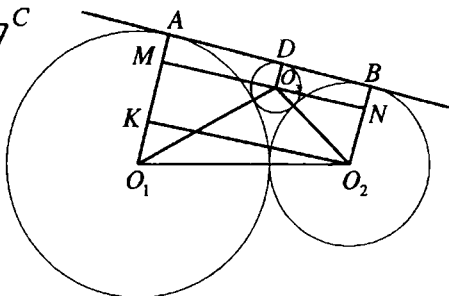


Рис. 10.83

как его углы опираются на диаметр окружности. Его площадь  $S = MN \cdot LM$ , где  $MN = R$  (катет, лежащий против угла  $30^\circ$ ),  $LM = R\sqrt{3}$ . Получили

$$S = R^2 \sqrt{3} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{16}.$$

Ответ:  $\frac{3a^2 \sqrt{3}}{16}$ .

**10.290.** Две окружности радиусов  $R$  и  $r$  касаются внешним образом. К этим окружностям проведена общая внешняя касательная, и в образовавшийся при этом криволинейный треугольник вписан круг. Найти его площадь.

*Решение.*

$A$  и  $B$  — точки касания общей внешней касательной с касающимися окружностями соответственно с центром  $O_1$  радиуса  $R$  и с центром  $O_2$  радиуса  $r$ ,  $R > r$  (рис. 10.83). Тогда  $O_1O_2 = R + r$ ,  $O_1A \perp AB$ ,  $O_1A = R$ ,  $O_2B = r$ ,  $O_1A \parallel O_2B$ .  $O_3$  — центр круга искомой площади, о котором говорится в условии задачи. Через точки  $O_2$  и  $O_3$  проведем прямые  $MN$  и  $O_2K$ , параллельные  $AB$ . Тогда  $O_2K \perp O_1A$ ,  $MN \perp O_1A$ ,  $O_1K = R - r$ .  $D$  — точка касания окружности с центром  $O_3$  и  $AB$ . Тогда  $O_3D \perp AB$ ,  $O_3D = x$ .  $O_1M = O_1A - AM = R - x$ ,  $O_2O_3 = r + x$ ,  $O_1O_3 = R + x$ ,  $O_2N = r - x$ . Из  $\triangle O_1MO_3$  ( $\angle O_1MO_3 = 90^\circ$ ):  $O_3M = \sqrt{O_1O_3^2 - O_1M^2} = \sqrt{(R+x)^2 - (R-x)^2} = 2\sqrt{Rx}$ . Из  $\triangle O_2NO_3$  ( $\angle O_2NO_3 = 90^\circ$ ):  $O_3N = \sqrt{O_2O_3^2 - O_2N^2} = \sqrt{(r+x)^2 - (r-x)^2} = 2\sqrt{rx}$ .

Из  $\Delta O_1KO_2$  ( $\angle O_1KO_2 = 90^\circ$ ):  $O_2K = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1K^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$ .

Так как  $KO_2 = MN = MO_3 + O_3N$ , то  $2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx}$ ;

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}}; \quad x = \frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}.$$

Искомая площадь круга  $S = \pi x^2 = \frac{\pi R^2 r^2}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^4}$ .

Ответ:  $\frac{\pi R^2 r^2}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^4}$ .

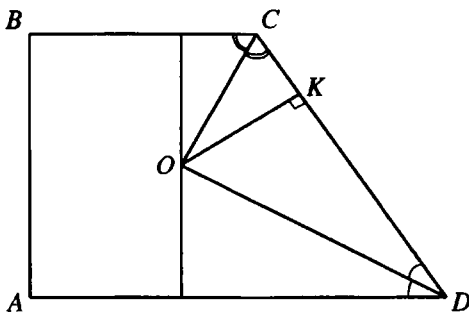


Рис. 10.84

**10.291.** Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 1 и 2 см. Найти площадь трапеции.

*Решение.*

Пусть в трапеции  $ABCD$  (рис. 10.84)  $BC \parallel AD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $O$  — центр вписанной окружности,  $CO = 1$  см,  $DO = 2$  см. Тогда  $CO$  и  $DO$  — биссектрисы соответственно  $\angle BCD$  и  $\angle ADC$ . Так как  $\angle BCD + \angle ADC = 180^\circ$ , то  $\angle OCD + \angle ODC = \frac{1}{2} \angle BCD + \frac{1}{2} \angle ADC = 90^\circ$  и  $\angle COD = 90^\circ$ ,  $CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{5}$  см.  $K$  — точка касания вписанной окружности со стороной  $CD$  трапеции. Тогда  $OK$  — радиус этой окружности и высота прямоугольного  $\Delta COD$ . Следовательно,  $OK = \frac{OC \cdot OD}{CD} = \frac{2}{\sqrt{5}}$  см.

$AB = 2 \cdot OK = \frac{4}{\sqrt{5}}$  см. Так как в данную трапецию вписана окружность,

$$\text{то } BC + AD = AB + CD = \frac{4}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} = \frac{9}{\sqrt{5}} \text{ см.}$$

$$\text{Площадь трапеции } S = \frac{BC + AD}{2} \cdot AB = \frac{9}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 3,6 \text{ см}^2.$$

*Ответ:* 3,6 см<sup>2</sup>.

**10.292.** Окружность радиуса  $R$  разделена на шесть равных дуг, и внутри круга, образованного этой окружностью, через каждые две соседние точки деления проведены равные дуги такого радиуса, что на данной окружности они взаимно касаются. Вычислить площадь внутренней части данного круга, заключенной между проведенными дугами.

*Решение.*

Пусть точка  $O$  — центр окружности радиуса  $R$ ;  $A, B, C, D, E, F$  — точки деления окружности, о которых говорится в условии задачи (рис.10.85),  $\angle AOB = 60^\circ$ .  $O_1$  — центр дуги  $AnB$ , проходящей внутри данного круга, о которой говорится в условии. Так как по условию точки  $A$  и  $B$  — точки касания дуги  $AnB$  с аналогичными соседними дугами, то  $OA$  — их общая касательная и  $O_1A \perp OA$ .  $\angle AOO_1 = \frac{1}{2} \angle AOB = 30^\circ$ ,  $\angle AO_1B = 120^\circ$ . Из

$$\triangle OAO_1 (\angle OAO_1 = 90^\circ): O_1A = OA \operatorname{tg} \angle AOO_1 = \frac{R\sqrt{3}}{3}. \text{ Площадь } S_1 \text{ криволинейного}$$

треугольника  $OAnB$  равна разности площадей  $S_2$  равностороннего треугольника  $AOB$  и  $S_3$  сегмента круга с центром  $O_1$ , ограниченного дугой  $AnB$ .

$$S_3 = \frac{1}{3} \pi \cdot O_1A^2 - S_{\triangle AO_1B} = \frac{1}{3} \pi \cdot O_1A^2 - \frac{1}{2} O_1A^2 \sin \angle AO_1B = \\ = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{R^2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{3} \sin 120^\circ = \frac{R^2}{3} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right), S_2 = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Тогда } S_1 = S_2 - S_3 = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{R^2}{3} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = R^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{12} \right) =$$

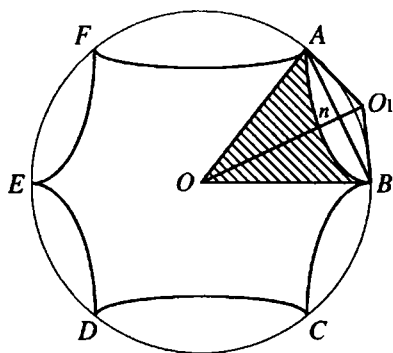


Рис. 10.85

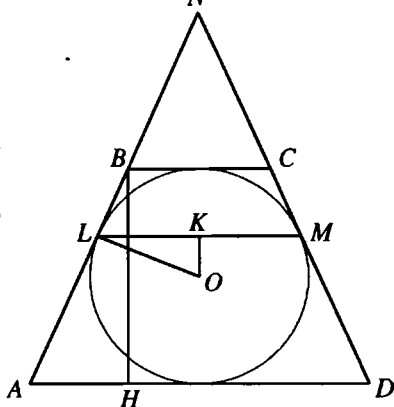


Рис. 10.86

$$= R^2 \cdot \frac{12\sqrt{3} - 4\pi}{36} = \frac{R^2(3\sqrt{3} - \pi)}{9}. \text{ Искомая площадь части данного круга}$$

$$S = 6S_1 = \frac{2R^2(3\sqrt{3} - \pi)}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2R^2(3\sqrt{3} - \pi)}{3}.$$

**10.293.** В некоторый угол вписана окружность радиуса  $R$ , а длина хорды, соединяющей точки касания, равна  $a$ . Параллельно этой хорде проведены две касательные, в результате чего получилась трапеция. Найти площадь этой трапеции.

*Решение.*

Пусть  $L$  и  $M$  — точки касания (рис. 10.86); тогда  $SL = SM$ , откуда  $AB = CD$ , так как  $AD \parallel BC \parallel LM$ . Проведем  $OK \perp LM$  и  $BH \perp AD$ . Искомая

площадь  $S = \frac{1}{2}(AD + BC)BH$ . Для описанной трапеции имеем

$AD + BC = AB + CD = 2AB$ ; поэтому  $S = AB \cdot BH$ . Далее,  $\triangle ABH \sim \triangle OKL$  ( $\angle LOK = \angle BAH$  как углы с взаимно перпендикулярными сторонами), откуда

$$\frac{LK}{LO} = \frac{BH}{AB} \text{ или } \frac{a/2}{R} = \frac{2R}{AB} \text{ и } AB = \frac{4R^2}{a}.$$

$$\text{Получили } S = \frac{4R^2}{a} \cdot 2R = \frac{8R^3}{a}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{8R^3}{a}.$$

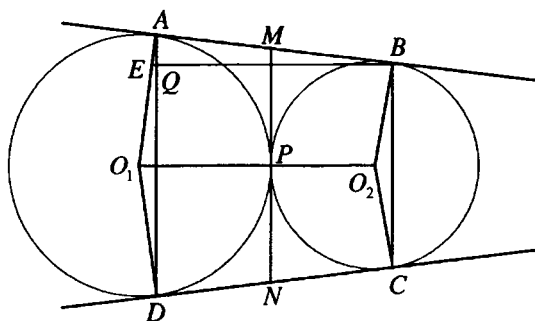


Рис. 10.87

**10.294.** Две окружности радиусов  $R$  и  $r$  касаются внешним образом. Найти площадь трапеции, ограниченной двумя общими касательными к этим окружностям и прямыми, соединяющими точки касания.

*Решение.*

Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры данных окружностей радиуса  $R$  и  $r$  соответственно,  $R > r$  (рис. 10.87),  $P$  — точка их касания,  $AB$  и  $DC$  — их общие внешние касательные,  $ABCD$  — трапеция искомой площади. Тогда  $O_1A \perp AB$ ,  $O_2B \perp AB$ ,  $O_1A = R$ ,  $O_2B = r$ . Проведем через точку  $P$  общую к данным окружностям касательную  $MN$ . Так как  $AM = MP = MB$ , то  $MN$  — средняя линия трапеции  $ABCD$  и  $MN = AB$ . Проведем  $BE \parallel O_1O_2$ , имеем  $BE = O_1O_2 = R + r$ ,  $AE = O_1A - O_1E = O_1A - O_2B = R - r$ . Из  $\triangle EAB$  ( $\angle EAB = 90^\circ$ ):  $AB = \sqrt{BE^2 - AE^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$ .  $O_1O_2 \perp AD$ ,  $BE \parallel O_1O_2$ . Следовательно,  $BE \perp AD$ .  $Q$  — точка пересечения  $EB$  и  $AD$ . Тогда  $AQ$  — высота прямоугольного  $\triangle EAB$  и  $AB^2 = BE \cdot BQ$ ,

$$BQ = \frac{AB^2}{BE} = \frac{4Rr}{R+r}. BQ \text{ — высота трапеции } ABCD.$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BQ = MN \cdot BQ = AB \cdot BQ = \frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}.$$

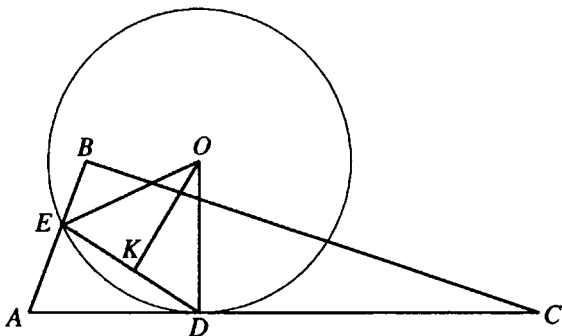


Рис. 10.88

**10.295.** Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8 см. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

*Решение.*

По условию в  $\triangle ABC$  (рис. 10.88)  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = 6$  см,  $BC = 8$  см, точки  $E$  и  $D$  — соответственно середины  $AB$  и  $AC$ ,  $O$  — центр окружности, о которой говорится в условии задачи.  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$  см.

Тогда  $ED$  — средняя линия  $\triangle ABC$ ,  $ED = \frac{1}{2}BC = 4$  см.  $K$  — середина  $ED$ .

Тогда  $KD = 2$  см.  $OK \perp ED$ ,  $BC \parallel ED$ . Тогда  $OK \perp BC$ .  $OD \perp AC$ . Следовательно,  $\angle KOD = \angle BCA$  — как углы с взаимно перпендикулярными сторонами, и

прямоугольные треугольники  $OKD$  и  $CBA$  подобны. Тогда  $\frac{OD}{AC} = \frac{KD}{AB}$ ,

$$OD = \frac{AC \cdot KD}{AB} = \frac{10}{3} \text{ см. Искомая площадь круга } S = \pi \cdot OD^2 = \frac{100\pi}{9} \text{ см}^2.$$

$$\text{Ответ: } \frac{100\pi}{9} \text{ см}^2.$$





$$= 1 + \frac{A_1C}{A_1B} = 1 + \frac{n}{m} = \frac{m+n}{m}; \quad \frac{BB_1}{B_1K} = \frac{BK + B_1K}{B_1K} = \frac{BK}{B_1K} + 1 = \frac{BA_1}{A_1C} + 1 = \frac{m}{n} + 1 = \frac{m+n}{m};$$

следовательно,  $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1 B_1 C_1}} = \frac{AC}{A_1 C_1} \cdot \frac{BB_1}{B_1 K} = \frac{(m+n)^2}{mn}$ .

Ответ:  $\frac{(m+n)^2}{mn}$ .

**10.298.** Определить площадь сегмента, если его периметр равен  $p$ , а дуга содержит  $120^\circ$ .

*Решение.*

Обозначим радиус круга через  $R$ . Так как дуга сегмента содержит  $120^\circ$ , то ее длина равна  $\frac{2\pi R}{3}$ , а хорда, стягивающая эту дугу (сторона правильного вписанного треугольника), равна  $R\sqrt{3}$ . Тогда периметр сегмента состав-

ляет  $p = \frac{2\pi R}{3} + R\sqrt{3}$ , откуда  $R = \frac{3p}{2\pi + 3\sqrt{3}}$ . Площадь сегмента:

$$S = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \frac{3p^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2}.$$

Ответ:  $\frac{3p^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2}$ .

**10.299.** На отрезке  $AB$  и на каждой его половине построены как на диаметрах полуокруги (по одну сторону от  $AB$ ). Считая радиус большого круга равным  $R$ , найти сумму площадей криволинейных треугольников, образовавшихся при построении круга, касательного ко всем трем данным полуокругам.

*Решение.*

Пусть  $O$  — середина  $AB$ ,  $D$  — середина  $AO$ ,  $F$  — середина  $OB$ ,  $E$  — центр круга, о котором говорится в условии задачи (рис. 10.90). Пусть  $r$  — радиус того круга. Тогда  $OA = R$ ,  $DO = \frac{R}{2}$ ,  $DE = \frac{R}{2} + r$ ,  $OE = R - r$ . Из

$$\Delta DOE \quad (\angle DOE = 90^\circ): \quad DE^2 = DO^2 + OE^2; \quad \left(\frac{R}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R - r)^2;$$

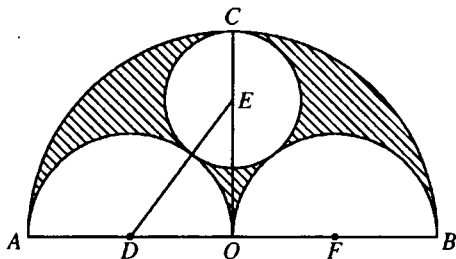


Рис. 10.90

$r = \frac{R}{3}$ . Искомая площадь  $S = S_1 - (2S_2 + S_3)$ , где  $S_1$  — площадь полукруга с центром  $O$ ,  $S_2$  — площадь полукруга с центром  $D$ ,  $S_3$  — площадь круга с центром  $E$ .

$$S = \frac{\pi R^2}{2} - \left( 2 \cdot \frac{\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} + \pi r^2 \right) = \frac{\pi R^2}{2} - \left( \frac{\pi R^2}{4} + \frac{\pi R^2}{9} \right) = \frac{5}{36} \pi R^2.$$

Ответ:  $\frac{5}{36} \pi R^2$ .

**10.300.** Сторона правильного треугольника равна  $a$ . Определить площадь части треугольника, лежащей вне круга радиуса  $a/3$ , центр которого совпадает с центром треугольника.

Решение.

Искомая площадь  $S = S_1 - S_2 + 3S_3$ , где  $S_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$  — площадь треугольника,  $S_2 = \frac{\pi a^2}{9}$  — площадь круга,  $S_3$  — площадь сегмента, отсекаемого треугольником от круга. Хорда этого сегмента равна  $\frac{a}{3}$ ; поэтому

$$S_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi a^2}{9} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{9 \cdot 4} = \frac{\pi a^2}{54} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{36}.$$

Получаем, что  $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{\pi a^2}{9} + \frac{\pi a^2}{18} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{a^2(3\sqrt{3} - \pi)}{18}$ .

Ответ:  $\frac{a^2(3\sqrt{3} - \pi)}{18}$ .

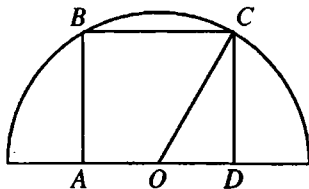


Рис. 10.91.1

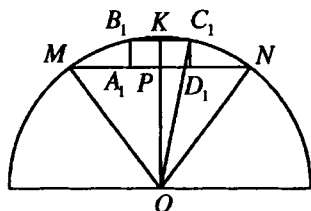


Рис. 10.91.2

**10.301.** Найти отношение площади квадрата, вписанного в сегмент с дугой в  $180^\circ$ , к площади квадрата, вписанного в сегмент того же самого круга с дугой в  $90^\circ$ .

*Решение.*

Пусть  $ABCD$  — квадрат, вписанный в сегмент с дугой в  $180^\circ$  (рис. 10.91.1),  $A_1B_1C_1D_1$  — квадрат, вписанный в сегмент того же круга с дугой в  $90^\circ$  (рис. 10.91.2). Пусть  $R$  — радиус круга,  $AB = x$ ,  $A_1B_1 = y$ . Рассмотрим квадрат  $ABCD$ .  $O$  — центр круга. Тогда  $OC = R$ ,  $OD = CD/2 = x/2$ . Из

$$\triangle CDO (\angle CDO = 90^\circ): OD^2 + CD^2 = OC^2; \frac{x^2}{4} + x^2 = R^2; x = \frac{2R}{\sqrt{5}}.$$

Рассмотрим квадрат  $A_1B_1C_1D_1$ . Проведем  $OK \perp B_1C_1$ . Тогда  $K$  — середина  $B_1C_1$ , точка  $P$  пересечения  $A_1D_1$  и  $OK$  — середина  $A_1D_1$ ,  $KP = A_1B_1 = y$ ,

$$KC_1 = y/2. \text{ Так как } \angle MON = 90^\circ, \text{ то } OP = \frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ и } OK = OP + PK =$$

$$= \frac{R\sqrt{2}}{2} + y. \text{ Из } \triangle OKC_1 (\angle OKC_1 = 90^\circ): OC_1^2 = OK^2 + KC_1^2;$$

$$R^2 = \left( \frac{R\sqrt{2}}{2} + y \right)^2 + \frac{y^2}{4}; 5y^2 + 4Ry\sqrt{2} - 2R^2 = 0; y = \frac{R\sqrt{2}}{5}. \text{ Следовательно}$$

$$\text{но, } \frac{S_{ABCD}}{S_{A_1B_1C_1D_1}} = \left( \frac{x}{y} \right)^2 = \left( \frac{2R \cdot 5}{\sqrt{5} \cdot R\sqrt{2}} \right)^2 = 10.$$

*Ответ:* 10:1.

**10.302.** Площадь четырехугольника равна  $S$ . Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям четырехугольника.

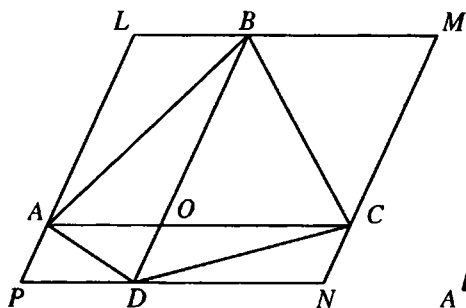


Рис. 10.92

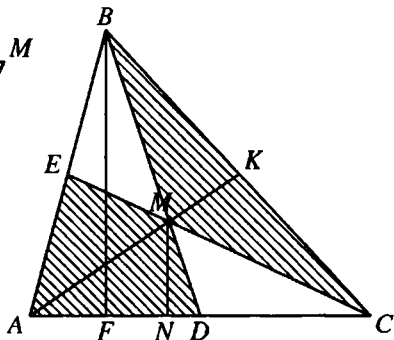


Рис. 10.93

*Решение.*

Покажем, что искомая площадь  $S_{LMNP} = 2S$  (рис. 10.92). Так как  $AL \parallel BO$  и  $LB \parallel AO$ , то  $ALBO$  — параллелограмм и, значит,  $S_{\Delta ALB} = S_{\Delta AOB}$ . Аналогично получаем  $S_{\Delta BMC} = S_{\Delta BOC}$ ,  $S_{\Delta DCN} = S_{\Delta DOC}$ ,  $S_{\Delta APD} = S_{\Delta AOD}$ , откуда и следует, что  $S_{LMNP} = 2S$ .

*Ответ:*  $2S$ .

**10.303.** В треугольнике  $ABC$  проведены медианы  $BD$  и  $CE$ ;  $M$  — точка их пересечения. Доказать, что треугольник  $BCM$  равновелик четырехугольнику  $ADME$ .

*Решение.*

Проведем третью медиану  $AK$  треугольника  $ABC$  (рис. 10.93), опустим на  $AC$  перпендикуляры  $BF$  и  $MN$ . Так как  $MD = BD/3$ , то

$$MN = BF/3. S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} AC \cdot MN = \frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{3} BF = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}. MD — медиана$$

на  $\Delta ABC$ . Аналогично  $S_{\Delta AME} = S_{\Delta BME} = S_{\Delta BMK} = S_{\Delta CMK} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC}$ . Это

означает, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников. Так как четырехугольник  $ADME$  и треугольник  $BMC$  каждый состоит из двух таких треугольников, то они равновелики. Что и требовалось доказать.

**10.304.** Два круга концентричны, причем окружность меньшего круга делит большой круг на равновеликие части. Доказать, что часть кольца, заключенная между параллельными касательными к окружности меньшего радиуса, равновелика квадрату, вписанному в меньший круг.

*Решение.*

Пусть  $O$  — общий центр данных кругов,  $K$  — точка касания хорды  $AB$  большего круга к кругу меньшего радиуса (рис. 10.94). Пусть радиус большего круга  $R$ , меньшего —  $r$ . Тогда по условию

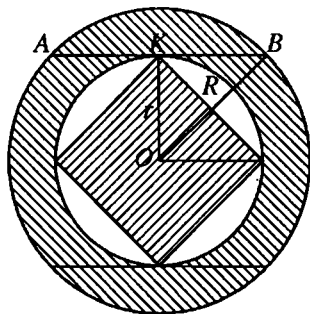


Рис. 10.94

$$\pi r^2 = \frac{\pi R^2}{2} \text{ и } r = \frac{R}{\sqrt{2}}. \text{ В } \triangle OKB \angle OKB = 90^\circ,$$

$$OK = r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{OB}{\sqrt{2}}. \text{ Следовательно,}$$

$\angle BOK = 45^\circ$  и  $\angle AOB = 90^\circ$ . Тогда площадь сегмента, ограниченного хор-

дой  $AB$ :  $S_1 = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}$ . Площадь кольца  $S_2 = \pi R^2 - \pi r^2$ . Тогда площадь части кольца, заключенная между параллельными касательными:

$$S = S_2 - 2S_1 = \pi R^2 - \pi r^2 - \frac{\pi R^2}{2} + R^2 = \frac{\pi R^2}{2} - \pi r^2 + R^2. \text{ Так как } R = r\sqrt{2},$$

то  $S = 2r^2$ . Площадь квадрата, вписанного в круг радиуса  $r$ , равна также  $2r^2$ . Утверждение доказано.

**10.305.** Найти площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, длины катетов которого являются корнями уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .

*Решение.*

Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы. Пусть  $u$  и  $v$  — длины катетов, а  $w$  — длина гипотенузы; тогда  $S = \frac{\pi w^2}{4}$ . Так как  $u$  и  $v$  — корни уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ , то

$$uv = \frac{c}{a}, \quad u + v = -\frac{b}{a}. \text{ Учитывая, что } w^2 = u^2 + v^2, \text{ имеем } w^2 = (u + v)^2 - 2uv =$$

$$= \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \text{ и окончательно находим } S = \frac{\pi(b^2 - 2ac)}{4a^2}.$$

Ответ:  $\frac{\pi(b^2 - 2ac)}{4a^2}$ .

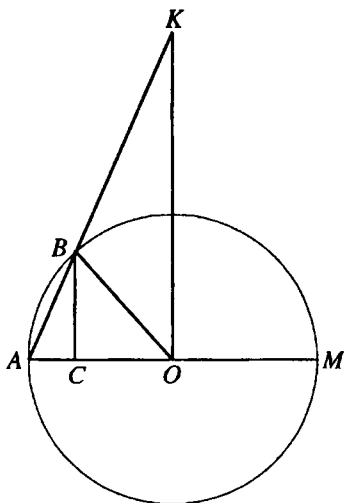


Рис. 10.95

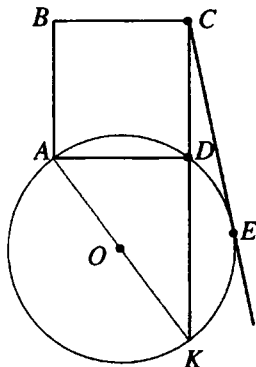


Рис. 10.96

**10.306.** Прямая пересекает окружность радиуса  $R$  в точках  $A$  и  $B$  таких, что  $\sphericalangle AOB = 45^\circ$ , а прямую, перпендикулярную диаметру  $AM$  окружности и проходящую через ее центр, — в точке  $K$ . Прямая, проходящая через точку  $B$  перпендикулярно  $AM$ , пересекает его в точке  $C$ . Найти площадь трапеции  $OCBK$ .

*Решение.*

$$\text{По условию } \sphericalangle BOC = 45^\circ, \text{ поэтому } BC = OC = \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad AC = R - \frac{R}{\sqrt{2}} = \\ = \frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} \text{ (рис. 10.95). Так как } \triangle ABC \sim \triangle AKO, \text{ то } \frac{KO}{BC} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KO = \frac{AO \cdot BC}{AC} = \frac{R}{\sqrt{2}-1} = R(\sqrt{2}+1). \text{ Тогда площадь трапеции будет рав-}$$

$$\text{на: } S = \frac{1}{2}(KO + BC)OC = \frac{1}{2} \left( R(\sqrt{2}+1) + \frac{R}{\sqrt{2}} \right) \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R^2(3+\sqrt{2})}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{R^2(3+\sqrt{2})}{4}.$$

**10.307.** Через две смежные вершины квадрата проведена окружность так, что длина касательной к ней, проведенной из третьей вершины, в три раза больше стороны квадрата. Найти площадь круга, если сторона квадрата равна  $a$ .

*Решение.*

Пусть  $ABCD$  — квадрат, о котором говорится в условии задачи (рис. 10.96). Указанная окружность проходит через его вершины  $A$  и  $D$ ,  $CE$  — касательная,  $AD = CD = a$ ,  $CE = 3a$ . Продлим  $CD$  до пересечения с окружностью в точке  $K$ . Пусть  $DK = x$ . Тогда  $CK \cdot CD = CE^2$ ;  $(x + a)a = 9a^2$ ;  $x = 8a$ . Так как  $\angle ADK = 90^\circ$ , то  $AK$  — диаметр окружности и  $AK^2 = AD^2 + DK^2$ . Пусть  $R$  — радиус данной окружности. Тогда

$$4R^2 = a^2 + 64a^2; R^2 = \frac{65a^2}{4}. \text{ Искомая площадь круга } S = \pi R^2 = \frac{65\pi a^2}{4}.$$

*Ответ:*  $\frac{65\pi a^2}{4}$ .

**10.308.** Дан квадрат со стороной  $a$ . На каждой стороне квадрата вне его построена трапеция так, что верхние основания этих трапеций и их боковые стороны образуют правильный двенадцатиугольник. Вычислить его площадь.

*Решение.*

Искомая площадь  $S = 12S_{\triangle OAB}$ , где  $OA$ ,  $OB$  проведены в соседние вершины правильного двенадцатиугольника (рис. 10.97). Сторона квадрата

равна  $a$ , поэтому  $OA = OB = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

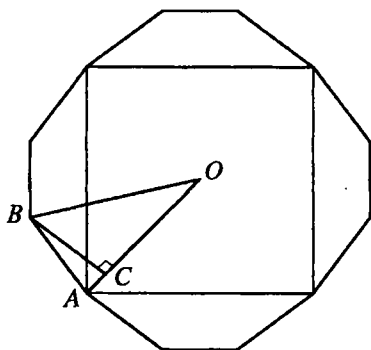


Рис. 10.97

Проведём высоту  $BC \perp OA$ . Тогда  $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot BC$ , где  $\angle AOB = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ .

$$\text{Получаем } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{8} \Rightarrow S = \frac{12}{8} a^2 = \frac{3}{2} a^2.$$

*Ответ:*  $\frac{3a^2}{2}$ .



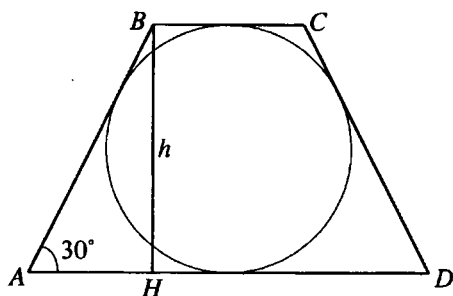


Рис. 10.98

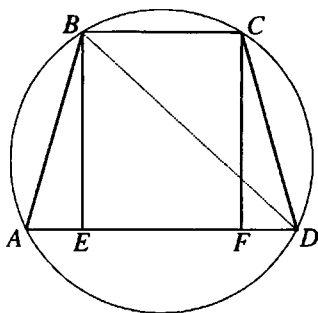


Рис. 10.99

**10.309.** Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна  $32 \text{ см}^2$ ; острый угол трапеции равен  $30^\circ$ . Определить стороны трапеции.

*Решение.*

Пусть высота  $BH$  трапеции равна  $h$  (рис. 10.98). Тогда  $AB = 2h$  (так как  $\angle A = 30^\circ$ ),  $BC + AD = 4h$  (поскольку  $BC + AD = AB + CD = 2AB$ ). Площадь трапеции  $S = \frac{(BC + AD)h}{2} = 2h^2 = 32 \text{ (см}^2\text{)}$ , откуда  $h = 4 \text{ см}$ . Следова-

тельно,  $AB = CD = 8 \text{ см}$ ,  $BC + AD = 16 \text{ см}$ . Но  $BC + AD = 2BC + 2AH = 2BC + 8\sqrt{3}$ . Итак,  $AB = CD = 8 \text{ см}$ ,  $BC = 8 - 4\sqrt{3} \text{ см}$ ,  $AD = 8 + 4\sqrt{3} \text{ см}$ .

*Ответ:*  $8 \text{ см}$ ;  $8 - 4\sqrt{3} \text{ см}$ ;  $8 + 4\sqrt{3} \text{ см}$ .

**10.310.** Высота равнобедренной трапеции равна  $14 \text{ см}$ , а основания равны  $16$  и  $12 \text{ см}$ . Определить площадь описанного круга.

*Решение.*

Пусть  $BE$  — высота трапеции  $ABCD$ ,  $BE = 14 \text{ см}$ ,  $BC = 12 \text{ см}$ ,  $AD = 16 \text{ см}$ ,  $AB = CD$  (рис. 10.99). Тогда  $AF = \frac{AD + BC}{2} = 14 \text{ см}$ . В  $\triangle BED$   $\angle BED = 90^\circ$ ,  $BE = ED$ . Следовательно,  $\angle BDE = 45^\circ$ . Из  $\triangle AEB$  ( $\angle AEB = 90^\circ$ ):  $AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = 10\sqrt{2} \text{ (см)}$ . Радиус  $R$  круга, описанного около трапеции  $ABCD$ , найдем как радиус круга, описанного около

$\triangle ABD$ :  $R = \frac{AB}{2 \sin \angle BDA} = \frac{10\sqrt{2}}{2 \sin 45^\circ} = 10 \text{ (см)}$ . Следовательно, искомая площадь круга  $S = \pi R^2 = 100\pi \text{ см}^2$ .

*Ответ:*  $100\pi \text{ см}^2$ .

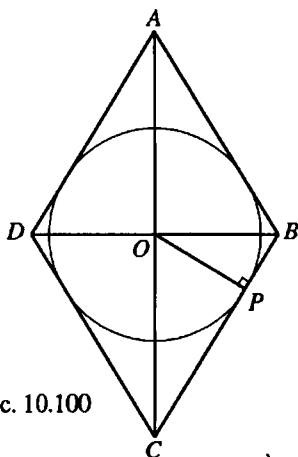


Рис. 10.100

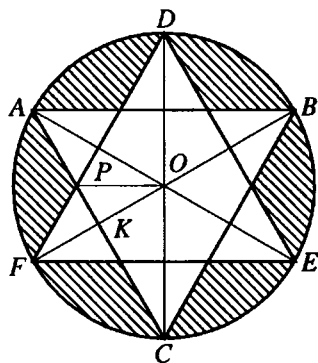


Рис. 10.101

**10.311.** Длины диагоналей ромба относятся как 3:4. Во сколько раз площадь ромба больше площади вписанного в него круга?

*Решение.*

Пусть точка  $O$  — точка пересечения диагоналей и центр вписанного круга радиуса  $r$  ромба  $ABCD$ ,  $BD : AC = 3 : 4$  (рис. 10.100).

$\frac{BO}{CO} = \frac{BD}{AC} = \frac{3}{4}$ . Пусть  $BO = 3x$ , тогда  $CO = 4x$ ,  $BC = 5x$  (из  $\triangle BOC$ ).

Пусть  $P$  — точка касания круга со стороной  $BC$ . Тогда  $OP \perp BC$ ,  $OP = r$ .

$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot OP = \frac{1}{2} OC \cdot OB$ .  $OP = r = \frac{OC \cdot OB}{BC} = \frac{12x}{5}$ . Площадь круга

$S_1 = \pi r^2 = \frac{144\pi x^2}{25}$ . Площадь ромба  $S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2BO \cdot OC = 24x^2$ .

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{24x^2 \cdot 25}{144\pi x^2} = \frac{25}{6\pi}$$

Ответ:  $\frac{25}{6\pi}$ .

**10.312.** В круг радиуса  $R$  вписан правильный треугольник, высоты которого продолжены до пересечения с окружностью. Эти точки пересечения соединены между собой, в результате чего получается новый треугольник. Вычислить ту часть площади круга, которая находится вне этих треугольников.

*Решение.*

Искомая площадь равна  $6S_1$ , где  $S_1$  — площадь криволинейного треугольника  $APF$  (рис. 10.101),  $S_1$ , в свою очередь, равна разности сектора  $AOF$  и удвоенной площади треугольника  $AOP$ .  $\angle AOF = 60^\circ$ , следовательно,

$$S_{AOF} = \frac{1}{6}\pi R^2, \quad S_{\Delta AOP} = \frac{1}{2}AP \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}AC \cdot OK = \frac{1}{6}R\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}R = \frac{R^2\sqrt{3}}{12}.$$

Следовательно, искомая площадь

$$S = 6S_1 = 6(S_{AOF} - 2S_{\Delta AOP}) = 6\left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{6}\right) = R^2(\pi - \sqrt{3}).$$

*Ответ:*  $R^2(\pi - \sqrt{3})$ .

**10.313.** Две окружности радиуса  $R$  пересекаются так, что каждая из них проходит через центр другой. Две другие окружности того же радиуса имеют центры в точках пересечения первых двух окружностей. Найти площадь, общую всем четырем кругам.

*Решение.*

Каждая из двух последних окружностей проходит через центры первых двух (рис. 10.102), поэтому длина их общей хорды  $O_1O_2 = R$ . Искомая площадь равна удвоенной площади сегмента с центральным углом  $60^\circ$ , т.е.

$$S = 2\left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{6}.$$

*Ответ:*  $\frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{6}$ .

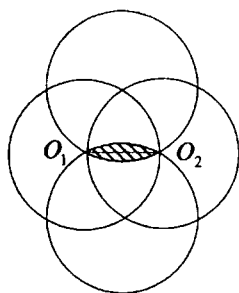


Рис. 10.102

**10.314.** Дан ромб  $ABCD$ , диагонали которого равны 3 и 4 см. Из вершины тупого угла  $B$  проведены две высоты  $BE$  и  $BF$ . Вычислить площадь четырехугольника  $BFDE$ .

*Решение.*

Площадь ромба  $S = 0,5 \cdot 3 \cdot 4 = 6 = AD \cdot BE$  (рис. 10.103). Из  $\Delta AOD$  находим  $AD = \sqrt{2^2 + 1,5^2} = 2,5$  (см)  $\Rightarrow BE = 6 : 2,5 = 2,4$  (см). Из  $\Delta BDE$  имеем  $DE = \sqrt{BD^2 - BE^2} = \sqrt{3^2 - 2,4^2} = 1,8$  (см).

Получили  $S_{BEDF} = 2S_{\Delta BED} = 1,8 \cdot 2,4 = 4,32$  (см<sup>2</sup>).

*Ответ:* 4,32 см<sup>2</sup>.

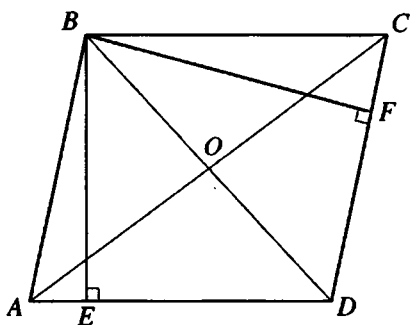


Рис. 10.103

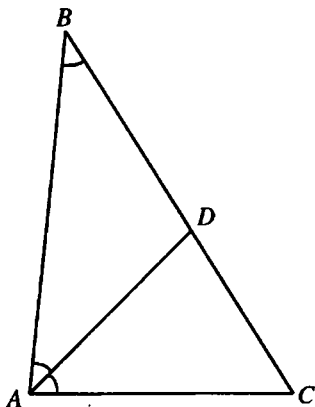


Рис. 10.104

**10.315.** Отношение величин двух углов треугольника равно 2, а разность длин противоположных им сторон равна 2 см; длина третьей стороны треугольника равна 5 см. Вычислить площадь треугольника.

*Решение.*

$\angle A = 2\angle B$ ,  $BC - AC = 2$  см,  $AB = 5$  см (рис. 10.104); найдем  $S_{\triangle ABC}$ . Проведем биссектрису  $AD$ ; тогда  $\triangle ABC \sim \triangle ADC$  ( $\angle C$  — общий,

$\angle B = \angle DAC$ )  $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC}$ ,  $AC^2 = BC \cdot CD$  (\*). Так как  $AD$  — биссектриса, то

$$\frac{AC}{CD} = \frac{5}{BD} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{5}{BC - CD} \Rightarrow AC \cdot BC - AC \cdot CD = 5CD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = \frac{AC \cdot BC}{AC + 5} (**). \text{ Из равенств (*) и (**) следует, что } AC^2 = \frac{AC \cdot BC^2}{AC + 5},$$

$AC^2 + 5AC = BC^2$ . Так как  $BC = AC + 2$ , то  $AC^2 + 5AC = AC^2 + 4AC + 4$ , откуда  $AC = 4$  см,  $BC = 6$  см.

$$\text{Получили } S_{\triangle ABC} = \sqrt{7,5 \cdot 1,5 \cdot 2,5 \cdot 3,5} = \frac{15\sqrt{7}}{4} \text{ см}^2.$$

$$\text{Ответ: } \frac{15\sqrt{7}}{4} \text{ см}^2.$$

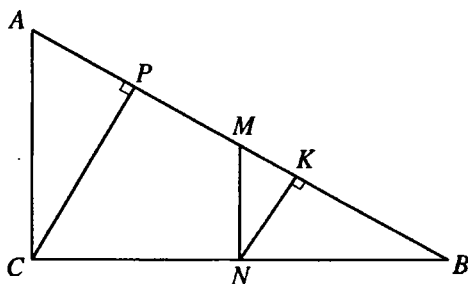


Рис. 10.105

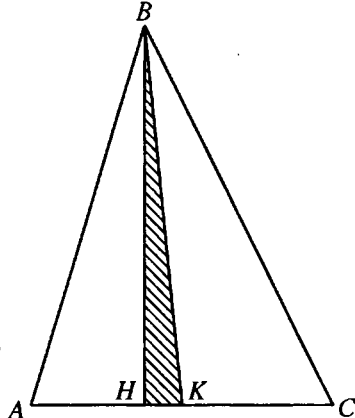


Рис. 10.106

**10.316.** В прямоугольном треугольнике расстояние от середины гипотенузы до одного из катетов равно 5 см, а расстояние от середины этого катета до гипотенузы равно 4 см. Вычислить площадь треугольника.

*Решение.*

Пусть в  $\triangle ABC$  (рис. 10.105)  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $M$  — середина  $AB$ ,  $MN \perp BC$ ,  $MN = 5$  см. Тогда  $N$  — середина  $BC$  и  $AC = 2MN = 10$  см. Опустим на  $AB$  перпендикуляры  $NK$  и  $CP$ . Тогда  $NK = 4$  см,  $K$  — середина  $BP$  и  $CP = 2NK = 8$  см. Из  $\triangle APC$  ( $\angle APC = 90^\circ$ ):  $AP = \sqrt{AC^2 - CP^2} = 6$  см.

Из  $\triangle ACB$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ):  $AC^2 = AP \cdot AB$ ;  $AB = \frac{AC^2}{AP} = \frac{50}{3}$  см. Тогда  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CP = \frac{200}{3}$  см<sup>2</sup>.

*Ответ:*  $200/3$  см<sup>2</sup>.

**10.317.** В треугольнике  $ABC$  известны:  $BC = 15$  см,  $AC = 14$  см,  $AB = 13$  см. Вычислить площадь треугольника, заключенного между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины  $B$ .

*Решение.*

Пусть  $BH$  и  $BK$  — соответственно высота и биссектриса  $\triangle ABC$  (рис. 10.106). Так как  $15^2 < 13^2 + 14^2$ , то  $\triangle ABC$  — остроугольный и точка  $H$  принадлежит отрезку  $AC$ . По формуле Герона находим:  $S_{\triangle ABC} = 84$  см<sup>2</sup>.

Тогда  $BH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AC} = 12$  см. Пусть  $AK = x$  см. Тогда  $CK = (14 - x)$  см и по

свойству биссектрисы треугольника  $\frac{AK}{AB} = \frac{CK}{BC}$ , откуда  $\frac{x}{13} = \frac{14-x}{15}$ ;  
 $x = 6,5$ . Из  $\triangle ANB$  ( $\angle ANB = 90^\circ$ ):  $AN = \sqrt{AB^2 - BN^2} = 5$  см. Тогда  
 $NK = AK - AN = 1,5$  см. Искомая площадь  $S_{\triangle BHK} = \frac{1}{2} BN \cdot NK = 9$  см<sup>2</sup>.

Ответ: 9 см<sup>2</sup>.

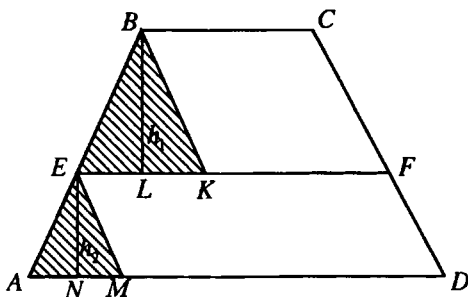


Рис. 10.107

**10.318.** Основания трапеции равны  $a$  и  $b$ . Определить длину отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на равновеликие части.

Решение.

Пусть в трапеции  $ABCD$  (рис. 10.107)  $BC \parallel AD$ ,  $EF \parallel BC$ , площади  $S_1$  и  $S_2$  трапеций  $AEFD$  и  $EBCF$  равны,  $BC = a$ ,  $AD = b$ . Проведем  $BL$  и  $EN$  — соответственно высоты трапеций  $EBCF$  и  $AEFD$ . Пусть  $EF = x$ ,  $BL = h_1$ ,  $EN = h_2$ . Проведем  $BK \parallel CF$ ,  $EM \parallel CD$ . Тогда  $KF = a$ ,  $EK = x - a$ ,  $MD = x$ ,  $AM = b - x$ .  $\triangle AEM \sim \triangle EBK$ . Тогда  $\frac{EK}{BL} = \frac{AM}{EN}$ ,  
 $\frac{x-a}{h_1} = \frac{b-x}{h_2}$  (а).  $S_1 = \frac{BC+EF}{2} \cdot BL = \frac{a+x}{2} \cdot h_1$ .  $S_2 = \frac{AD+EF}{2} \cdot EN = \frac{b+x}{2} \cdot h_2$ .  
 Тогда  $\frac{a+x}{2} h_1 = \frac{b+x}{2} h_2$  (б). Перемножая равенства (а) и (б), получаем:

$$\frac{x^2 - a^2}{2} = \frac{b^2 - x^2}{2}. \text{ Отсюда } 2x^2 = a^2 + b^2; x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Ответ:  $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ .

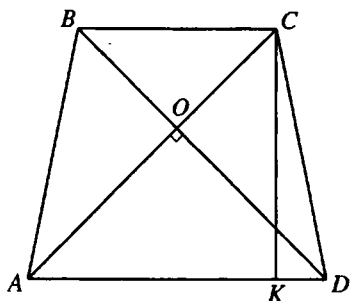


Рис. 10.108

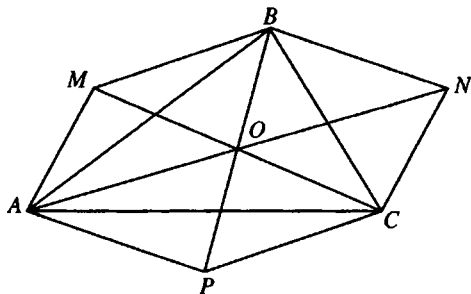


Рис. 10.109

**10.319.** Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а ее площадь равна  $a^2$ . Определить высоту трапеции.

*Решение.*

Пусть в трапеции  $ABCD$  (рис. 10.108)  $AB = CD$ ,  $AC \perp BD$ ,  $O$  — точка пересечения  $AC$  и  $BD$ ,  $CK$  — высота трапеции. Так как трапеция равнобедренная, то  $AK = \frac{AD + BC}{2}$ ,  $AO = DO$ , и так как  $\angle AOD = 90^\circ$ , то  $\angle OAD = 45^\circ$ . Следовательно, в прямоугольном  $\triangle AKC$   $AK = CK$ . Площадь трапеции  $S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CK = AK \cdot CK = CK^2 = a^2$ . Значит,  $CK = a$ .

*Ответ:*  $a$ .

**10.320.** Медианы одного треугольника равны сторонам другого треугольника. Найти отношение площадей этих треугольников.

*Решение.*

Каждую медиану исходного треугольника  $ABC$  продолжим на  $1/3$  её длины (рис. 10.109). Площадь образовавшейся фигуры  $AMBNCP$  составит  $2S_{\triangle ABC}$  ( $\triangle BOC = \triangle BNC$ ,  $\triangle AOB = \triangle AMB$ ,  $\triangle AOC = \triangle APC$ ). Длины сторон каждого из треугольников  $AOM$ ,  $BOM$ ,  $BON$ ,  $CON$ ,  $COP$ ,  $AOP$  равны  $2m_1/3$ ,  $2m_2/3$ ,  $2m_1/3$ ; поэтому  $S_{AMBNCP} = 6S_{\triangle AOM}$ . Пусть  $S_m$  — площадь треугольника, построенного на медианах  $\triangle ABC$ . Тогда  $S_{\triangle AOM} = 4S_m/9$  и  $S_{AMBNCP} = 2S_{\triangle ABC} = 6 \cdot 4S_m/9 = 8S_m/3$ , откуда  $S_{\triangle ABC} : S_m = 4 : 3$ .

*Ответ:* 4:3.

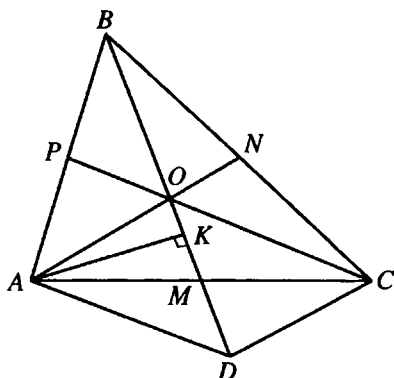


Рис. 10.110

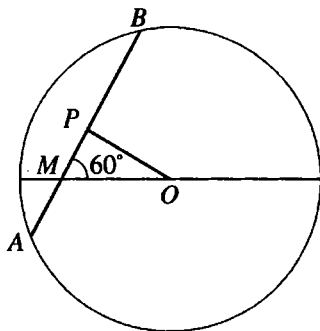


Рис. 10.111

10.321. Медианы треугольника равны 3, 4 и 5 см. Найти площадь треугольника.

*Решение.*

Пусть  $AN$ ,  $BM$ ,  $CP$  — медианы  $\triangle ABC$  (рис. 10.110),  $O$  — точка их пересечения,  $AN = 3$  см,  $BM = 4$  см,  $CP = 5$  см. На продолжении отрезка  $BM$  за точку  $M$  отложим отрезок  $DM = OM$ . Тогда  $DO = BO =$

$$= \frac{2}{3}BM = \frac{8}{3} \text{ см. Опустим перпендикуляр } AK \text{ на } BM. S_{\triangle ADO} =$$

$$= \frac{1}{2}DO \cdot AK = \frac{1}{2}BO \cdot AK = S_{\triangle ABO} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}. \text{ Так как } AOCD \text{ — паралле-}$$

лограмм, то  $AD = OC = \frac{10}{3}$  см.  $AO = \frac{2}{3}AN = 2$  см. По формуле Герона

находим  $S_{\triangle ADO} = \frac{8}{3} \text{ см}^2$ . Тогда  $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle ADO} = 8 \text{ см}^2$ .

*Ответ:*  $8 \text{ см}^2$ .

10.322. В окружности с центром  $O$  проведена хорда  $AB$ , пересекающая диаметр в точке  $M$  и составляющая с диаметром угол, равный  $60^\circ$ . Найти  $OM$ , если  $AM = 10$  см, а  $BM = 4$  см.

*Решение.*

Проведем  $OP \perp AB$  (рис. 10.111). Тогда  $AP = BP = 7$  см и  $MP = 3$  см. Так как  $\angle PMO = 60^\circ$ , то  $\angle MOP = 30^\circ$  и  $OM = 2MP = 6$  см.

*Ответ:* 6 см.



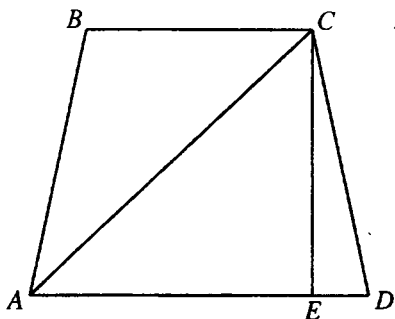


Рис. 10.112

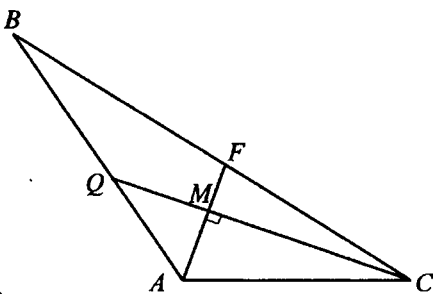


Рис. 10.113

**10.323.** Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 см, а площадь равна  $48 \text{ см}^2$ . Найти высоту трапеции.

*Решение.*

В трапеции  $ABCD$  (рис. 10.112)  $AB = CD$ ,  $AC = 10$  см,  $CE$  — высота.

Пусть  $AE = x$  см,  $CE = y$  см. Так как  $AE = \frac{AD + BC}{2}$ , то по условию

$xy = 48$  см. Из  $\triangle AEC$  ( $\angle AEC = 90^\circ$ ):  $AE^2 + CE^2 = AC^2$ ;  $x^2 + y^2 = 100$ .

Решаем систему уравнений: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100; \\ xy = 48; \end{cases} \quad \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 100; \\ xy = 48; \end{cases}$$

$\begin{cases} (x + y)^2 = 196; \\ xy = 48. \end{cases}$  Так как  $x > 0$ ,  $y > 0$ , то  $x + y = 14$ . Тогда  $\begin{cases} x = 8, \\ y = 6, \end{cases}$  или

$\begin{cases} x = 6, \\ y = 8. \end{cases}$  Отсюда высота трапеции равна 6 см или 8 см.

*Ответ:* 6 см, 8 см.

**10.324.** В треугольник вписан круг. Прямые, соединяющие центр круга с вершинами, делят площадь треугольника на части с площадями 4, 13 и  $15 \text{ см}^2$ . Найти стороны треугольника.

*Решение.*

Обозначим стороны треугольника через  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Тогда площади частей

треугольника равны  $\frac{1}{2}ar$ ,  $\frac{1}{2}br$ ,  $\frac{1}{2}cr$ , т.е.  $ar = 8$ ,  $br = 26$ ,  $cr = 30$ ,

откуда  $a = \frac{8}{r}$ ,  $b = \frac{26}{r}$ ,  $c = \frac{30}{r}$ . По формуле Герона находим

$$S = \sqrt{\frac{32}{r} \cdot \frac{24}{r} \cdot \frac{6}{r} \cdot \frac{2}{r}} = \frac{96}{r^2}. \text{ Но } S = 4 + 13 + 15 = 32 \text{ см}^2; \text{ следовательно, } \frac{96}{r^2} = 32,$$

$$r = \sqrt{3} \text{ см. И так, } a = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{ см, } b = \frac{26}{\sqrt{3}} \text{ см, } c = \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ см.}$$

$$\text{Ответ: } \frac{8}{\sqrt{3}}, \frac{26}{\sqrt{3}}, \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ см.}$$

**10.325.** Основание треугольника равно 20 см, медианы боковых сторон равны 18 и 24 см. Найти площадь треугольника.

*Решение.*

Пусть  $AF$  и  $CQ$  — медианы  $\triangle ABC$  (рис. 10.113),  $M$  — точка их пересечения,  $AC = 20$  см,  $AF = 18$  см,  $CQ = 24$  см. Тогда  $AM = \frac{2}{3}AF = 12$  см,

$CM = \frac{2}{3}CQ = 16$  см. Так как  $AM^2 + MC^2 = AC^2$ , то  $\triangle AMC$  — прямо-

угольный, и  $S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2}AM \cdot CM = 96 \text{ см}^2$ ;  $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle AMC} = 288 \text{ см}^2$ .

*Ответ:* 288 см<sup>2</sup>.

**10.326.** Медианы треугольника равны 5, 6 и 5 м. Найти площадь треугольника.

*Решение.*

Площадь  $\triangle ABC$  в 3 раза больше площади  $\triangle AOC$  ( $O$  — точка пересечения медиан; рис. 10.114). Имеем  $S_{\triangle AOC} =$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot OK = KC \cdot OK. \text{ Но } OK = \frac{1}{2}BK = 2 \text{ м,}$$

$$KC = \sqrt{OC^2 - OK^2}, \text{ где } OC = \frac{2}{3}MC = \frac{10}{3} \text{ м} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KC = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 2^2} = \frac{8}{3} \text{ м, и } S_{\triangle AOC} = \frac{16}{3} \text{ м}^2, \text{ т.е. } S_{\triangle ABC} = 16 \text{ м}^2.$$

*Ответ:* 16 м<sup>2</sup>.

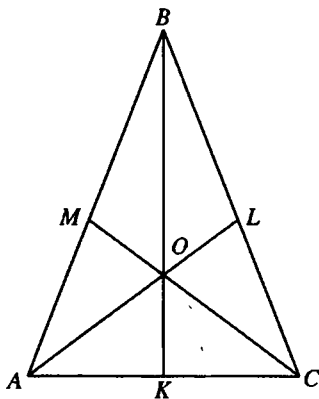


Рис. 10.114

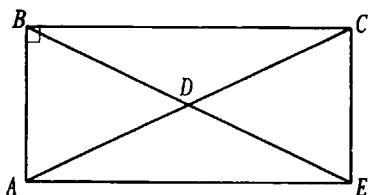


Рис. 10.115

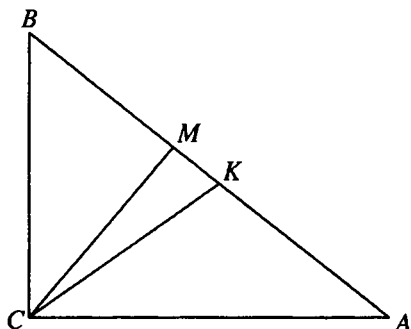


Рис. 10.116

**10.327.** Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и  $\sqrt{15}$  см, а медиана третьей стороны равна 2 см.

*Решение.*

Пусть  $BD$  — медиана  $\triangle ABC$  (рис. 10.115),  $AB = 1$  см,  $BC = \sqrt{15}$  см,  $BD = 2$  см. На продолжении отрезка  $BD$  за точку  $D$  отложим отрезок  $DE = BD$ .  $ABCE$  — параллелограмм, поэтому  $AC^2 + BE^2 = 2(AB + BC)^2$ ;  $AC^2 = 2(1 + 15) - 16$ ;  $AC = 4$  см.

Тогда  $AC^2 = AB^2 + BC^2$  и  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ см}^2.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{15}}{2}$  см<sup>2</sup>.

**10.328.** Стороны треугольника равны 3, 4 и 5 см. Определить площади треугольников, на которые разбивается данный треугольник высотой и медианой, проведенными к большей по величине стороне.

*Решение.*

Пусть в  $\triangle ABC$  (рис. 10.116)  $BC = 3$  см,  $AC = 4$  см,  $AB = 5$  см,  $CK$  — медиана,  $CM$  — высота. Так как  $AB^2 = BC^2 + AC^2$ , то  $\triangle ABC$  — прямо-

угольный. Тогда  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = 6$  см<sup>2</sup>;  $BM = \frac{BC^2}{AB} = \frac{9}{5}$  см;  $CM =$

$= \frac{BC \cdot AC}{AB} = \frac{12}{5}$  см.  $S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot CM = \frac{54}{25} = 2,16$  (см<sup>2</sup>). Так как  $CK$  —

медиана, то  $S_{\triangle ACK} = S_{\triangle BCK} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 3$  см<sup>2</sup>.  $S_{\triangle CMK} = S_{\triangle BCK} - S_{\triangle BMC} = 0,84$  см<sup>2</sup>.

Ответ: 3 см<sup>2</sup>; 0,84 см<sup>2</sup>; 2,16 см<sup>2</sup>.

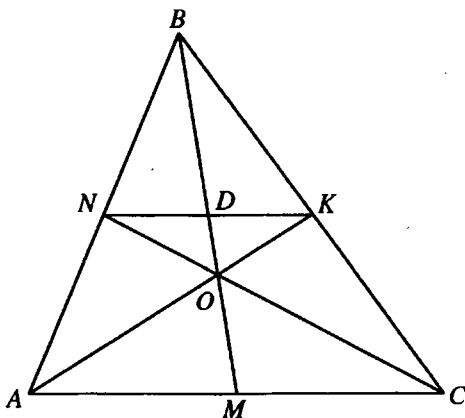


Рис. 10.117

**10.329.** Стороны треугольника равны 13, 14 и 15 см. Определить площади треугольников, на которые разбивается данный треугольник его медианами.

*Решение.*

Докажем, что все указанные в условии треугольники равновелики. Имеем  $S_{\Delta AOM} = S_{\Delta COM}$  (рис. 10.117), так как эти треугольники имеют одинаковые высоты и одинаковые основания, равные  $AC/2$ . Аналогично  $S_{\Delta AON} = S_{\Delta BON}$  и  $S_{\Delta BOK} = S_{\Delta COK}$ . Но  $S_{\Delta BOK} = S_{\Delta BON}$ , так как  $S_{\Delta BOK} = S_{\Delta DOK} + S_{\Delta BKD}$ ,  $S_{\Delta BON} = S_{\Delta DON} + S_{\Delta BND}$ , а  $S_{\Delta DOK} = S_{\Delta DON}$  и  $S_{\Delta BKD} = S_{\Delta BND}$  (у этих треугольников равны основания  $KD$  и  $ND$ , а также опущенные из них высоты). Итак, площадь каждого треугольника равна  $S_{\Delta ABC}/6$ . Теперь по формуле Герона находим  $S_{\Delta ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ см}^2$ , откуда  $S_{\Delta AOM} = 14 \text{ см}^2$ .

*Ответ:*  $14 \text{ см}^2$ .

**10.330.** Длины катетов некоторого прямоугольного треугольника являются корнями уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ . Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

*Решение.*

Не нарушая общности, можем принять, что  $a > 0$  (случай  $a < 0$  рассматривается абсолютно аналогично). Тогда его гипотенуза равна  $\sqrt{m^2 + n^2}$ ,

радиус вписанной окружности  $r = \frac{m + n - \sqrt{m^2 + n^2}}{2}$ . По условию

$$m+n = -\frac{b}{a}; \quad mn = \frac{c}{a}, \quad r = \frac{m+n - \sqrt{(m+n)^2 - 2mn}}{2} = \frac{-\frac{b}{a} - \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}}{2} =$$

$$= -\frac{b + \sqrt{b^2 - 2ac}}{2a}.$$

Ответ:  $-\frac{b + \sqrt{b^2 - 2ac}}{2a}$ .

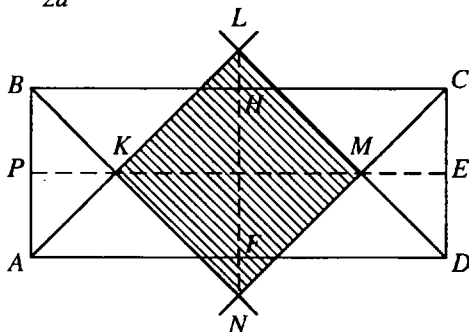


Рис. 10.118

**10.331.** В прямоугольнике со сторонами  $a$  и  $b$  проведены биссектрисы всех углов до взаимного пересечения. Найти площадь четырехугольника, образованного биссектрисами.

*Решение.*

$KLMN$  — четырёхугольник, образованный при взаимном пересечении биссектрис углов прямоугольника  $ABCD$  (рис. 10.118),  $AB = a$ ,  $AD = b$ . Не нарушая общности, примем, что  $b > a$ . Так как  $ABCD$  — не ромб, то из свойств биссектрис углов параллелограмма следует, что  $KLMN$  — прямоугольник. Точки  $P$  и  $E$ , соответственно, — середины сторон  $AB$  и  $CD$  прямоугольника. Так как  $\triangle AKB$  и  $\triangle CMD$  — равнобедренные, то  $KP$  и  $ME$  — серединные перпендикуляры к противоположным сторонам прямоугольника и, следовательно, точки  $P$ ,  $K$ ,  $M$ ,  $E$  лежат на одной прямой. Тогда прямая  $KM$ , делящая пополам  $\angle AKB$ , делит пополам и вертикальный с ним  $\angle NKL$  и, следовательно, прямоугольник  $KLMN$

является квадратом. Из  $\triangle АКВ$  :  $KP = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$ .  $ME = KP = \frac{a}{2}$ ;

$$PE = BC = b.$$

Тогда  $KM = b - a$  и искомая площадь  $S = \frac{1}{2} KM^2 = \frac{(b-a)^2}{2}$ .

Ответ:  $\frac{(b-a)^2}{2}$ .

**10.332.** Определить стороны прямоугольного треугольника, у которого периметр равен  $2p$ , а площадь равна  $m^2$ .

*Решение.*

Пусть  $a$  и  $b$  — катеты,  $c$  — гипотенуза данного треугольника. Используя свойства прямоугольного треугольника, составим систему:

$$\begin{cases} a+b+c=2p, \\ \frac{ab}{2}=m^2, \\ a^2+b^2=c^2. \end{cases} \quad \text{Имеем: } a+b=2p-c, \quad a^2+2ab+b^2=(2p-c)^2. \text{ Сле-}$$

довательно,  $c^2+4m^2=4p^2-4pc+c^2$ ;  $c = \frac{p^2-m^2}{p}$ . Тогда  $a+b =$

$= 2p - c = \frac{p^2+m^2}{p}$ ,  $ab = 2m^2$ . Значит,  $a$  и  $b$  — корни уравнения

$$x^2 - \frac{p^2+m^2}{p}x + 2m^2 = 0. \text{ Тогда } px^2 - (p^2+m^2)x + 2m^2p = 0;$$

$$x = \frac{p^2+m^2 \pm \sqrt{(p^2+m^2)^2 - 8p^2m^2}}{2p}. \text{ Катеты данного треугольника}$$

$$\frac{p^2+m^2 + \sqrt{(p^2+m^2)^2 - 8p^2m^2}}{2p} \text{ и } \frac{p^2+m^2 - \sqrt{(p^2+m^2)^2 - 8p^2m^2}}{2p}.$$

Ответ:  $\frac{p^2-m^2}{p}$ ;  $\frac{p^2+m^2 \pm \sqrt{(p^2+m^2)^2 - 8p^2m^2}}{2p}$ .

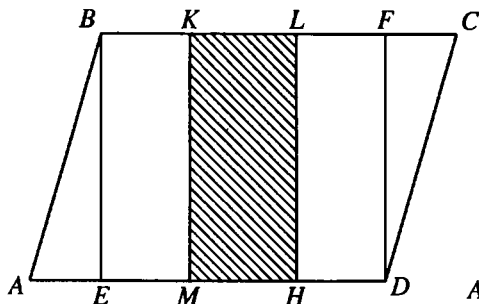


Рис. 10.119

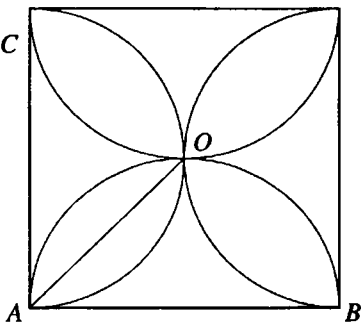


Рис. 10.120

**10.333.** Параллелограмм  $ABCD$ , у которого  $AB = 153$  см,  $AD = 180$  см,  $BE = 135$  см ( $BE$  — высота), разделен на три равновеликие фигуры прямыми, перпендикулярными  $AD$ . На каком расстоянии от точки  $A$  находятся точки пересечения этих перпендикуляров с  $AD$ ?

*Решение.*

Пусть  $KM$  и  $LH$  — прямые, разбивающие параллелограмм  $ABCD$  (рис. 10.119) на три равновеликие фигуры,  $DF$  — высота параллелограмма. Тогда  $BK = EM = HD = LF$ . Пусть  $BK = x$  см. Из  $\triangle AEB$  ( $\angle AEB = 90^\circ$ ):

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 72 \text{ см. Тогда } AM = (x + 72) \text{ см и } S_{ABKM} =$$

$$= \frac{AM + BK}{2} \cdot BE = 135(x + 36) \text{ см}^2. S_{ABCD} = AD \cdot BE = 180 \cdot 135 \text{ см}^2. \text{ Так как}$$

$$S_{ABKM} = \frac{1}{3} S_{ABCD}, \text{ то } 135(x + 36) = 60 \cdot 135; x = 24. \text{ Следовательно, } AM = 96 \text{ см,}$$

$$AH = AD - HD = 156 \text{ см.}$$

*Ответ:* 96 см; 156 см.

**10.334.** Внутри квадрата со стороной  $a$  на каждой его стороне как на диаметре построена полуокружность. Найти площадь розетки, ограниченной дугами полуокружностей.

*Решение.*

Хорда  $OA$  стягивает дугу  $90^\circ$  (рис. 10.120); следовательно, площадь по-

$$\text{ловины лепестка равна } \frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8} = \frac{a^2(\pi - 2)}{16}.$$

$$\text{Отсюда искомая площадь } S = 8 \cdot \frac{a^2(\pi - 2)}{16} = \frac{a^2(\pi - 2)}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^2(\pi - 2)}{2}.$$

**10.335.** Периметр сектора равен 28 см, а его площадь равна 49 см<sup>2</sup>. Определить длину дуги сектора.

*Решение.*

Периметр сектора  $p = 2r + l$ , где  $r$  — радиус сектора,  $l$  — длина дуги сектора. Площадь сектора  $S = \frac{rl}{2}$ .

$$\text{Тогда } \begin{cases} 2r + l = 28, \\ rl = 98, \end{cases} \begin{cases} r = \frac{28-l}{2}, \\ rl = 98, \end{cases} l(28-l) = 196; l^2 - 28l + 196 = 0; l = 14.$$

*Ответ:* 14 см.

**10.336.** В равносторонний треугольник  $ABC$  со стороной  $a = 2$  см вписан круг; точка  $A$  является центром второго круга с радиусом 1 см. Найти площадь пересечения этих кругов.

*Решение.*

Искомая площадь равна сумме площадей сегмента  $DmE$  круга радиуса  $R = \sqrt{3}/3$  см с центром  $O$ , вписанного в  $ABC$ , и сегмента круга радиуса  $r = 1$  см (рис. 10.121),  $\angle DOE = 120^\circ$ . Тогда

$$S_{DmE} = \frac{1}{3} \pi R^2 - S_{\Delta DOE} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2}{2} \sin 120^\circ = \frac{\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см}^2;$$

$$S_{DnE} = \frac{1}{6} \pi r^2 - S_{\Delta DAE} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2. \text{ Следовательно, искомая площадь}$$

$$S = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{18} \text{ см}^2.$$

$$\text{Ответ: } \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{18} \text{ см}^2.$$

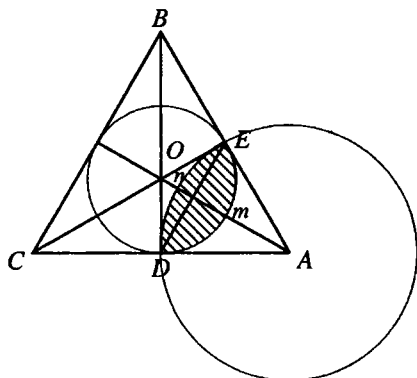


Рис. 10.121



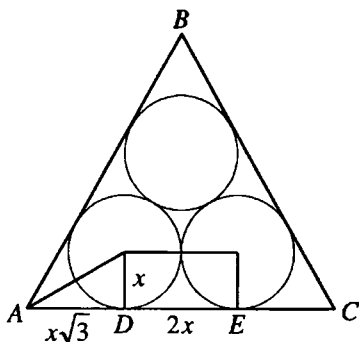


Рис. 10.122

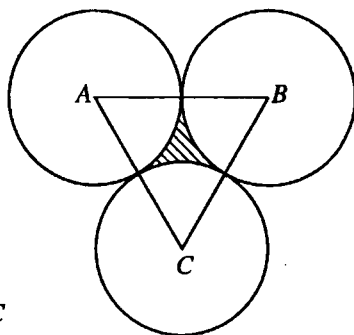


Рис. 10.123

**10.337.** Внутри правильного треугольника со стороной  $a$  расположены три равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и двух других окружностей. Найти площадь части треугольника, расположенной вне этих окружностей.

*Решение.*

Пусть  $x$  — радиус каждой из окружностей. Тогда  $AD = x\sqrt{3}$ ,  $DE = 2x$ ,

$$EC = x\sqrt{3} \text{ (рис. 10.122)}. \text{ Отсюда } 2x\sqrt{3} + 2x = a, \quad x = \frac{a}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Площадь каждого из кругов равна  $\pi x^2 = \frac{\pi a^2(2-\sqrt{3})}{8}$ ; поэтому искомая площадь  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{3\pi a^2(2-\sqrt{3})}{8} = \frac{a^2(2\sqrt{3}-6\pi+3\pi\sqrt{3})}{8}$ .

$$\text{Ответ: } \frac{a^2(2\sqrt{3}-6\pi+3\pi\sqrt{3})}{8}.$$

**10.338.** Криволинейный треугольник составлен тремя равными попарно касающимися дугами окружностей радиуса  $R$ . Найти площадь этого треугольника.

*Решение.*

Искомая площадь равна разности площади равностороннего  $\triangle ABC$  со стороной  $2R$  и суммы площадей секторов, ограниченных данными дугами

$$\text{(рис. 10.123): } S = S_{\triangle ABC} - 3S_{\text{сект}} = \frac{4R^2\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{\pi R^2}{6} = \frac{R^2(2\sqrt{3}-\pi)}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{R^2(2\sqrt{3}-\pi)}{2}.$$

**10.339.** Центр равностороннего треугольника со стороной, равной 6 см, совпадает с центром окружности радиуса 2 см. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этой окружности.

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр правильного  $\triangle ABC$  (рис. 10.124),  $AB = 6$  см. Радиус  $r_1 = 2$  см круга, о котором говорится в условии задачи, удовлетворяет неравенству  $r < r_1 < R$ , где  $r = \sqrt{3}$  см — радиус

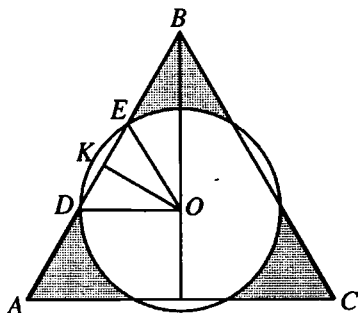


Рис. 10.124

усу  $r < r_1 < R$ , где  $r = \sqrt{3}$  см — радиус вписанного,  $R = 2\sqrt{3}$  — радиус описанного кругов  $\triangle ABC$ , поэтому круг пересекает стороны  $\triangle ABC$ .  $D$  и  $E$  — точки пересечения круга со стороной  $AB$  треугольника,  $K$  — середина  $DE$ . Тогда  $OK \perp DE$ ,  $OK = r = \sqrt{3}$  см,

$$OD = r_1 = 2 \text{ см. Из } \triangle OKD \text{ } (\angle OKD = 90^\circ): \cos \angle DOK = \frac{KO}{OD} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\angle DOK = 30^\circ$ .  $\angle DOE = 2\angle DOK = 60^\circ$ . Следовательно,  $\triangle DOE$  — равно-

сторонний и его площадь  $S_1 = \sqrt{3}$  см<sup>2</sup>. Искомая площадь  $S = S_{\triangle ABC} - S_2$ , где  $S_2$  — площадь части круга, расположенной внутри  $\triangle ABC$ .

$S_2 = S_{кр} - 3S_3$ , где  $S_3$  — площадь сегмента, ограниченного хордой  $DE$ .

$$S_3 = S_{\text{сект}} - S_1 = \frac{4\pi}{6} - \sqrt{3} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2.$$

$$S_2 = 4\pi - 3 \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3} = 2\pi + 3\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

$$S = S_{\triangle ABC} - S_2 = 9\sqrt{3} - (2\pi + 3\sqrt{3}) = 2(3\sqrt{3} - \pi) \text{ см}^2.$$

*Ответ:*  $2(3\sqrt{3} - \pi)$  см<sup>2</sup>.

**10.340.** В ромб вписана окружность радиуса  $R$ . Найти площадь ромба, если его большая диагональ в 4 раза больше радиуса вписанной окружности.

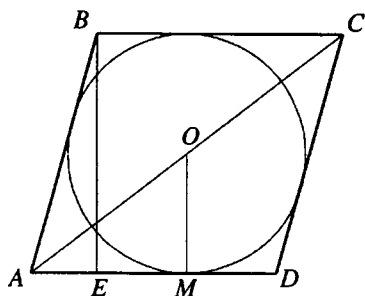


Рис. 10.125

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр окружности, вписанной в ромб  $ABCD$  (рис. 10.125),  $M$  — точка её касания со стороной ромба. Тогда  $OM = R$ ,  $AO = 2R$ ,  $\angle AMO = 90^\circ$ . Следовательно,  $\angle OAM = 30^\circ$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ . Пусть  $BE$  — высота ромба. Тогда  $BE = 2R$  и из  $\triangle AEB$  ( $\angle AEB = 90^\circ$ ):

$$AB = \frac{BE}{\sin \angle BAD} = \frac{4R}{\sqrt{3}} = \frac{4R\sqrt{3}}{3}. \text{ Площадь ромба } S = AD \cdot BE = \frac{8R^2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ:  $\frac{8R^2\sqrt{3}}{3}$ .

**10.341.** Гипотенуза прямоугольного треугольника равна  $c$ . Проекция вершины прямого угла на гипотенузу делит ее на два отрезка, из которых меньший относится к большему, как больший ко всей гипотенузе. Определить площадь треугольника.

*Решение.*

Пусть  $x$  — больший отрезок гипотенузы. Тогда по условию  $\frac{c-x}{x} = \frac{x}{c}$ ,

$$x^2 + cx - c^2 = 0, \text{ откуда } x = \frac{c(\sqrt{5}-1)}{2} \text{ (второй корень уравнения не под-}$$

ходит). Отсюда  $x^2 = \frac{c^2(3-\sqrt{5})}{2}$ . Обозначив через  $h$  высоту, проведен-

ную к гипотенузе, имеем  $\frac{c-x}{h} = \frac{h}{x}$ , и, значит,  $h^2 = cx - x^2 =$

$$= c^2 \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) = c^2(\sqrt{5}-2), \text{ т.е. } h = c\sqrt{\sqrt{5}-2}. \text{ Следовательно,}$$

$$S = \frac{1}{2}ch = \frac{c^2\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}.$$

Ответ:  $0,5c^2\sqrt{\sqrt{5}-2}$ .

**10.342.** Длины сторон и диагоналей параллелограмма равны соответственно  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $f$ . Найти углы параллелограмма, если  $a^4 + b^4 = c^2 f^2$ .

*Решение.*

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — углы данного параллелограмма, противолежащие соответственно диагоналям  $c$  и  $f$  и  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Тогда  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ ;  
 $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$ . Перемножив уравнения системы

$$\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha; \\ f^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha, \end{cases} \text{ получаем: } f^2 c^2 = (a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 \alpha.$$

Тогда  $a^4 + b^4 = a^4 + 2a^2 b^2 + b^4 - 4a^2 b^2 \cos^2 \alpha$ ;  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$ ;  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;

$\alpha = 45^\circ$ ;  $\beta = 180 - \alpha = 135^\circ$ .

*Ответ:*  $45^\circ$ ;  $135^\circ$ .

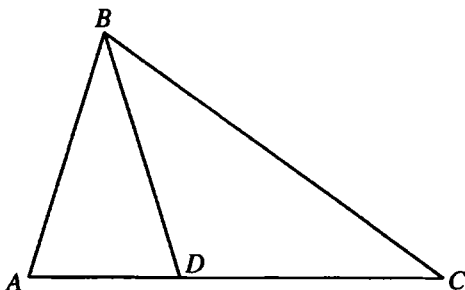


Рис. 10.126

**10.343.** Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14 см, а биссектриса угла между ними содержит 12 см.

*Решение.*

Пусть  $BD$  — биссектриса  $\triangle ABC$  (рис. 10.126),  $AB = 14$  см,  $BC = 35$  см,  $BD = 12$  см,  $\angle ABD = \angle CBD = \alpha$ .  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD}$ .

$$\text{Тогда } \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BD \sin \angle ABD + \frac{1}{2} BC \cdot BD \sin \angle CBD;$$

$$14 \cdot 35 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 14 \cdot 12 \sin \alpha + 35 \cdot 12 \sin \alpha; \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5}.$$

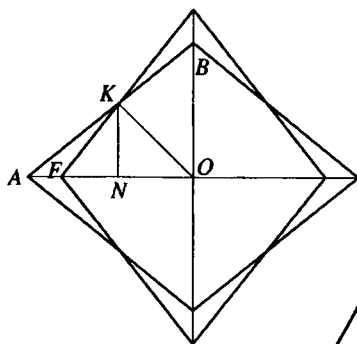


Рис. 10.127

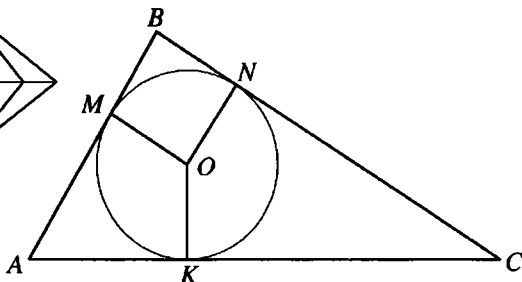


Рис. 10.128

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}. \text{ Тогда } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 14 \cdot \frac{24}{25} = 235,2 \text{ см}^2.$$

Ответ: 235,2 см<sup>2</sup>.

**10.344.** Вычислить площадь общей части двух ромбов, длины диагоналей первого из которых равны 4 и 6 см, а второй получен поворотом первого на 90° вокруг его центра.

*Решение.*

Искомая площадь  $S$  равна  $4(S_{\Delta AOB} - S_{\Delta AFK})$  (рис. 10.127). Находим

$$S_{\Delta AOB} = 0,5 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \text{ см}^2. \text{ Сторона ромба равна } \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ (см).}$$

В  $\Delta AOB$  отрезок  $OK$  — биссектриса; тогда, используя формулу

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}, \text{ имеем } OK = \frac{\sqrt{6(5+\sqrt{13})(5-\sqrt{13})}}{5} = \frac{6\sqrt{2}}{5} \text{ см.}$$

$$\text{Далее, } S_{\Delta AFK} = \frac{1}{2} AF \cdot KH, \text{ где } KH = \frac{OK}{\sqrt{2}} = \frac{6}{5} \text{ см, } AF = 3 - 2 = 1 \text{ см;}$$

поэтому  $S_{\Delta AFK} = 0,6 \text{ см}^2$ . Окончательно  $S = 4(3 - 0,6) = 9,6 \text{ см}^2$ .

Ответ: 9,6 см<sup>2</sup>.

**10.345.** Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 2 см. Точка касания этой окружности делит одну из сторон на отрезки длиной 4 и 6 см. Определить вид треугольника и вычислить его площадь.

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр окружности радиуса  $r = 2$  см, вписанной в  $\triangle ABC$  (рис. 10.128),  $M, N, K$  — точки касания этой окружности соответственно со сторонами  $AB, BC, AC$  треугольника,  $AK = 4$  см,  $KC = 6$  см. Тогда  $AM = AK = 4$  см,  $CN = CK = 6$  см,  $BM = BN = x$  см. Полупериметр данного треугольника  $p = (x + 10)$  см и его площадь  $S = pr = 2(x + 10)$  см<sup>2</sup>, или по формуле Герона:

$$S = \sqrt{(10+x)(10+x-(x+4))(10+x-(x+6))(10+x-10)} = 2\sqrt{6x(x+10)}.$$

Получаем:  $2\sqrt{6x(x+10)} = 2(x+10)$ ;  $\sqrt{6x} = \sqrt{x+10}$ ;  $x = 2$ . Значит,  $S = 2(x+10) = 24$  см<sup>2</sup>, а стороны треугольника равны 10 см, 8 см и 6 см, и так как  $8^2 + 6^2 = 10^2$ , то  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

*Ответ:* 24 см<sup>2</sup>; треугольник прямоугольный.

**10.346.** Круг с центром  $O_1$  разделен диаметром  $AB$  на два полуокруга. В одном из них построены два новых полуокруга, опирающиеся на  $O_1A$  и  $O_1B$  как на диаметры. В криволинейную фигуру, ограниченную контурами этих трех полуокругов, вписан круг. Во сколько раз его площадь меньше площади данного круга?

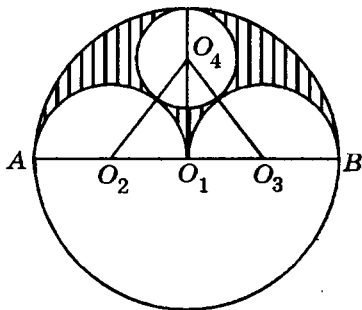


Рис. 10.129

*Решение.*

Пусть  $O_2$  — середина  $AO_1$  — центр одного полуокруга,  $O_3$  — середина  $BO_1$  — центр второго полуокруга,  $O_4$  — центр круга, вписанного в криволинейную фигуру, о которой говорится в условии задачи (рис. 10.129).

Пусть  $R$  — радиус круга с центром  $O_1$ , а  $S_1$  — его площадь,  $r$  — радиус круга с центром  $O_4$ , а  $S_2$  — его площадь. Имеем:  $O_1O_2 = O_1O_3 = \frac{R}{2}$ ,

$$O_2O_4 = O_3O_4 = \frac{R}{2} + r, O_1O_4 = R - r. \text{ В треугольнике } O_2O_4O_3 : O_2O_4 = O_3O_4,$$

точка  $O_1$  — середина  $O_2O_3$ . Отсюда следует, что  $O_1O_4 \perp O_2O_3$ , тогда

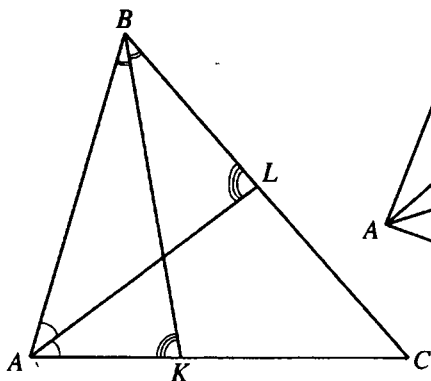


Рис. 10.130

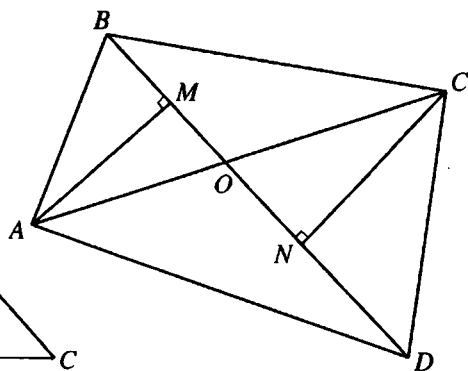


Рис. 10.131

$$O_2O_4^2 = O_1O_2^2 + O_1O_4^2, \text{ т.е. } \left(\frac{R}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R-r)^2. R^2 = 3Rr, R = 3r.$$

Следовательно,  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{R^2}{r^2} = 9$ .

Ответ: в 9 раз.

**10.347.** Биссектрисы углов  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  одинаково наклонены к сторонам  $BC$  и  $AC$ . Найти зависимость между углами  $A$  и  $B$ .

*Решение.*

Рассмотрим два случая (рис. 10.130):

1)  $\angle AKB = \angle ALB$ ; 2)  $\angle AKB = \angle ALC$ .

1)  $\angle AKB + \angle A + \frac{1}{2}\angle B = \angle ALB + \angle B + \frac{1}{2}\angle A$  (суммы углов треугольника), т.е.  $\angle A = \angle B$ .

2) Так как  $\angle ALC$  — внешний угол  $\triangle ABL$ , то  $\angle ALC = \angle B + \frac{1}{2}\angle A$ . Далее,  $\angle AKB + \angle A + \frac{1}{2}\angle B = \pi$ . Но  $\angle AKB = \angle ALC$  и, значит,  $\angle B + \frac{1}{2}\angle A = \pi - \angle A - \frac{1}{2}\angle B$ , откуда  $\angle A + \angle B = \frac{2\pi}{3}$ .

Ответ:  $\angle A = \angle B$  или  $\angle A + \angle B = \frac{2\pi}{3}$ .

**10.348.** Выпуклый четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника; площади трех из них равны 10, 20 и 30 см<sup>2</sup>, и каждая меньше площади четвертого треугольника. Найти площадь данного четырехугольника.

*Решение.*

Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  четырехугольника  $ABCD$  (рис. 10.131),  $S_{\Delta AOB} = 10$  см<sup>2</sup>,  $S_{\Delta AOD} = 20$  см<sup>2</sup>,  $S_{\Delta BOC} = 30$  см<sup>2</sup>.

Опустим на  $BD$  перпендикуляры  $AM$  и  $CN$ . Имеем

$$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOD}} = \frac{\frac{1}{2}BO \cdot AM}{\frac{1}{2}DO \cdot AM} = \frac{BO}{DO} = \frac{1}{2}, \quad \frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta COD}} = \frac{\frac{1}{2}BO \cdot CN}{\frac{1}{2}DO \cdot CN} = \frac{BO}{DO}. \quad \text{Тогда}$$

$$S_{\Delta COD} = 2S_{\Delta BOC} = 60 \text{ см}^2, \quad S_{ABCD} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta AOD} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} = 120 \text{ см}^2.$$

*Ответ:* 120 см<sup>2</sup>.

**10.349.** Окружность радиуса  $R$  разделена на 4 большие и 4 малые части, которые чередуются одна за другой. Большая часть в два раза длиннее малой. Определить площадь восьмиугольника, вершинами которого являются точки деления окружности.

*Решение.*

Пусть малая дуга содержит  $x$  радианов. Тогда  $4x + 8x = 2\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$ . Таким образом, восьмиугольник содержит четыре треугольника с центральным углом  $\frac{\pi}{3}$  (их суммарная площадь  $4 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$ ) и четыре треугольника с центральным углом  $\frac{\pi}{6}$  (их суммарная площадь  $4 \cdot \frac{R^2}{4}$ ). Искомая площадь составляет  $S = R^2(\sqrt{3} + 1)$ .

*Ответ:*  $S = R^2(\sqrt{3} + 1)$ .

**10.350.** На медиане  $BD$  треугольника  $ABC$ , площадь которого равна  $S$ , взята точка  $E$  так, что  $DE = \frac{1}{4}BD$ . Через точку  $E$  проведена прямая  $AE$ , пересекающая сторону  $BC$  в точке  $F$ . Найти площадь треугольника  $AFC$ .



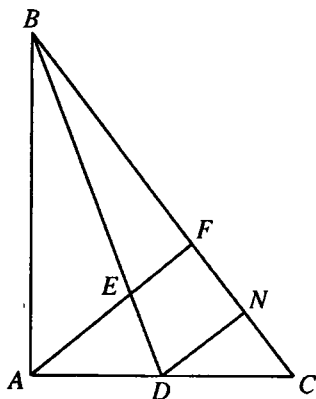


Рис. 10.132

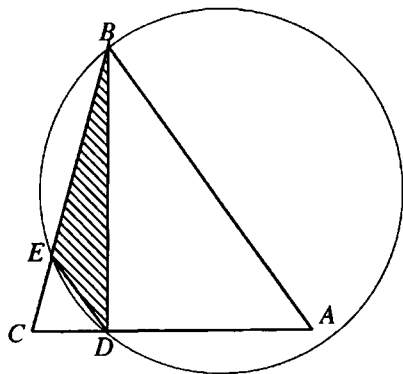


Рис. 10.133

*Решение.*

Проведём  $DN \parallel AF$  (рис. 10.132). Тогда  $\frac{BF}{FN} = \frac{BE}{ED} = 3$ , и т.к.  $D$  — середина  $AC$ , то  $N$  — середина  $FC$ . Следовательно,  $BC = BF + FC = 3FN + 2FN = 5FN = \frac{5}{2}FC$ . Так как  $\triangle ABC$  и  $\triangle AFC$  имеют общую высоту, опущенную из вершины  $A$ , то  $\frac{S_{\triangle AFC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{FC}{BC} = \frac{2}{5}$ . Следовательно,  $S_{\triangle AFC} = \frac{2S}{5}$ .

Ответ:  $\frac{2S}{5}$ .

**10.351.** Пусть  $BD$  — высота треугольника  $ABC$ , точка  $E$  — середина  $BC$ . Вычислить радиус круга, описанного около треугольника  $BDE$ , если  $AB = 30$  см,  $BC = 26$  см и  $AC = 28$  см.

*Решение.*

Найдём площадь данного треугольника по формуле Герона:

$S_{\triangle ABC} = 336$  см<sup>2</sup>. Тогда  $BD = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AC} = 24$  см (рис. 10.133).  $DE$  — медиана прямоугольного  $\triangle BDC$ , проведенная к гипотенузе  $BC$ . Тогда  $DE = \frac{1}{2}BC = 13$  см,  $\cos \angle CBD = \frac{BD}{BC} = \frac{12}{13}$ . Тогда  $\sin \angle CBD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CBD} = \frac{5}{13}$ .

Радиус окружности, описанной около  $\triangle BED$ ,  $R = \frac{DE}{2 \sin \angle CBD} = 16,9$  см.

*Ответ:* 16,9 см.

**10.352.** Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе, вдвое больше площади прямоугольного треугольника с указанной гипотенузой. Найти отношение катетов.

*Решение.*

Пусть  $a$ ,  $b$  — катеты,  $c$  — гипотенуза прямоугольного треугольника с площадью  $S = \frac{1}{2}ab$ . Тогда площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе  $c$ , по условию равна  $2S = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$ . Используя теорему Пифагора, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, \\ ab = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Если  $x = \frac{a}{b}$  ( $a > b$ ), то имеем  $x + \frac{1}{x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 1}{\sqrt{3}}$ . Так как  $x > 1$ , то  $x = \sqrt{3}$ .

*Ответ:*  $\sqrt{3}$ .

**10.353.** На каждой медиане треугольника взята точка, делящая медиану в отношении 1:3, считая от вершины. Во сколько раз площадь треугольника с вершинами в этих точках меньше площади исходного треугольника?

*Решение.*

Пусть  $O$  — точка пересечения медиан  $AN$ ,  $BK$ ,  $CM$  треугольника  $ABC$  (рис. 10.134),

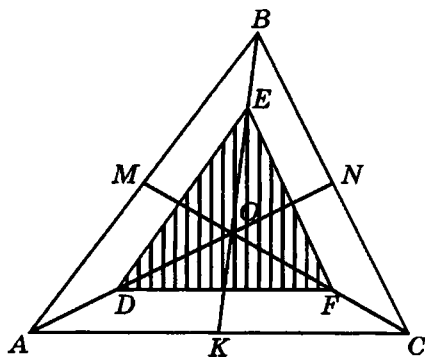


Рис. 10.134

$\frac{AD}{DN} = \frac{BE}{EK} = \frac{CF}{FM} = \frac{1}{3}$ . Пусть  $AD = x$ . Тогда  $DN = 3x$ ,  $AN = 4x$ ,

$AO = \frac{2}{3} AN = \frac{8}{3}x$ ,  $OD = AO - OD = \frac{5}{3}x$ ,  $\frac{OD}{OA} = \frac{5}{8}$ . Следовательно,

но, медианы  $\triangle DEF$  равны  $\frac{5}{8}$  медиан  $\triangle ABC$ ,  $\triangle DEF \sim \triangle ABC$  и

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \left(\frac{OA}{OD}\right)^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = 2,56.$$

Ответ: в 2,56 раза.

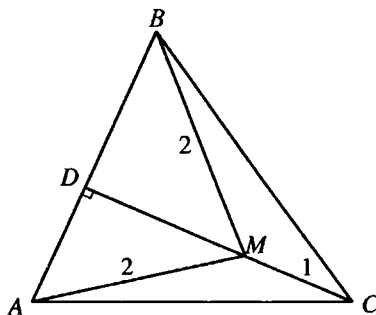


Рис. 10.135

**10.354.** Точка  $M$  лежит внутри равностороннего треугольника  $ABC$ . Вычислить площадь этого треугольника, если известно, что  $AM = BM = 2$  см, а  $CM = 1$  см.

Решение.

Обозначим сторону треугольника через  $a$  и проведем  $MD \perp AB$  (рис. 10.135). Поскольку  $AM = BM$ , точки  $C, M, D$  лежат на высоте

$CD$ . В  $\triangle ACD$  и  $\triangle AMD$  имеем  $(1 + MD)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$ ,  $MD^2 = 4 - \frac{a^2}{4}$ . Тогда

$a^2 = 4(4 - MD^2)$  и получаем квадратное уравнение  $(1 + MD)^2 =$

$= 3(4 - MD^2)$  или  $4MD^2 + 2MD - 11 = 0$ , откуда  $MD = \frac{3\sqrt{5} - 1}{4}$  (второй

корень не подходит). Далее находим  $a^2 = 4(4 - MD^2) = 16 - \frac{46 - 6\sqrt{5}}{4} =$

$= \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}$  и, следовательно,

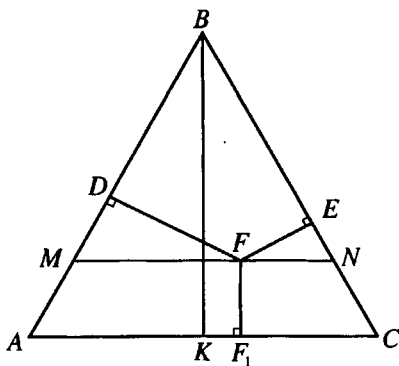


Рис. 10.136.1

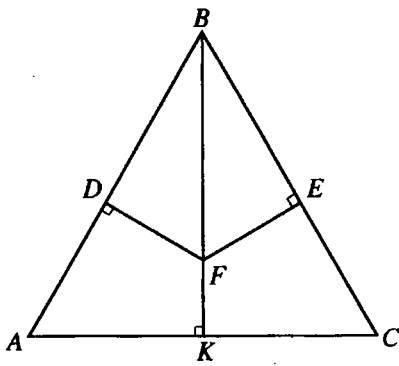


Рис. 10.136.2

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(9 + 3\sqrt{5})\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3} + 3\sqrt{15}}{8} \approx 3,4 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $(9\sqrt{3} + 3\sqrt{15})/8 \approx 3,4 \text{ см}^2$ .

**10.355.** Равнобедренный треугольник со сторонами 8, 5 и 5 разделен на три равновеликие части перпендикулярами, проведенными из некоторой точки к его сторонам.

Найти расстояние от этой точки до каждой стороны данного треугольника.

*Решение.*

Пусть  $BK$  — высота  $\triangle ABC$ ,  $AB = BC$  (рис. 10.136.1). Точки  $D$ ,  $E$ ,  $F_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $F$  на стороны треугольника и разбивающих его на три равновеликие части. Докажем, используя метод доказательства от противного, что точка  $F$  принадлежит  $BK$ , а точка  $F_1$  совпадает с точкой  $K$ . Пусть  $AF_1 > F_1C$ . Через точку  $F$  параллельно  $AC$  проведем отрезок  $MN$ . Тогда  $MF > FN$ .  $S_{AF_1FD} = S_{AMFF_1} + S_{\triangle MDF}$ ,  $S_{CF_1FE} = S_{CNFF_1} + S_{\triangle NEF}$ . Т.к.  $MF > FN$ ,  $AF_1 > F_1C$ ,  $FF_1$  — общая высота трапеций  $AMFF_1$  и  $CNFF_1$ , то  $S_{AMFF_1} > S_{CNFF_1}$ . Т.к.  $\triangle MDF \sim \triangle NEF$  ( $\angle MDF = \angle NEF = 90^\circ$ ,  $\angle DMF = \angle ENF = \angle A$ ) и  $MF > FN$ , то  $S_{\triangle MDF} > S_{\triangle NEF}$ . Следовательно,  $S_{AF_1FD} > S_{CF_1FE}$ , что противоречит условию. Итак, точка  $F$  принадлежит  $BK$  (рис. 10.136.2). Из

$$\Delta AKB (\angle AKB = 90^\circ): BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = 3. S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK = 12.$$

$$S_{FDBE} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} = 4. S_{\Delta FDB} = \frac{1}{2} S_{FDBE} = 2. \text{ Пусть } FD = x, DB = y.$$

$$FD \cdot DB = 2S_{\Delta FDB} = 4, xy = 4.$$

$$\text{Из } \angle ABK: \frac{FD}{DB} = \frac{AK}{BK} = \frac{4}{3}, \frac{x}{y} = \frac{4}{3}.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 4, \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3}. \end{cases} \text{ Тогда } x = \frac{4}{3}y, \frac{4}{3}y^2 = 4, y = \sqrt{3}, x = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Из } \Delta BDF (\angle BDF = 90^\circ): BF = \sqrt{FD^2 + DB^2} = \sqrt{\frac{16}{3} + 3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$$FK = BK - BF = 3 - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{9 - 5\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{9 - 5\sqrt{3}}{3}.$$

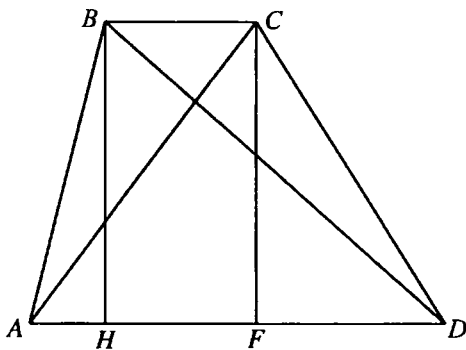


Рис. 10.137

**10.356.** Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

*Решение.*

Пусть  $x$  — сторона прямоугольника, вписанного в окружность радиуса  $R$ . Тогда его площадь равна  $x\sqrt{4R^2 - x^2}$ . Площадь вписанного квадрата равна  $2R^2$ . Покажем, что  $2R^2 \geq x\sqrt{4R^2 - x^2}$ . В самом деле, из очевидного неравенства  $(2R^2 - x^2)^2 \geq 0$  получаем  $4R^4 \geq x^2(4R^2 - x^2)$ , откуда и следует, что  $2R^2 \geq x\sqrt{4R^2 - x^2}$  (знак неравенства сохранится, поскольку  $2R^2 > 0$  и  $x\sqrt{4R^2 - x^2} > 0$ ), что и требовалось доказать.

**10.357.** В трапеции  $ABCD$  известны длины оснований  $AD = 24$  см и  $BC = 8$  см и диагоналей  $AC = 13$  см,  $BD = 5\sqrt{17}$  см. Вычислить площадь трапеции.

*Решение.*

Проведем  $BH \perp AD$  и  $CF \perp AD$  (рис. 10.137). Пусть  $AH = x$ ; тогда  $AF = 8 + x$ ,  $DH = 24 - x$ . Учитывая, что  $BH = CF$ , в  $\triangle AFC$  и  $\triangle BHD$  имеем  $AC^2 - AF^2 = BD^2 - DH^2$ .  $\Rightarrow 64x = 256$ ,  $x = 4$  см.

Тогда  $CF = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$  см.

Отсюда  $S = \frac{1}{2}(24 + 8) \cdot 5 = 80$  см<sup>2</sup>.

*Ответ:* 80 см<sup>2</sup>.

**10.358.** В трапеции  $ABCD$  даны основания  $AD = a$ ,  $BC = b$ . На продолжении  $BC$  выбрана такая точка  $M$ , что прямая  $AM$  отсекает от площади трапеции  $1/4$  ее часть. Найти длину отрезка  $CM$ .

*Решение.*

Проведем через точку  $E$  пересечения  $AM$  и  $CD$  высоту  $KN$  данной трапеции  $ABCD$  (рис. 10.138). Пусть  $KN = h$ ,  $KE = y$ ,  $CM = x$ . Тогда  $EN = h - y$ . Рассмотрим случай, когда  $S_{\triangle AED} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ . Тогда

$$\frac{1}{2} AD \cdot EN = \frac{1}{4} \cdot \frac{AD + BC}{2} \cdot KN. \quad a(h - y) = \frac{1}{4}(a + b)h, \quad 4ah - 4ay = ah + bh,$$

$$4ay = 3ah - bh, y = \frac{h(3a-b)}{4a}. \text{ Если } S_{ABCE} = \frac{1}{4}S_{ABCD}, \text{ то } S_{\Delta AED} = \frac{3}{4}S_{ABCD},$$

$$\text{и тогда } a(h-y) = \frac{3}{4}(a+b)h, 4ah - 4ay = 3ah + 3bh, y = \frac{h(a-3b)}{4a}.$$

$$\Delta AED \sim \Delta MEC. \text{ Тогда } \frac{MC}{AD} = \frac{KE}{EN}; \frac{x}{a} = \frac{y}{h-y}.$$

$$\text{В первом случае, при } y = \frac{h(3a-b)}{4a},$$

$$x = \frac{a \cdot \frac{h(3a-b)}{4a}}{h - \frac{h(3a-b)}{4a}} = \frac{3a-b}{4\left(1 - \frac{3a-b}{4a}\right)} = \frac{a(3a-b)}{a+b}.$$

$$\text{Во втором случае, при } y = \frac{h(a-3b)}{4a},$$

$$x = \frac{a \cdot \frac{h(a-3b)}{4a}}{h - \frac{h(a-3b)}{4a}} = \frac{a-3b}{4\left(1 - \frac{a-3b}{4a}\right)} = \frac{a(a-3b)}{3(a+b)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a(3a-b)}{a+b} \text{ или } \frac{a(a-3b)}{3(a+b)}.$$

**10.359.** В трапеции  $ABCD$  с длинами оснований  $AD = 12$  см,  $BC = 8$  см на луче  $BC$  взята такая точка  $M$ , что  $AM$  делит трапецию на две равновеликие фигуры. Найти  $CM$ .

*Решение.*

Проведем через точку  $E$  пересечения  $AM$  и  $CD$  высоту  $KN$  данной трапеции  $ABCD$  (рис. 10.138). Пусть  $KN = h$ ,  $KE = y$ ,  $CM = x$ . Тогда  $EN = h - y$ .

$$\text{Т.к. } S_{\Delta AED} = \frac{1}{2}S_{ABCD}, \text{ то } \frac{1}{2}AD \cdot EN = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD+BC}{2} \cdot KN,$$

$$12(h-y) = 10h, y = \frac{h}{6}. \Delta AED \sim \Delta MEC.$$

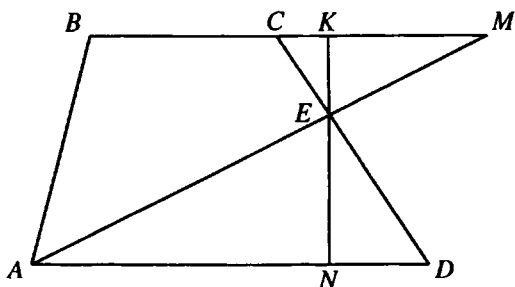


Рис. 10.138

Тогда  $\frac{MC}{AD} = \frac{KE}{EN}$ ;  $\frac{x}{12} = \frac{y}{h-y}$ ;  $x = \frac{12y}{h-y} = \frac{12 \cdot \frac{h}{6}}{h - \frac{1}{6}h} = \frac{2h}{\frac{5}{6}h} = 2,4$ .

Ответ: 2,4 см.

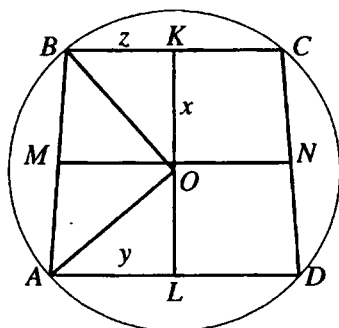


Рис. 10.139

**10.360.** Центр окружности, описанной около равнобедренной трапеции, делит ее высоту в отношении 3:4. Найти основания трапеции, если радиус окружности равен 10 и ее средняя линия равна высоте.

*Решение.*

Пусть  $OK = x$ ,  $AL = y$ ,  $BK = z$  (рис. 10.139).

Тогда  $MN = z + y = x + \frac{3}{4}x = \frac{7x}{4}$ . В  $\triangle OKB$  и  $\triangle OLA$  имеем  $OB^2 = OK^2 + BK^2$ ,  $OA^2 = OL^2 + AL^2$ . Приходим к системе уравнений



$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 100, \\ \frac{9x^2}{16} + y^2 = 100, \\ \frac{7x}{4} - z = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = 100, \\ \frac{9x^2}{16} + \left(\frac{7x}{4} - z\right)^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = 100, \\ \frac{27x^2}{8} - \frac{7xz}{2} + z^2 = 100. \end{cases}$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем  $\frac{21x^2}{8} - \frac{7xz}{2} = 0$ , откуда

(так как  $x \neq 0$ )  $x = \frac{4z}{3}$ . Значит,  $z^2 + \frac{16z^2}{9} = 100$  и  $z = 6$ . Отсюда находим

$x = 8$ ,  $y = 8$ . Итак,  $AD = 2y = 16$ ,  $BC = 2z = 12$ .

*Ответ:* 12 и 16.

## ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Произвольная призма ( $l$  — боковое ребро;  $P$  — периметр основания;  $S$  — площадь основания;  $H$  — высота;  $P_{\text{сеч}}$  — периметр перпендикулярного сечения;  $S_{\text{сеч}}$  — площадь перпендикулярного сечения;  $S_{\text{бок}}$  — площадь боковой поверхности;  $V$  — объем):

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} l; \quad (11.1)$$

$$V = SH; \quad (11.2)$$

$$V = S_{\text{сеч}} l. \quad (11.3)$$

2. Прямая призма:

$$S_{\text{бок}} = Pl. \quad (11.4)$$

3. Прямоугольный параллелепипед ( $a, b, c$  — его измерения;  $d$  — диагональ):

$$S_{\text{бок}} = PH; \quad (11.5)$$

$$V = abc; \quad (11.6)$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \quad (11.7)$$

4. Куб ( $a$  — ребро):

$$V = a^3; \quad (11.8)$$

$$d = a\sqrt{3}. \quad (11.9)$$

5. Произвольная пирамида ( $S$  — площадь основания;  $H$  — высота;  $V$  — объем):

$$V = \frac{1}{3}SH. \quad (11.10)$$

6. Правильная пирамида ( $P$  — периметр основания;  $l$  — апофема;  $S_{\text{бок}}$  — площадь боковой поверхности):

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}Pl; \quad (11.11)$$

$$V = \frac{1}{3}SH. \quad (11.12)$$

7. Произвольная усеченная пирамида ( $S_1$  и  $S_2$  — площади оснований;  $h$  — высота;  $V$  — объем):

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}). \quad (11.13)$$

8. Правильная усеченная пирамида ( $P_1$  и  $P_2$  — периметры оснований;  $l$  — апофема;  $S_{\text{бок}}$  — площадь боковой поверхности):

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l. \quad (11.14)$$

9. Цилиндр ( $R$  — радиус основания;  $H$  — высота;  $S_{\text{бок}}$  — площадь боковой поверхности;  $V$  — объем):

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH; \quad (11.15)$$

$$V = \pi R^2 H. \quad (11.16)$$

10. Конус ( $R$  — радиус основания;  $H$  — высота;  $l$  — образующая;  $S_{\text{бок}}$  — площадь боковой поверхности;  $V$  — объем):

$$S_{\text{бок}} = \pi Rl; \quad (11.17)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \quad (11.18)$$

11. Шар, сфера ( $R$  — радиус шара;  $S$  — площадь сферической поверхности;  $V$  — объем):

$$S = 4\pi R^2; \quad (11.19)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad (11.20)$$

12. Шаровой сегмент ( $R$  — радиус шара;  $h$  — высота сегмента;  $S$  — площадь сферической поверхности сегмента;  $V$  — объем):

$$S = 2\pi R h ; \quad (11.21)$$

$$V = \pi h^2 \left( R - \frac{1}{3} h \right). \quad (11.22)$$

13. Шаровой сектор ( $R$  — радиус шара;  $h$  — высота сегмента;  $V$  — объем):

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h . \quad (11.23)$$

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

1. Пусть в пирамиде выполняется одно из следующих двух условий: а) все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы; б) длины всех боковых ребер равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам основания пирамиды).

2. Пусть в пирамиде выполняется одно из следующих условий: а) все боковые грани образуют с основанием равные углы; б) длины всех апофем боковых граней равны.

Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды).

3. Если в наклонной призме боковое ребро  $A_1B_1$  составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину  $A_1$  (рис. 11.1), то основание  $O$  высоты  $B_1O$  лежит на биссектрисе угла  $A_1$ .

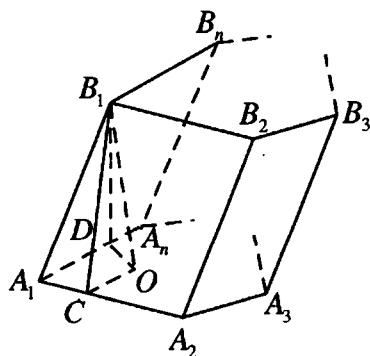


Рис. 11.1

Это же утверждение можно сфор-

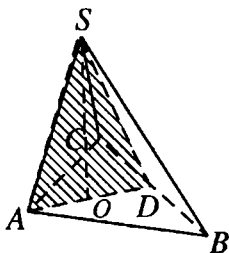


Рис. 11.2

мулировать так: если в трехгранном угле два острых плоских угла равны, то проекция их общего ребра на плоскость третьего плоского угла является его биссектрисой.

4. Если высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны. Справедливо и обратное утверждение.

5. Если  $SO$  — высота пирамиды  $SABC$  и  $SA \perp BC$ , то площадь  $SAO \perp BC$  (рис. 11.2).

Доказательство указанных дополнительных соотношений можно найти в любом издании данного сборника задач последних лет.

**11.106.** Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна  $a$ . Вычислить объем пирамиды, если известно, что ее боковая поверхность в 10 раз больше чем, площадь основания.

*Решение.*

$SO$  — высота правильной пирамиды  $SABCDEF$  (рис. 11.3),  $AB = BC = FA = a$ . Тогда  $CO = OD = CD = a$ , и  $S_{ABCDEF} = 6S_{\Delta COD} = 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3 \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = S_1$ .  $SM$  — апофема боковой грани  $CSD$ . Тогда  $OM \perp CD$ ,  $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $\angle SMO$  — угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания.

Пусть  $\angle SMO = \varphi$ ,  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ ,  $S_2$  — площадь боковой поверхности пирамиды. Тогда  $\frac{S_1}{S_2} = \cos \varphi$ . Так как по условию  $S_2 = 10S_1$ , то

$$\frac{1}{\cos \varphi} = 10 \text{ и } \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos \varphi} - 1} = \sqrt{100 - 1} = 3\sqrt{11}.$$

$$\text{Из } \Delta SOM (\angle SOM = 90^\circ): SO = OM \operatorname{tg} \varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 3\sqrt{11} = \frac{3a\sqrt{33}}{2}.$$

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_1 \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{33}}{2} = \frac{9a^3 \sqrt{11}}{4}.$$

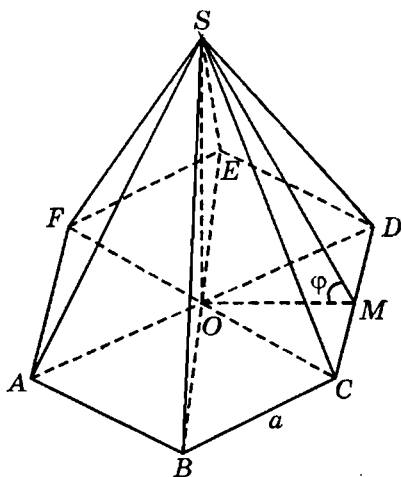


Рис. 11.3

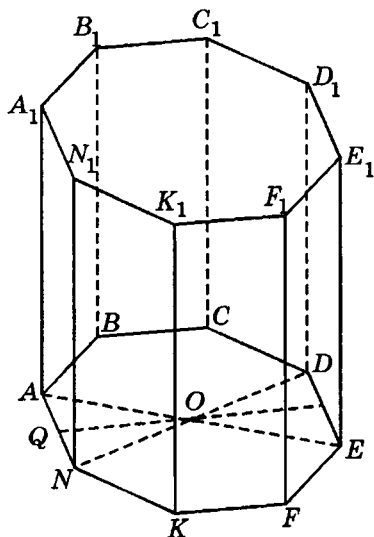


Рис. 11.4

Ответ:  $\frac{9a^3\sqrt{11}}{4}$ .

**11.107.** Объем правильной восьмиугольной призмы равен  $8 \text{ м}^3$ , а ее высота равна  $2,2 \text{ м}$ . Найти боковую поверхность призмы.

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр правильного восьмиугольника  $ABCDEFKN$ , являющегося основанием данной правильной призмы (рис. 11.4). Объем призмы  $V = 8 \text{ м}^3$ , высота  $H = 2,2 \text{ м}$ , тогда площадь основания призмы

$$S_{\text{осн}} = \frac{8}{2,2} = \frac{40}{11} (\text{м}^2). \text{ Пусть } AN = a, OQ \text{ — высота } \triangle AON.$$

$$\text{Тогда } AQ = \frac{a}{2}; \angle AON = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ, \angle AOQ = \frac{1}{2} \angle AON = 22,5^\circ. \text{ Из}$$

$$\triangle AQO (\angle AQO = 90^\circ): OQ = AQ \operatorname{ctg} 22,5^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{a(\sqrt{2} + 1)}{2};$$

$$S_{\text{осн}} = 8S_{AON} = 8 \cdot \frac{1}{2} AN \cdot OQ = 4a^2 \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{2} = 2a^2(\sqrt{2} + 1).$$

$$\text{Тогда } 2a^2(\sqrt{2} + 1) = \frac{40}{11}; a^2 = \frac{20}{11(\sqrt{2} + 1)} = \frac{20(\sqrt{2} - 1)}{11};$$

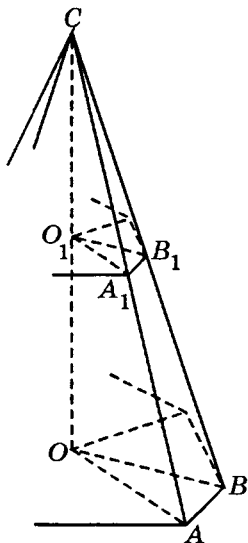


Рис. 11.5

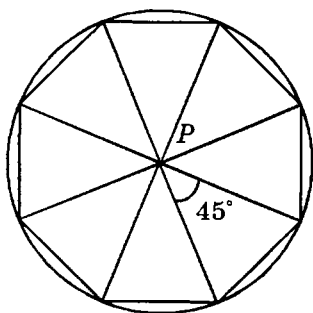


Рис. 11.6

$$a = \sqrt{\frac{20(\sqrt{2}-1)}{11}} = \frac{2}{11} \sqrt{55(\sqrt{2}-1)} \text{ (м)}. \text{ Боковая поверхность призмы}$$

$$S = 8aH = 8 \cdot \frac{2}{11} \sqrt{55(\sqrt{2}-1)} \cdot 2,2 = 16\sqrt{2,2(\sqrt{2}-1)} \text{ (м}^2\text{)}.$$

*Ответ:*  $16\sqrt{2,2(\sqrt{2}-1)} \text{ (м}^2\text{)}.$

**11.108.** Основаниями усеченной пирамиды служат два правильных восьмиугольника. Сторона нижнего основания пирамиды равна 0,4 м, а верхнего 0,3 м; высота усеченной пирамиды равна 0,5 м. Усеченная пирамида построена до полной. Определить объем полной пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $AB$  — сторона нижнего,  $A_1B_1$  — соответствующая сторона верхнего основания данной усеченной восьмиугольной пирамиды,  $CO$  — высота полной пирамиды,  $O_1$  — точка пересечения  $CO$  и плоскости верхнего основания (рис. 11.5). Тогда  $OO_1$  — высота усеченной пирамиды,  $OO_1 = 0,5$  м,  $\Delta A_1O_1B_1 \sim \Delta AOB$ .

$$\text{Тогда } \frac{O_1A_1}{OA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4}. \quad \Delta CO_1A_1 \sim \Delta COA.$$

Тогда  $\frac{CO_1}{CO} = \frac{O_1A}{OA} = \frac{3}{4}$ . Пусть  $CO = h$ . Тогда  $CO_1 = h - 0,5$ ;  $\frac{h - 0,5}{h} = \frac{3}{4}$ ;  
 $h = 2$  м.  $P$  — центр правильного восьмиугольника, являющегося осно-  
 ванием пирамиды (рис. 11.6). Пусть  $PA = PB = x$ ,  $\angle APB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ .

Из  $\triangle APB$ :  $AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2PA \cdot PB \cos \angle APB$ ;

$$2x^2 - 2x^2 \cos 45^\circ = 0,4^2; \quad 2x^2(1 - \cos 45^\circ) = 0,16; \quad x^2(2 - \sqrt{2}) = 0,16;$$

$$x^2 = \frac{0,16}{2 - \sqrt{2}} = \frac{0,16(2 + \sqrt{2})}{2} = 0,08(2 + \sqrt{2}). \quad S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} AP^2 \sin \angle APB =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0,08(2 + \sqrt{2}) \sin 45^\circ = 0,02\sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) = 0,04(\sqrt{2} + 1) = \frac{\sqrt{2} + 1}{25} \text{ (м}^2\text{)}.$$

Площадь восьмиугольника  $S = 8S_{\triangle APB} = \frac{8}{25}(\sqrt{2} + 1) \text{ м}^2$ . Объем пирами-  
 ды  $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{16}{75}(\sqrt{2} + 1) \text{ м}^3$ .

Ответ:  $\frac{16}{75}(\sqrt{2} + 1) \text{ м}^3$ .

**11.109.** Найти объем пра-  
 вильной четырехугольной пи-  
 рамиды со стороной основа-  
 ния, равной  $a$ , и плоскими  
 углами при вершине, равны-  
 ми углам наклона боковых ре-  
 бер к основанию.

*Решение.*

Проведем высоту прави-  
 льной пирамиды  $MABCD - MO$   
 и высоту боковой грани  $AMD$   
 (рис. 11.7). Пусть  $AD = a$ . Так  
 как  $\angle MCO = \angle AMD$ , то пря-  
 моугольные треугольники

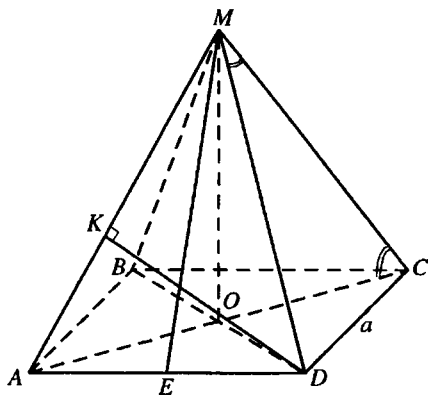


Рис. 11.7

$МОС$  и  $МКD$  равны (по гипотенузе и острому углу) и, следовательно,  
 $MO = DK$ . Пусть  $DK = x$ ,  $ME$  — высота и медиана  $\triangle AMD$ . Из

$$\triangle MOA (\angle MOA = 90^\circ): \quad AM = \sqrt{AO^2 + MO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + x^2}.$$



$$\text{Из } \triangle AEM (\angle AEM = 90^\circ): ME = \sqrt{AM^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}.$$

$$S_{\triangle AMD} = \frac{1}{2} AD \cdot ME = \frac{1}{2} AM \cdot DK. \text{ Тогда } a\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{2}} \cdot x;$$

$$\frac{a^2(a^2 + 4x^2)}{4} = \frac{x^2(a^2 + 2x^2)}{2}; \quad 4x^4 - 2a^2x^2 - a^4 = 0; \quad x = \frac{a\sqrt{\sqrt{5} + 1}}{2}.$$

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot MO = \frac{a^3(\sqrt{\sqrt{5} + 1})}{6}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^3\sqrt{\sqrt{5} + 1}}{6}.$$

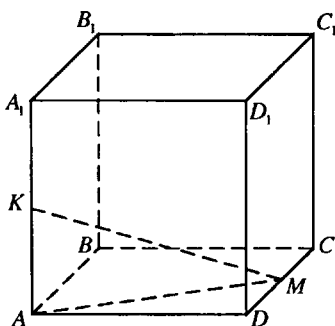


Рис. 11.8

**11.110.** Найти расстояние между серединами двух скрещивающихся ребер куба, полная поверхность которого равна  $36 \text{ см}^2$ .

*Решение.*

Полная поверхность куба  $S_{\text{полн}} = 36 \text{ см}^2$ , поэтому площадь одной грани  $S = 6 \text{ см}^2$ , а ребро куба  $AD = a = \sqrt{6} \text{ см}$  (рис. 11.8).

Далее  $KM = \sqrt{AK^2 + AM^2}$ , где

$$AK = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (см)}, \quad AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2} \text{ (см)}.$$

$$\text{Окончательно имеем } KM = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{30}{4}} = 3 \text{ (см)}.$$

*Ответ:* 3 см.

**11.111.** В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен  $120^\circ$ . Найти боковую поверхность пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна  $S$ .

*Решение.*

$EO$  — высота правильной пирамиды  $EABCD$ ,  $\angle BKD$  — линейный угол двугранного при боковом ребре  $EC$  (рис. 11.9),  $\angle BKD = 120^\circ$ . Тогда  $OK \perp EC$ ,  $S_{\triangle AEC} = 2S_{\triangle EOC} = EC \cdot OK$ ,  $DK \perp EC$ ,  $S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} EC \cdot DK$ .

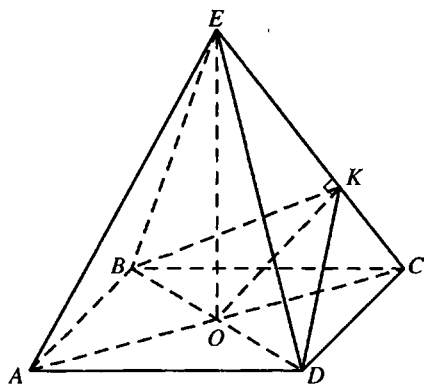


Рис. 11.9

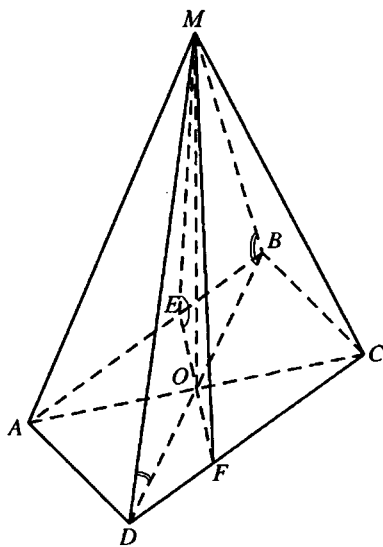


Рис. 11.10

Из  $\triangle DOK$  ( $\angle DOK = 90^\circ$ ):  $OK = DK \cos \angle DKO = DK \cos 60^\circ = \frac{1}{2} DK$ .

Отсюда боковая поверхность пирамиды  $S_6 = 4 \cdot S_{\triangle DEC} = 2EC \cdot DK$ . Сле-

довательно,  $\frac{S_6}{S_{\triangle AEC}} = \frac{2EC \cdot DK}{EC \cdot \frac{1}{2} DK} = 4$ .  $S_6 = 4 \cdot S_{\triangle AEC} = 4S$ .

Ответ:  $4S$

**11.112.** Основанием пирамиды служит параллелограмм  $ABCD$ , имеющий площадь  $m^2$  и такой, что  $BD \perp AD$ ; двугранные углы при ребрах  $AD$  и  $BC$  равны  $45^\circ$ , а при ребрах  $AB$  и  $CD$  равны  $60^\circ$ . Найти боковую поверхность и объем пирамиды.

Решение.

Пусть  $MO$  — высота пирамиды  $MABCD$  (рис. 11.10). Через точку  $O$  в плоскости основания проведем прямую  $EF$  ( $E$  принадлежит  $AB$ ,  $F$  принадлежит  $CD$ ), перпендикулярную параллельным прямым  $AB$  и  $CD$ .  $OF$  и  $OE$  — соответственно проекции  $MF$  и  $ME$  на плоскость основания. Тогда  $MF \perp CD$ ,  $ME \perp AB$ ,  $\angle MFO$  и  $\angle MEO$  — линейные углы двугранных углов при ребрах  $CD$  и  $AB$  соответственно,

$\angle MFO = \angle MEO = 60^\circ$ . Значит,  $\triangle MOF = \triangle MOE$  по катету и острому углу и, следовательно,  $OF = OE$ , т.е. точка  $O$  равноудалена от сторон  $AB$  и  $CD$  параллелограмма.

Следовательно,  $O$  принадлежит прямой, параллельной  $AB$  и  $CD$  и проходящей через середины двух других сторон параллелограмма. Аналогично, так как двугранные углы при ребрах  $AD$  и  $BC$  также равны, точка  $O$  равноудалена от сторон  $AD$  и  $BC$  параллелограмма и принадлежит прямой, параллельной  $AD$  и  $BC$  и проходящей через середины двух других сторон параллелограмма. Значит,  $O$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ .

Так как  $OD \perp AD$  и  $OB \perp BC$ , то  $MD \perp AD$ ,  $MB \perp BC$  и  $\angle MDO$  и  $\angle MBO$  — линейные углы двугранных углов при ребрах  $AD$  и  $BC$  соответственно,  $\angle MDO = \angle MBO = 45^\circ$ .  $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle DOC} = S_{\triangle BOC} = \frac{m^2}{4}$ . Так как  $\triangle AOB$  и  $\triangle DOC$  — проекции  $\triangle AMB$  и  $\triangle DMC$  на плоскость основания,  $\triangle AOD$  и  $\triangle BOC$  — проекции  $\triangle AMD$  и  $\triangle BMC$  на плоскость основания, то  $S_{\triangle AMB} = S_{\triangle DMC} = \frac{m^2}{2}$ ,  $S_{\triangle AMD} = S_{\triangle BMC} = \frac{m^2}{2\sqrt{2}}$ . Боковая поверхность пирамиды:

$$S = 2(S_{\triangle AMB} + S_{\triangle AMD}) = 2\left(\frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{m^2(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2}} = \frac{m^2(\sqrt{2} + 2)}{2}.$$

Пусть  $MO = H$ . Из  $\triangle MOE$  ( $\angle MOE = 90^\circ$ ):  $OE = H \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{H}{\sqrt{3}}$ .

Из  $\triangle MOB$  ( $\angle MOB = 90^\circ$ ):  $OB = H \operatorname{ctg} 45^\circ = H$ .

Из  $\triangle OEB$  ( $\angle OEB = 90^\circ$ ):  $EB^2 = OB^2 - OE^2 = H^2 - \frac{H^2}{3} = \frac{2H^2}{3}$ .

$BD = 2 \cdot OB = 2H$ .  $\triangle BEO \sim \triangle BDA$  — по двум углам.

Тогда  $\frac{S_{\triangle BEO}}{S_{\triangle BDA}} = \frac{EB^2}{BD^2} = \frac{2H^2}{4H^2} = \frac{1}{2}$ ;  $S_{\triangle BEO} = \frac{1}{2} S_{\triangle BDA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m^2 = \frac{m^2}{4}$ .

Но  $S_{\triangle BEO} = \frac{1}{2} OE \cdot EB = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{\sqrt{3}} \cdot H \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{H^2 \sqrt{2}}{6}$ . Тогда  $\frac{H^2 \sqrt{2}}{6} = \frac{m^2}{4}$ ;

$H^2 = \frac{m^2 \sqrt{2}}{4}$ ;  $H = \frac{m \sqrt[4]{2}}{2}$ . Объем пирамиды  $V = \frac{1}{3} m^2 \cdot H = \frac{m^3 \sqrt[4]{2}}{6}$ .

Ответ:  $\frac{m^3\sqrt{2}}{6}$ ,  $\frac{m^2(\sqrt{2}+2)}{2}$ .

11.113. В наклонном параллелепипеде проекция бокового ребра на плоскость основания равна 5 дм, а высота равна 12 дм. Сечение, перпендикулярное боковому ребру, есть ромб с площадью 24 дм<sup>2</sup> и диагональю, равной 8 дм. Найти боковую поверхность и объем параллелепипеда.

Решение.

Пусть  $CO_1$  — высота наклонного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 11.11),  $C_1 O = 12$  дм, тогда  $CO$  — проекция  $CC_1$  на плоскость основания,  $CO = 5$  дм, ромб  $MNKL$  — перпендикулярное сечение параллелепипеда.

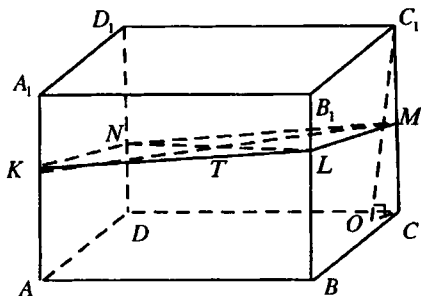


Рис. 11.11

Из  $\triangle C_1 OC (\angle C_1 OC = 90^\circ)$ :  $CC_1 = \sqrt{C_1 O^2 + CO^2} = 13$  дм.

Отсюда: объем параллелепипеда  $V = S_{MNKL} \cdot CC_1 = 312$  дм. Пусть

$KM = 8$  дм. Тогда  $NL = \frac{2S_{MNKL}}{KM} = 6$  дм. Пусть  $T$  — точка пересечений

диагоналей ромба  $MNKL$ . Тогда  $KL = \sqrt{KT^2 + TL^2} = 5$  дм, а периметр перпендикулярного сечения  $P_{MNKL} = 20$  дм. Боковая поверхность

$S = P_{MNKL} \cdot CC_1 = 260$  дм<sup>2</sup>.

Ответ: 260 дм<sup>2</sup>; 312 дм<sup>3</sup>.

11.114. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10 м, стороны одного основания — 27, 29 и 25 м, а периметр другого основания равен 72 м (рис. 11.12). Определить объем усеченной пирамиды.

Решение.

Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — площади оснований данной усеченной пирамиды,  $P_1$  и  $P_2$  — соответственно периметры оснований, по условию  $P_2 = 72$  м.

Тогда  $P_1 = 27 + 29 + 52 = 108$  (м), откуда по формуле Герона  $S_1 = 270$  м<sup>2</sup>.

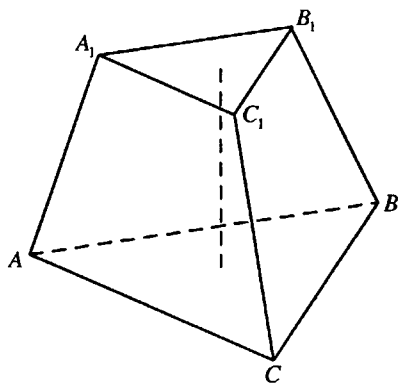


Рис. 11.12

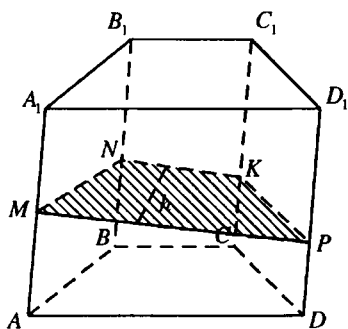


Рис. 11.13

Так как основания усеченной пирамиды подобны, то  $\frac{S_2}{S_1} = \frac{P_2^2}{P_1^2}$ ;

$$S_2 = S_1 \cdot \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 = 120 \text{ м}^2.$$

Объем усеченной пирамиды  $V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2) = 1900 \text{ м}^3$ .

Ответ:  $1900 \text{ м}^3$ .

**11.115.** В основании призмы лежит трапеция. Выразить объем призмы через площади  $S_1$  и  $S_2$  параллельных боковых граней и расстояние  $h$  между ними.

Решение.

Трапеция  $MNKP$  ( $NK \parallel MP$ ) — перпендикулярное сечение призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 11.13). Тогда высота трапеции равна  $h$ . Пусть  $S_1$  — площадь грани  $AA_1 D_1 D$ ,  $S_2$  — площадь грани  $BB_1 C_1 C$ ,  $l$  — длина бокового ребра призмы,  $MP = a$ ,  $NK = b$ . Тогда  $S_1 = al$ ,  $S_2 = bl$ , откуда  $a = \frac{S_1}{l}$ ,  $b = \frac{S_2}{l}$ .

Площадь  $MNKP$   $S = \frac{a+b}{2} h = \frac{(S_1 + S_2)h}{2l}$ .

Объем призмы  $V = Sl = \frac{(S_1 + S_2)h}{2}$ .

Ответ:  $\frac{(S_1 + S_2)h}{2}$ .

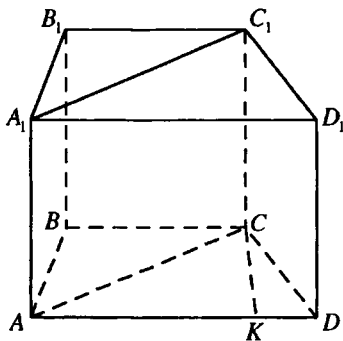


Рис. 11.14

**11.116.** Площадь основания прямой треугольной призмы равна  $4 \text{ см}^2$ , площади боковых граней равны  $9, 10$  и  $17 \text{ см}^2$ . Определить объем призмы.

*Решение.*

Пусть  $a, b, c$  — стороны основания призмы,  $H$  — ее высота.

Тогда  $a = \frac{9}{H}, b = \frac{10}{H}, c = \frac{17}{H}$ , полупериметр основания  $p = \frac{18}{H}$ . По

формуле Герона площадь основания призмы  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{\frac{18}{H} \cdot \frac{9}{H} \cdot \frac{8}{H} \cdot \frac{1}{H}} = \frac{36}{H^2}$ . Так как  $S = 4 \text{ см}^2$ , то  $\frac{36}{H^2} = 4$ ,  $H = 3 \text{ см}$ . Объем призмы  $V = SH = 12 \text{ см}^3$ .

*Ответ:*  $12 \text{ см}^3$ .

**11.117.** Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция  $ABCD$ ;  $AB = CD = 13 \text{ см}$ ,  $BC = 11 \text{ см}$ ,  $AD = 21 \text{ см}$ . Площадь ее диагонального сечения равна  $180 \text{ см}^2$ . Вычислить полную поверхность призмы.

*Решение.*

$CK$  — высота основания прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  (рис. 11.14).

По условию  $AB = CD$ , тогда  $KD = \frac{AD-BC}{2} = 5 \text{ см}$ ,  $AK = \frac{AD+BC}{2} = 16 \text{ см}$ .

Из  $\triangle CKD$  ( $\angle CKD = 90^\circ$ ):  $CK = \sqrt{CD^2 - KD^2} = 12 \text{ см}$ .

Из  $\triangle AKC$  ( $\angle AKC = 90^\circ$ ):  $AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = 20 \text{ см}$ . Диагональные

сечения призмы  $AA_1C_1C$  — прямоугольник с площадью  $S_1 = 180 \text{ см}^2$ ,

поэтому высота призмы  $H = CC_1 = \frac{S_1}{AC} = 9$  см. Периметр основания при-

змы  $P = 58$  см, площадь основания  $S_{\text{осн}} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CK = 192 \text{ см}^2$ , боко-

вая поверхность  $S_6 = PH = 522 \text{ см}^2$ . Полная поверхность призмы  $S = S_6 + 2S_{\text{осн}} = 906 \text{ см}^2$ .

*Ответ:*  $906 \text{ см}^2$ .

**11.118.** Основанием параллелепипеда служит ромб со стороной  $a$  и острым углом  $30^\circ$ . Диагональ одной боковой грани перпендикулярна плоскости основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Найти полную поверхность и объем параллелепипеда.

*Решение.*

В ромбе  $ABCD$ , являющемся основанием параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 11.15),  $CD = a$ ,  $\angle BCD = 30^\circ$ . Тогда его площадь

$S_1 = a^2 \sin 30^\circ = \frac{a^2}{2}$ . Диагональ  $C_1 B$  боковой грани  $BB_1 C_1 C$ , перпендикулярная плоскости основания, является высотой параллелепипеда,  $BC$  — проекция бокового ребра  $CC_1$  на плоскость основания,  $\angle BCC_1 = 60^\circ$ .

Из  $\triangle C_1 BC$  ( $\angle C_1 BC = 90^\circ$ ):  $BC_1 = BC \operatorname{tg} \angle BCC_1 = a\sqrt{3}$ ;

$CC_1 = \frac{BC}{\cos \angle BCC_1} = 2a$ . Объем параллелепипеда  $V = S_1 \cdot BC_1 = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$ ,

$S_{BB_1 C_1 C} = a^2 \sqrt{3}$ .  $CC_1$  — наклонная к плоскости основания,  $BC$  — ее проекция на эту плоскость,  $CD$  — прямая, лежащая в этой плоскости. Сле-

довательно,  $\cos \angle C_1 CD = \cos \angle C_1 CB \cdot \cos \angle BCD = \cos 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

Отсюда:

$\sin \angle C_1 CD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle C_1 CD} = \frac{\sqrt{13}}{4}$ ;  $S_{CC_1 D_1 D} = CC_1 \cdot CD \sin \angle C_1 CD = \frac{a^2 \sqrt{13}}{2}$ .

Полная поверхность параллелепипеда:

$S = 2(S_1 + S_{BB_1 C_1 C} + S_{CC_1 D_1 D}) = 2\left(\frac{a^2}{2} + a^2 \sqrt{3} + \frac{a^2 \sqrt{13}}{2}\right) = a^2(1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{13})$ .

*Ответ:*  $a^2(1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{13}); \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$ .

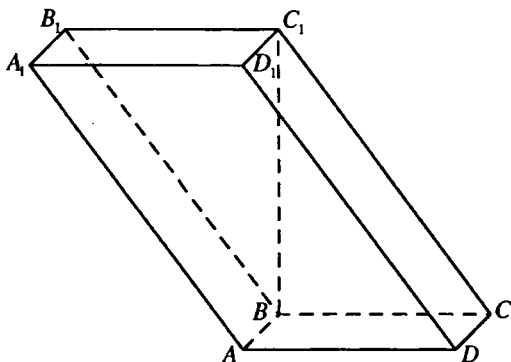


Рис. 11.15

**11.119.** Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна  $a$ , а высота, опущенная из вершины основания на противоположную ей боковую грань, равна  $b$ . Определить объем пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $MO$  — высота правильной пирамиды  $MABC$  (рис. 11.16).  $P$  — середина  $BC$ . Тогда плоскость  $MPA$  перпендикулярна плоскости  $BMC$  и перпендикуляр  $AK$ , опущенный на плоскость  $BMC$ , лежит в плоскости  $MPA$ , а точка  $K$  принадлежит  $MP$ . Пусть  $MO = h$ .

$$\text{Тогда } MP = \sqrt{PO^2 + MO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{a^2}{12} + h^2}.$$

$$S_{\Delta MPA} = \frac{1}{2} AP \cdot MO = \frac{1}{2} AK \cdot MP.$$

Тогда  $AP \cdot MO = AK \cdot MP$ ;

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot h = b \sqrt{\frac{a^2}{12} + h^2};$$

$$\frac{3a^2 h^2}{4} = \frac{b^2 (a^2 + 12h^2)}{12};$$

$$9a^2 h^2 = a^2 b^2 + 12b^2 h^2;$$

$$h = \frac{ab}{\sqrt{3(3a^2 - 4b^2)}}.$$

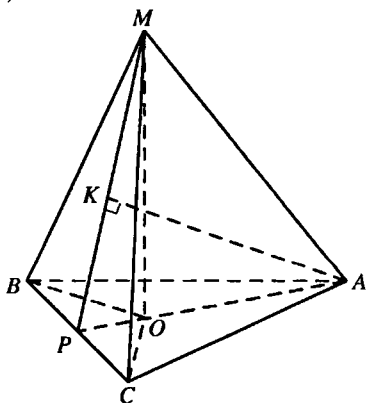


Рис. 11.17



Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{ab}{\sqrt{3(3a^2 - 4b^2)}} = \frac{a^3 b}{12\sqrt{3a^2 - 4b^2}}.$$

Ответ:  $\frac{a^3 b}{12\sqrt{3a^2 - 4b^2}}.$

**11.120.** Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в три раза больше площади основания. Площадь круга, вписанного в основание, численно равна радиусу этого круга. Найти объем пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $DO$  — высота правильной пирамиды  $DABC$ ,  $K$  — середина  $AB$  (рис. 11.17). Пусть радиус окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ ,  $OK = r$ .

Тогда, по условию,  $\pi r^2 = r$ , отсюда  $r = \frac{1}{\pi}$ .

$$AB = 2r\sqrt{3}, S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = 3r^2 \sqrt{3}. \text{ Площадь боковой поверхности}$$

$S_6 = 3S_{\triangle ADB}$ . По условию  $S_6 = 3S_{\triangle ABC}$ , тогда  $S_{\triangle ADB} = S_{\triangle ABC}$ ;

$$\frac{1}{2} AB \cdot DK = 3r^2 \sqrt{3}; \quad r\sqrt{3} \cdot DK = 3r^2 \sqrt{3}; \quad DK = 3r.$$

Из  $\triangle DOK$  ( $\angle DOK = 90^\circ$ ):  $DO = \sqrt{DK^2 - OK^2} = 2r\sqrt{2}$ . Объем пира-

$$\text{миды: } V = \frac{1}{3} \cdot 3r^2 \sqrt{3} \cdot 2r\sqrt{2} = 2r^3 \sqrt{6} = \frac{2\sqrt{6}}{\pi^3}.$$

Ответ:  $\frac{2\sqrt{6}}{\pi^3}.$

**11.121.** Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых ребер. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна одной из боковых граней (указать какой именно).

*Решение.*

Пусть  $DO$  — высота правильной пирамиды  $DABC$ ,  $M$  — середина  $DB$ ,  $N$  — середина  $DC$ ,  $\triangle MAN$  — сечение пирамиды, о котором говорится в условии задачи (рис. 11.18). Предположим, что плоскость  $MAN$  перпендикулярна плоскости грани  $ADB$ .  $\triangle ADM = \triangle ADN$  (по трем сторонам). Тогда их высоты, опущенные на стороны  $AM$  и  $AN$ ,

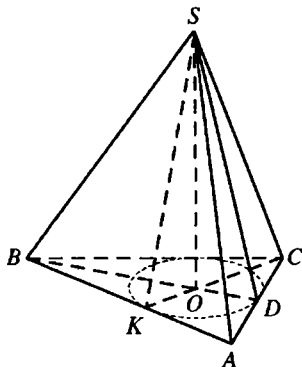


Рис. 11.17

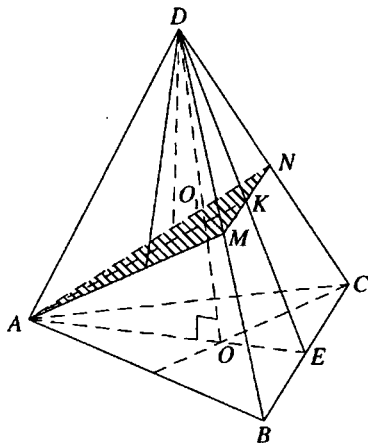


Рис. 11.18

равны. Но высота  $\triangle ADM$  является перпендикуляром к плоскости  $MAN$ , а высота  $\triangle ADN$  — наклонной к этой плоскости. Тогда высота  $\triangle ADN$  также является перпендикуляром к плоскости  $MAN$  и, следовательно, указанные высоты совпадают с боковым ребром  $DA$  данной пирамиды, и  $\angle DAB > \angle DAM = 90^\circ$ , что невозможно, так как данная пирамида правильная. Аналогично получим противоречие, если предположим, что плоскость  $AMN$  перпендикулярна плоскости грани  $ADC$ . Следовательно, плоскость  $MAN$  перпендикулярна грани  $BDC$ .  $E$  — середина  $BC$ . Тогда точка  $K$  пересечения  $MN$  и  $DE$  является серединой этих отрезков. Следовательно, медиана  $AK$  равнобедренного  $\triangle MAN$  является его высотой и, так как плоскости  $MAN$  и  $BDC$  перпендикулярны, то  $AK$  — перпендикуляр к плоскости  $BDC$  и, значит,  $AK \perp DE$ . Отсюда  $AK$  — медиана и высота  $\triangle DAE$ .

Тогда  $DA = AE$ . Пусть  $OE = a$ . Тогда  $OA = 2a, AD = AE = 3a$ .

Из  $\triangle AOD$  ( $\angle AOD = 90^\circ$ ):  $DO^2 = AD^2 - AO^2 = 5a^2$ .

Из  $\triangle DOE$  ( $\angle DOE = 90^\circ$ ):  $DE = \sqrt{DO^2 + OE^2} = a\sqrt{6}$ . Так как пирамида правильная, то отношение боковой поверхности к площади осно-

$$\text{вания } \frac{S_6}{S_{\text{осн}}} = \frac{1}{\cos \angle DEO} = \frac{DE}{OE} = \sqrt{6}.$$

Ответ:  $\sqrt{6}$ .

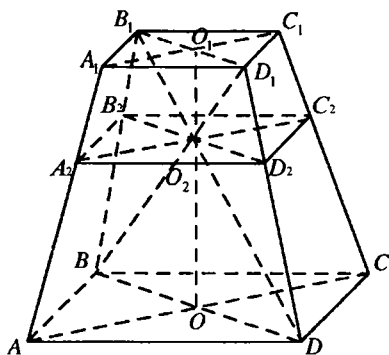


Рис. 11.19

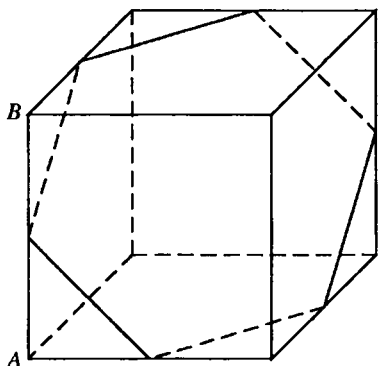


Рис. 11.20

**11.122.** Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 2 и 1 см, а высота 3 см. Через точку пересечения диагоналей пирамиды параллельно основаниям пирамиды проведена плоскость, делящая пирамиду на две части. Найти объем каждой из полученных частей.

*Решение.*

$O$  и  $O_1$  — центры соответственно нижнего и верхнего оснований правильной усеченной пирамиды  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $O_2$  — точка пересечения ее диагоналей  $AC_1$  и  $A_1 C$  (рис. 11.19),  $OO_1 = 3$  см,  $AD = 2$  см,  $A_1 D_1 = 1$  см. Квадрат  $A_2 B_2 C_2 D_2$  — сечение пирамиды плоскостью, о котором говорится в условии задачи.

Диагональное сечение усеченной пирамиды — равнобокая трапеция  $AA_1 C_1 C$ ,  $\Delta A_1 O_2 C_1 \sim \Delta A O_2 C$ . Тогда

$$\frac{O_1 O_2}{O_2 O} = \frac{A_1 C_1}{AC} = \frac{A_1 D_1}{AD} = \frac{1}{2}.$$

Так как  $OO_1 = 3$  см, то  $O_1 O_2 = 1$  см,  $OO_2 = 2$  см.  $\Delta A_1 A C_1 \sim \Delta A_2 A O_2$  и  $\frac{A_2 O_2}{A_1 C_1} = \frac{OO_2}{OO_1} = \frac{2}{3}$ . Тогда  $A_2 O_2 = \frac{2}{3} A_1 C_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$  см и  $A_2 C_2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$  см,  $A_2 D_2 = \frac{4}{3}$  см. Площади квадратов  $ABCD$ ,  $A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $A_2 B_2 C_2 D_2$  соответственно  $S = 4$  см<sup>2</sup>,  $S_1 = 1$  см<sup>2</sup>,  $S_2 = \frac{16}{9}$  см<sup>2</sup>. Объем усеченной пирамиды с высотой  $O_1 O_2$  :

$$V_1 = \frac{O_1 O_2}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{16}{9} + \frac{4}{3} \right) = \frac{37}{27} \text{ см}^3.$$

Объем усеченной пирамиды с высотой  $O_2O$ :

$$V_2 = \frac{O_2O}{3} (S + S_2 + \sqrt{SS_2}) = \frac{2}{3} \left( 4 + \frac{16}{9} + \frac{8}{3} \right) = \frac{152}{27} \text{ см}^3.$$

Ответ:  $\frac{37}{27} \text{ см}^3$ ;  $\frac{152}{27} \text{ см}^3$ .

**11.123.** Площадь того сечения куба, которое представляет собой правильный шестиугольник, равна  $Q$ . Найти полную поверхность куба.

*Решение.*

Пусть сторона шестиугольника равна  $a$ ; тогда ребро куба  $AB = a\sqrt{2}$

(рис. 11.20) и  $S_{\text{полн.}} = 6AB^2 = 12a^2$ . По условию,  $6 \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = Q$ , следова-

тельно,  $a^2 = \frac{2Q}{3\sqrt{3}}$ . Получим  $S_{\text{полн.}} = \frac{8Q\sqrt{3}}{3}$ .

Ответ:  $\frac{8Q\sqrt{3}}{3}$ .

**11.124.** Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно  $a$ , а угол при нем равен  $45^\circ$ . Определить объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

*Решение.*

Основание призмы — равнобедренный прямоугольный треугольник,

его площадь  $S = \frac{a^2}{4}$ , периметр  $P = a(\sqrt{2} + 1)$ , боковая поверхность

$S_6 = PH = aH(\sqrt{2} + 1)$ , где  $H$  — высота призмы.

Так как  $S_6 = 2S$ , то  $aH(\sqrt{2} + 1) = \frac{a^2}{2}$ ;  $H = \frac{a}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{2}$ , объем призмы  $V = SH = \frac{a^3(\sqrt{2} - 1)}{8}$ .

Ответ:  $\frac{a^3(\sqrt{2} - 1)}{8}$ .

**11.125.** Основанием призмы  $ABCA_1B_1C_1$  служит правильный треугольник  $ABC$  со стороной  $a$ . Вершина  $A_1$  проектируется в центр нижнего основания, а ребро  $AA_1$  наклонено к плоскости основания под углом  $60^\circ$ . Определить боковую поверхность призмы.

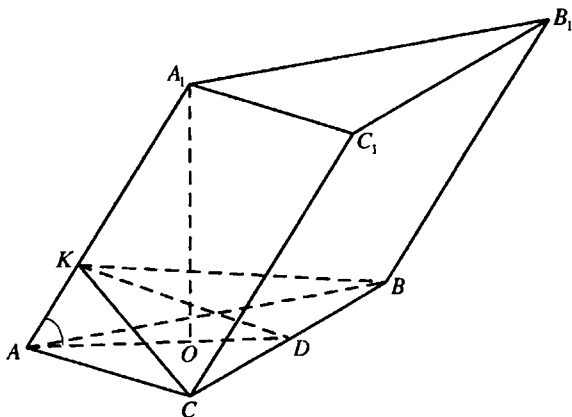


Рис. 11.21

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр  $\triangle ABC$  (рис. 11.21),  $O$  — проекция  $A_1$  на плоскость  $ABC$ ,  $\angle OAB = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ$ ,  $\angle A_1AO = 60^\circ$ .

$$\text{Тогда } \cos \angle A_1AB = \cos \angle A_1AO \cdot \cos \angle OAB = \frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$\sin \angle A_1AB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A_1AB} = \sqrt{1 - \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Из  $\triangle AOA_1$  ( $\angle AOA_1 = 90^\circ$ ):  $AA_1 = \frac{AO}{\cos \angle A_1AO} = \frac{a\sqrt{3}}{3 \cos 60^\circ} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ . В грани  $AA_1B_1B$  опустили перпендикуляр  $BK$  на  $AA_1$ . Тогда плоскость  $BKC$  перпендикулярна ребру  $AA_1$  призмы и  $\triangle BKC$  — перпендикулярное сечение призмы.

$$\text{Из } \triangle AKB (\angle AKB = 90^\circ): BK = AB \sin \angle A_1AB = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Периметр  $\triangle BKC$ :  $P = 2BK + BC = \frac{a\sqrt{13}}{2} + a = \frac{a(2 + \sqrt{13})}{2}$ , боковая поверхность призмы  $S = P \cdot AA_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}(2 + \sqrt{13})}{3}$ .

$$\text{Ответ: } \frac{a^2 \sqrt{3}(2 + \sqrt{13})}{3}.$$

11.126. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна  $a$ . Все диагональные сечения ее равновелики. Найти объем и боковую поверхность пирамиды.

*Решение.*

Проведем  $SO$  — высоту правильной пирамиды  $SAB CDE F$  (рис. 11.22). Пусть  $SO = H$ . Тогда

$$S_{\Delta ASD} = \frac{AD \cdot SO}{2} = \frac{2aH}{2} = aH.$$

$K$  — точка пересечения диагоналей  $BO$  и  $AC$  ромба  $ABCO$ .

$$OK = \frac{1}{2}BO = \frac{a}{2}, AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AC =$$

$= 2AK = a\sqrt{3}, OK \perp AC$ .  $OK$  — проекция  $SK$  на плоскость основания.

$$\text{Тогда } SK \perp AC \text{ и } S_{\Delta MSC} = \frac{AC \cdot SK}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} SK.$$

По условию  $S_{\Delta MSD} = S_{\Delta MSC}$ , тогда  $aH = \frac{a\sqrt{3}}{2} SK$ ;  $\frac{H}{SK} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Из

$$\Delta SOK (\angle SOK = 90^\circ): \sin \angle SKO = \frac{H}{SK} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \angle SKO = 60^\circ; H = SO =$$

$$= KO \operatorname{tg} \angle SKO = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Площадь основания } S_{\text{осн}} = 6S_{\Delta AOB} = 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}. \text{ Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H = \frac{3a^3}{4}. \text{ Пусть } T \text{ — середина}$$

$$CD, \text{ тогда } TO = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Так как } SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ то } \Delta SOT \text{ — прямоугольный}$$

равнобедренный,  $\angle STO = 45^\circ$  и боковая поверхность пирамиды

$$S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \angle STO} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} \sqrt{2} = \frac{3a^2 \sqrt{6}}{2}.$$

Ответ:  $\frac{3a^3}{4}; \frac{3a^2 \sqrt{6}}{2}.$

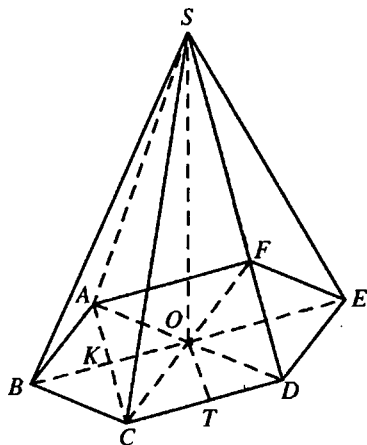


Рис. 11.22

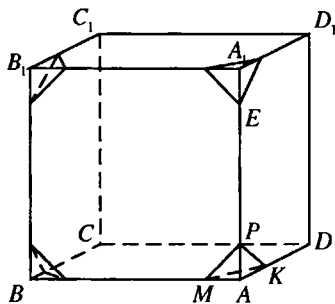


Рис. 11.23

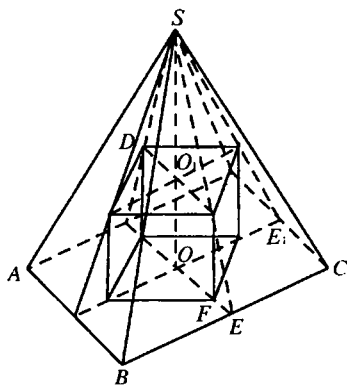


Рис. 11.24

**11.127.** Куб, ребро которого равно  $a$ , срезан по углам плоскостями так, что от каждой грани остался правильный восьмиугольник. Определить объем полученного многогранника.

*Решение.*

Пусть отрезок, отсекаемый каждой из указанных плоскостей на ребре куба, равен  $x$ :  $AP = AM = EA_1 = x$  (рис.11.23). Тогда  $MP = EP = x\sqrt{2}$ ;

$$AP + PE + EA_1 = AA_1, 2x + x\sqrt{2} = a, \quad x = \frac{a}{2 + \sqrt{2}} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}. \text{ Вычислим}$$

объем каждой из отсекаемых пирамид  $V_1 = \frac{1}{6}x^3$ .

Тогда объем полученного многогранника равен разности объема куба

$$\begin{aligned} \text{и } 8V_1: V &= a^3 - 8V_1 = a^3 - \frac{4}{3}x^3 = a^3 - \frac{a^3(2 - \sqrt{2})^3}{6} = \frac{a^3(6 - (2 - \sqrt{2})^3)}{6} = \\ &= \frac{a^3(6 - 8 + 12\sqrt{2} - 82 + 2\sqrt{2})}{6} = \frac{a^3(14\sqrt{2} - 14)}{6} = \frac{7}{3}a^3(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{7}{3}a^3(\sqrt{2} - 1)$ .

**11.128.** В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на апофемах пирамиды и четыре —

в плоскости основания. Все ребра пирамиды равны, каждое из них имеет длину  $a$ . Вычислить полную поверхность и объем куба.

*Решение.*

Пусть ребро куба  $EF = x$  (рис. 11.24). Рассмотрим  $\triangle BSC$  (равносторонний):  $SE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Из  $\triangle SOE$  ( $\angle SOE = 90^\circ$ ):

$$SO = \sqrt{SE^2 - OE^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$FE = OE - OF = \frac{a}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2}. \triangle E_1FE \sim \triangle SOE.$$

Тогда  $\frac{E_1F}{SO} = \frac{FE}{OE}$ ;  $E_1F \cdot OE = SO \cdot FE$ ,  $x \cdot \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \left( \frac{a}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2} \right)$ ,  $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ .

Полная поверхность куба  $S = 6x^2 = \frac{3}{4}a^2$ , его объем  $V = x^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{32}$ .

*Ответ:*  $\frac{3}{4}a^2$ ;  $\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$ .

**11.129.** Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна 3 см, объем ее 38 см<sup>3</sup>, а площади оснований относятся как 4:9. Определить боковую поверхность усеченной пирамиды.

*Решение.*

Пусть площадь верхнего основания равна  $S_1 = 4x$  см<sup>2</sup>. Тогда площадь нижнего основания  $S_2 = 9x$  см<sup>2</sup>, и так как объем усеченной пирамиды

$$V = \frac{H}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}), \text{ то } 4x + 9x + \sqrt{36x^2} = 38, \quad x = 2; \quad S_1 = 8 \text{ см}^2;$$

$$S_2 = 18 \text{ см}^2. \text{ Тогда сторона нижнего основания } a = \sqrt{S_2} = 3\sqrt{2} \text{ см, сторона}$$

на верхнего основания  $b = 2\sqrt{2}$  см, периметры оснований соответственно

$p_2 = 12\sqrt{2}$  см,  $p_1 = 8\sqrt{2}$  см.  $N$  — середина ребра  $CD$ ,  $K$  — ребра

$C_1D_1$  соответственно нижнего и верхнего оснований данной усеченной

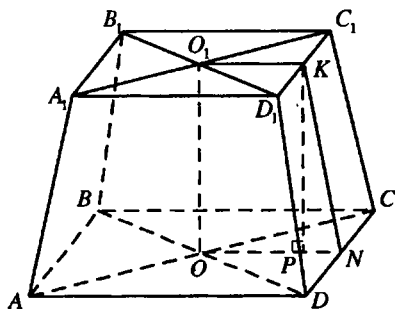


Рис. 11.25



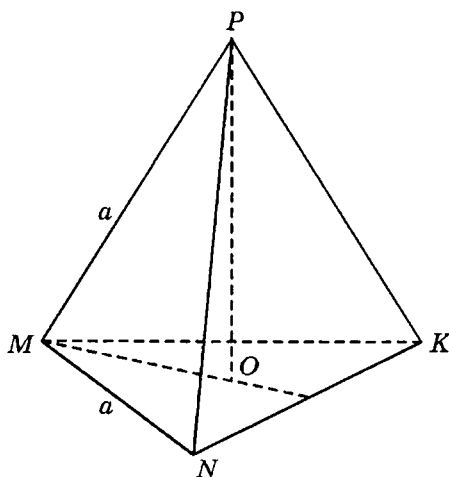


Рис. 11.26

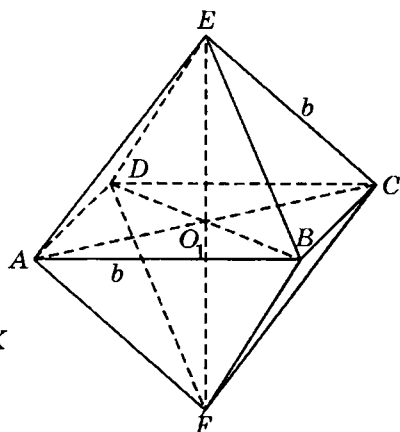


Рис. 11.27

пирамиды  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 11.25). Тогда  $KN$  — ее апофема,  $ON = \frac{a}{2}$ ,  $O_1 K = \frac{b}{2}$ .

Проведем высоту  $KP = OO_1 = 3$  см.  $PN = ON - O_1 K = \frac{a-b}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  см.

Из  $\triangle KPN$  ( $\angle KPN = 90^\circ$ ):  $KN = \sqrt{KP^2 + PN^2} = \sqrt{\frac{19}{2}}$  см. Боковая поверх-

ность  $S_6 = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot KN = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{19}{2}} = 10\sqrt{19}$  см<sup>2</sup>.

Ответ:  $10\sqrt{19}$  см<sup>2</sup>.

**11.130.** Найти отношения объемов правильных тетраэдра и октаэдра, у которых полные поверхности равны.

Решение.

$PO$  — высота правильного тетраэдра  $PMNK$  (рис. 11.26). Пусть

$MN = a$ , тогда  $MO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,  $PO = \sqrt{MP^2 - MO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ , объ-

ем тетраэдра  $V_1 = \frac{1}{3} S_{\triangle MNK} \cdot PO = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$ , полная поверх-

ность тетраэдра  $S_1 = 4 S_{\triangle MNK} = a^2 \sqrt{3}$ . Квадрат  $ABCD$  — общее основание двух правильных пирамид  $EABCD$  и  $FABCD$ , из которых состоит данный правильный октаэдр (рис. 11.27),  $O_1$  — центр квадра-

та  $ABCD$ . Пусть  $AB = b$ . Треугольники  $AO_1E$  и  $AO_1B$  равны ( $\angle AO_1E = \angle AO_1B = 90^\circ$ ,  $AO_1$  — общий катет,  $AE = AB$ ).

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } EO_1 = AO_1 = \frac{b\sqrt{2}}{2}, \text{ и объем октаэдра } V_2 = \frac{2}{3} S_{ABCD} \cdot EO_1 = \\ = \frac{2}{3} b^2 \cdot \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{b^3\sqrt{2}}{3}, \text{ а его полная поверхность } S_2 = 8S_{\triangle AEB} = 8 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \\ = 2b^2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Так как  $S_1 = S_2$ , то  $a^2\sqrt{3} = 2b^2\sqrt{3}$ ,  $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ ,  $\frac{a^3}{b^3} = 2\sqrt{2}$ .

$$\text{Тогда } \frac{V_1}{V_2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} : \frac{b^3\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3}{4b^3} = \frac{1}{4} 2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**11.131.** В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник со стороной, равной  $a$ . Одна из боковых граней призмы перпендикулярна плоскости основания и представляет собой ромб, диагональ которого равна  $b$ . Найти объем призмы.

*Решение.*

По условию

грань  $BB_1C_1C$  — ромб

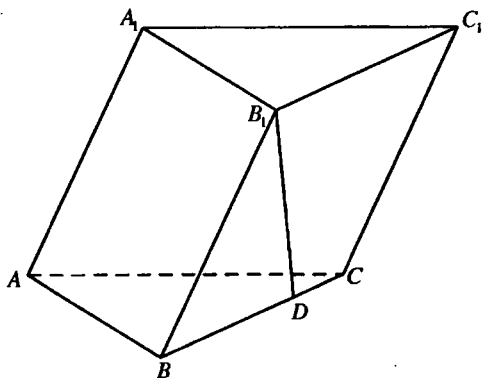


Рис. 11.28

(рис. 11.28) и перпендикулярна основанию. Тогда высота  $B_1D$  ромба — высота призмы. Пусть  $BB_1 = a = BC$ ,  $B_1C = b$ .

Периметр  $P_{\triangle BB_1C} = 2a + b$ , по формуле Герона площадь треугольника

$$S_{\triangle BB_1C} = \sqrt{\left(a + \frac{b}{2}\right) \left(a + \frac{b}{2} - a\right) \left(a + \frac{b}{2} - b\right)} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}. \text{ С другой сто-}$$

$$\text{роны } S = \frac{1}{2} BC \cdot B_1D = \frac{a}{2} B_1D. \text{ Отсюда } B_1D = \frac{2S}{a} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}.$$

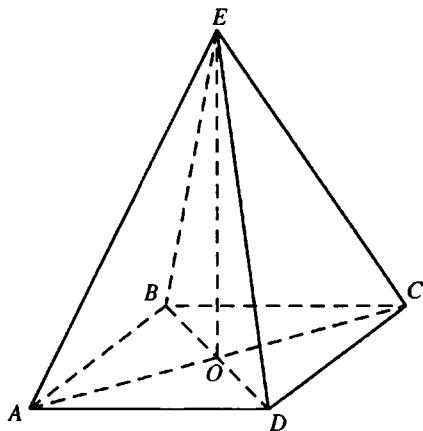


Рис. 11.29

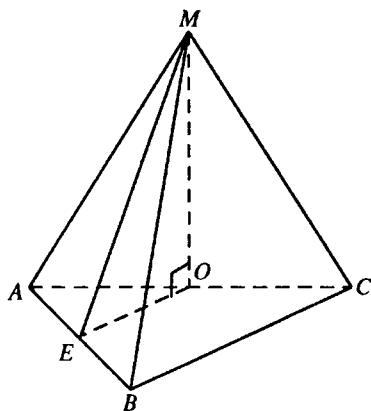


Рис. 11.30

$$\text{Объем призмы } V = S_{\Delta ABC} \cdot B_1 D = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b \sqrt{4a^2 - b^2}}{2a} = \frac{ab \sqrt{12a^2 - 3b^2}}{8}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{ab \sqrt{12a^2 - 3b^2}}{8}.$$

**11.132.** В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, площадь которого равна  $S$ ; боковые ребра пирамиды равны и образуют с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Угол между диагоналями основания равен  $60^\circ$ . Найти объем пирамиды.

*Решение.*

По условию  $ABCD$  — прямоугольник, проведем  $EO$  — высоту пирамиды  $EABCD$  (рис. 11.29). Тогда  $\angle EAO = 45^\circ$ , а так как боковые ребра пирамиды равны, то точка  $O$  — центр окружности, описанной около прямоугольника  $ABCD$  — точка пересечения диагоналей. Пусть  $EO = H$ . Тогда  $AO = EO = H$ ,  $AC = 2H$ , площадь прямоугольника

$$S = \frac{1}{2} AC^2 \sin 60^\circ = 2H^2 \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad H = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{S} \cdot \sqrt[4]{27}}{3}.$$

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} SH = \frac{S \sqrt{S} \cdot \sqrt[4]{27}}{9}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{S \sqrt{S} \cdot \sqrt[4]{27}}{9}.$$



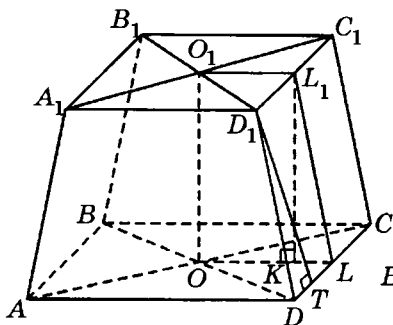


Рис. 11.32

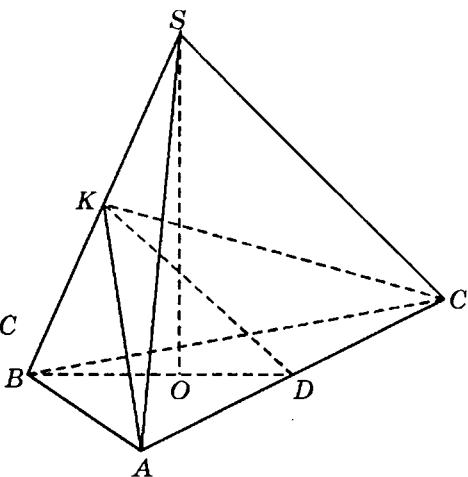


Рис. 11.33

$\triangle ABC$ , тогда  $S_{\triangle ECF} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{16}$ ,  $\triangle TEC = \triangle TFC$  (по двум сторонам и углу между ними). Тогда  $TE = TF$ ,  $K$  — точка пересечения  $EF$  и  $CD$ . Тогда  $K$  — середина  $EF$  и  $TK$  — медиана и высота  $\triangle ETF$ . Так как плоскость  $ETF$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ , то  $TK$  — высота пирамиды  $TEFC$ .  $CK = \frac{1}{2} CD$ ,  $CO = \frac{2}{3} CD$ . Тогда  $\frac{CK}{CO} = \frac{3}{4}$ ,  $\triangle TKC \sim \triangle MOC$

и  $\frac{TK}{MO} = \frac{CK}{CO} = \frac{3}{4}$ ;  $TK = \frac{3}{4} MO = \frac{a\sqrt{3}}{8}$ . Объем пирамиды  $ETFC$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ECF} \cdot TK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{16} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{8} = \frac{a^3}{128}.$$

Ответ:  $\frac{a^3}{128}$ .

**11.135.** Определить объем правильной усеченной четырехугольной пирамиды, если сторона большего основания равна  $a$ , сторона меньшего основания равна  $b$ , а острый угол боковой грани равен  $60^\circ$ .

Решение.

Пусть  $D_1 T$  — высота равнобокой трапеции  $DD_1 C_1 C$  — боковой гра-

ни правильной усеченной пирамиды  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис.11.32). Тогда

$$DT = \frac{CD - C_1 D_1}{2} = \frac{a-b}{2}; \quad D_1 T = DT \operatorname{tg} \angle D_1 D T = \frac{a-b}{2} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}.$$

$$L_1 \text{ — середина } C_1 D_1, L \text{ — середина } CD. \text{ Тогда } LL_1 = D_1 T = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}.$$

Опустим перпендикуляр  $L_1 K$  на плоскость  $ABCD$ . Тогда  $K$  принадлежит отрезку  $OL$ , где  $O$  — центр нижнего основания,  $KL = \frac{a-b}{2}$ . Из

$$\Delta L_1 K L (\angle L_1 K L = 90^\circ): L_1 K = \sqrt{LL_1^2 - KL^2} = \sqrt{\frac{3(a-b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}} = \frac{a-b}{\sqrt{2}}.$$

Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле:

$$V = \frac{H}{3} (S + S_1 + \sqrt{SS_1}), \text{ где } H \text{ — высота пирамиды, } S \text{ и } S_1 \text{ — площади соответственно нижнего и верхнего оснований.}$$

Тогда  $V = \frac{a-b}{3\sqrt{2}} (a^2 + b^2 + ab) = \frac{a^3 - b^3}{3\sqrt{2}} = \frac{(a^3 - b^3)\sqrt{2}}{6}$ .

$$\text{Ответ: } \frac{(a^3 - b^3)\sqrt{2}}{6}.$$

**11.136.** Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна  $a$ . Через одно из ребер основания проведена плоскость, перпендикулярная противоположному боковому ребру и делящая это ребро в отношении  $m:n$ , считая от вершины основания. Определить полную поверхность пирамиды.

*Решение.*

Полную поверхность пирамиды найдем по формуле

$$S_{\text{полн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot SD \text{ (рис.11.33). Так как } \Delta BOS \sim \Delta BKD \text{ (пря-$$

моугольные треугольники, имеющие общий угол), то  $\frac{BD}{BS} = \frac{BK}{BO}$ ,

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} : BS = BK : \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad a^2 = 2BK \cdot BS.$$

$$\text{По условию } \frac{BK}{KS} = \frac{m}{n}, \quad KS = \frac{n}{m} BK, \quad BS = BK + KS = \frac{n+m}{m} \cdot BK,$$

$$BK = \frac{m}{m+n} BS, \quad BS^2 = \frac{(m+n)a^2}{2m}. \text{ В } \Delta SOD \text{ имеем } SD^2 = SO^2 + OD^2;$$

$$\text{отсюда, учитывая, что } SO^2 = BS^2 - BO^2, \text{ находим } SD^2 = \frac{(m+n)a^2}{2m} - \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{12} = \frac{3ma^2 + 6na^2}{12m} = \frac{(m+2n)a^2}{4m}.$$

$$\text{Получили } S_{\text{полн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{a}{2} \sqrt{\frac{m+2n}{m}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \left( 1 + \sqrt{\frac{3(m+2n)}{m}} \right).$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \left( 1 + \sqrt{\frac{3(m+2n)}{m}} \right).$$

**11.137.** Через вершины  $A$ ,  $C$  и  $D_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол  $60^\circ$ . Стороны основания равны 4 и 3 см. Найти объем параллелепипеда.

*Решение.*

Опустим из точки  $D$  перпендикуляр  $DK$  на  $AC$  (рис. 11.34).  $DK$  — проекция  $D_1K$  на плоскость основания параллелепипеда. Тогда  $D_1K \perp AC$ ,  $\angle D_1KD$  — линейный угол двугранного угла, по условию

$\angle D_1KD = 60^\circ$ . Из  $\triangle ADC$  ( $\angle ADC = 90^\circ$ ):  $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 5$  см,

$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot DK = \frac{1}{2} AD \cdot DC$ . Тогда  $DK = \frac{AD \cdot DC}{AC} = 2,4$  см. Из

$\triangle D_1DK$  ( $\angle D_1DK = 90^\circ$ ):  $DD_1 = DK \operatorname{tg} \angle D_1KD = 2,4\sqrt{3}$  см. Объем параллеле-

пипеда  $V = S_{ABCD} \cdot DD_1 = AD \cdot DC \cdot DD_1 = 3 \cdot 4 \cdot 2,4\sqrt{3} = \frac{144\sqrt{3}}{5} (\text{см}^3)$ .

$$\text{Ответ: } \frac{144\sqrt{3}}{5} (\text{см}^3).$$

**11.138.** Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 и 18 см, а площадь равна  $90 \text{ см}^2$ . Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 6 см. Определить боковую поверхность пирамиды.

*Решение.*

Проведем  $SO$  — высоту пирамиды  $SABCD$  (рис. 11.35). Опустим перпендикуляры  $SM$ ,  $SL$ ,  $SN$ ,  $SK$  соответственно на  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$ . По условию  $ABCD$  — параллелограмм, тогда точка  $O$  пересечения диаго-

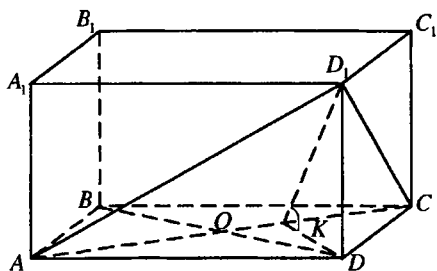


Рис. 11.34

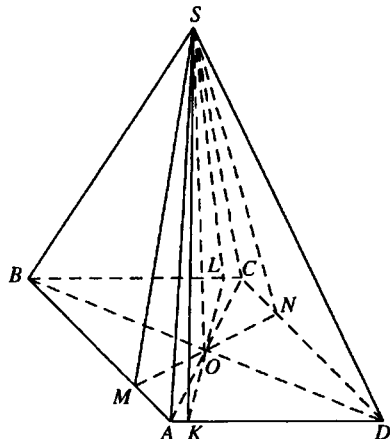


Рис. 11.35

налей — середина отрезков  $MN$  и  $KL$ , являющихся высотами параллелограмма.  $LK = \frac{S_{ABCD}}{AD} = \frac{90}{18} = 5$  (см);  $MN = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{90}{10} = 9$  (см).

Следовательно,  $OK = \frac{1}{2}LK = \frac{5}{2}$  см,  $MO = \frac{1}{2}MN = \frac{9}{2}$  см.

Из  $\triangle SOK$  ( $\angle SOK = 90^\circ$ ):  $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \frac{13}{2}$  см.

Из  $\triangle SOM$  ( $\angle SOM = 90^\circ$ ):  $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \frac{15}{2}$  см. Боковая по-

верхность пирамиды  $S_6 = 2S_{\triangle ASB} + 2S_{\triangle ASD} = AB \cdot SM + AD \cdot SK = 10 \cdot \frac{15}{2} + 18 \cdot \frac{13}{2} = 192$  (см<sup>2</sup>).

Ответ: 192 см<sup>2</sup>.

**11.139.** В правильный октаэдр вписан куб так, что его вершины находятся на ребрах октаэдра. Во сколько раз поверхность октаэдра больше поверхности вписанного куба?

Решение.

Квадрат  $ABCD$  — общее основание правильных пирамид  $SABCD$  и  $S_1ABCD$ , из которых состоит данный правильный октаэдр,  $O$  — центр этого квадрата,  $MNPQM_1N_1P_1Q_1$  — куб, о котором говорится в условии



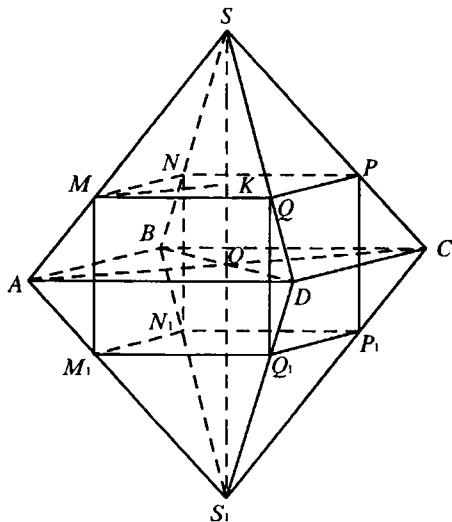


Рис. 11.36

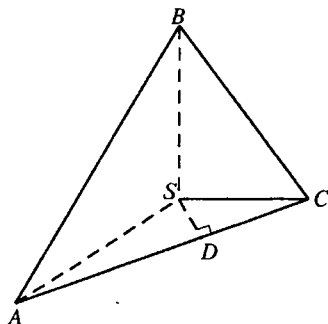


Рис. 11.37

задачи,  $K$  — центр квадрата  $MNPQ$  — точка пересечения  $SO$  и плоскости квадрата  $MNPQ$  (рис. 11.36). Пусть  $AD = a$ ,  $MQ = 2b$ . Тогда

$$MP = 2b\sqrt{2}, \quad AC = a\sqrt{2}, \quad SO = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad SK = SO - KO = \frac{a\sqrt{2}}{2} - b.$$

$$\triangle SMP \sim \triangle SAC. \text{ Из подобия следует: } \frac{MP}{AC} = \frac{SK}{SO}; \quad \frac{2b\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} - b}{\frac{a\sqrt{2}}{2}};$$

$$2b\sqrt{2} = a\sqrt{2} - 2b; \quad 2b = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1). \text{ Поверхность октаэдра}$$

$$S_1 = 8S_{\triangle ASD} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}. \text{ Поверхность куба } S_2 = 6S_{MNPQ} = 6 \cdot (2b)^2 = \\ = 6(a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1))^2 = 12a^2(\sqrt{2}-1)^2 = 12a^2(3-2\sqrt{2})$$

$$\text{Тогда } \frac{S_1}{S_2} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{12a^2(3-2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}(3+2\sqrt{2})}{6}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}(3+2\sqrt{2})}{6}.$$

**11.140.** Найти объем правильной треугольной пирамиды (рис. 11.37), у которой плоский угол при вершине равен  $90^\circ$ , а расстояние между боковым ребром и противоположной стороной равно  $d$ .

*Решение.*

Будем считать, что  $B$  — вершина пирамиды, а  $\triangle ASC$  — основание.  $SD$  — высота прямоугольного равнобедренного  $\triangle ASC$ , опущенная на гипотенузу  $AC$ . Тогда  $SD$  — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых  $BS$  и  $AC$ , а его длина — расстояние между ними,

$$SD = d. \text{ Следовательно, } AC = 2SD = 2d, \quad S_{\triangle ASC} = \frac{1}{2} AC \cdot SD = d^2,$$

$$BS = AS = SD\sqrt{2}. \text{ Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{\triangle ASC} \cdot BS = \frac{d^3}{3} \sqrt{2}.$$

*Ответ:*  $\frac{d^3}{3} \sqrt{2}$ .

**11.141.** Площадь того сечения правильного тетраэдра, которое имеет форму квадрата, равна  $m^2$ . Найти поверхность тетраэдра.

*Решение.*

Пусть квадрат  $DPQF$  — сечение правильного тетраэдра  $MABC$  (рис. 11.37), о котором говорится в условии задачи. Тогда  $PQ = PD = m$ . Так как  $PQ$  параллельна  $DF$ , то прямая  $PQ$  параллельна плоскости  $ABC$ . Тогда плоскость  $AMC$ , проходящая через прямую  $PQ$ , пересекает плоскость  $ABC$  по прямой  $AC$ , параллельной  $PQ$ . Следовательно,

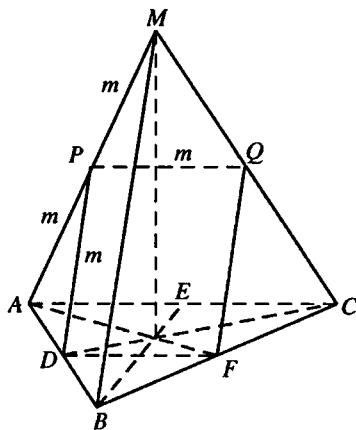


Рис. 11.38

$\triangle PMQ \sim \triangle AMC$  и  $\triangle PMQ$  — равносторонний,  $PM = PQ = m$ . Аналогично  $PD \parallel BM$ ,  $AP = PD = m$ . Следовательно, ребро тетраэдра  $a = 2m$ .

$$\text{Поверхность тетраэдра } S = 4S_{\triangle ABC} = 4 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = a^2 \sqrt{3} = 4m^2 \sqrt{3}.$$

*Ответ:*  $4m^2 \sqrt{3}$ .

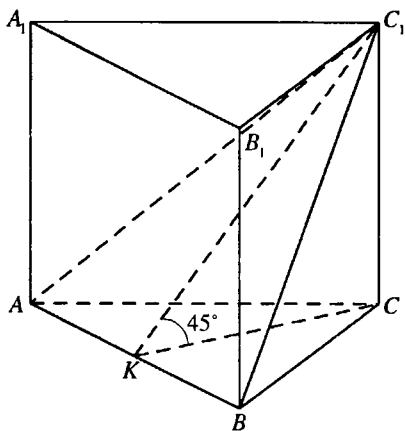


Рис. 11.39

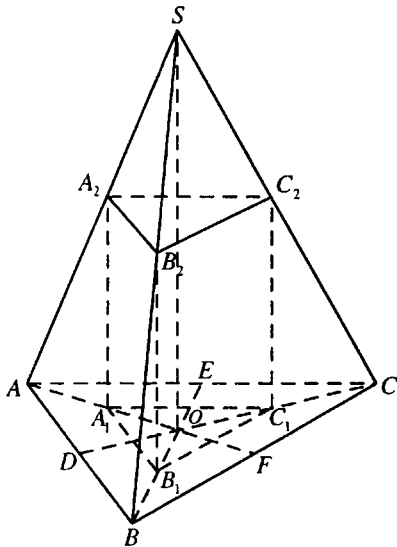


Рис. 11.40

**11.142.** В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость, составляющая с плоскостью нижнего основания угол  $45^\circ$ . Площадь сечения равна  $S$ . Найти объем призмы.

*Решение.*

$\triangle AC_1B$  — сечение правильной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  (рис. 11.39), о котором говорится в условии задачи,  $K$  — середина  $AB$ . Тогда  $CK \perp AB$ ,  $C_1K \perp AB$ ,  $\angle C_1KC$  — угол наклона плоскости  $AC_1B$  к плоскости основания,  $\angle C_1KC = 45^\circ$ .

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AC_1B} \cdot \cos \angle C_1KC = \frac{S\sqrt{2}}{2}$ . Пусть  $CC_1 = H$ .

Тогда  $CK = CC_1 = H$ ,  $BK = \frac{H\sqrt{3}}{3}$ ,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CK = BK \cdot CK = \frac{H^2\sqrt{3}}{3}$ . Тогда  $\frac{H^2\sqrt{3}}{3} = \frac{S\sqrt{2}}{2}$ ;  $H = \sqrt{\frac{S\sqrt{6}}{2}}$ .

Объем призмы  $V = S_{\triangle ABC} \cdot H = \frac{S\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{S\sqrt{6}}{2}} = \frac{S\sqrt{S} \cdot \sqrt[4]{6}}{2}$ .

*Ответ:*  $\frac{S\sqrt{S} \cdot \sqrt[4]{6}}{2}$ .

**11.143.** В правильный тетраэдр помещена правильная треугольная призма так, что вершины одного ее основания находятся на боковых ребрах тетраэдра, а другого — в плоскости его основания. Ребро тетраэдра равно  $a$ . Определить объем призмы, если все ее ребра равны.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота тетраэдра  $SABC$ ,  $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$  — правильная призма, о которой говорится в условии задачи (рис. 11.40). Из

$$\Delta SOC (\angle SOC = 90^\circ): SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \text{ Пусть ребро}$$

$$\text{призмы равно } x. \text{ Тогда } C_1O = \frac{x\sqrt{3}}{3}, CC_1 = CO - C_1O = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{x\sqrt{3}}{3} = \\ = \frac{a-x}{\sqrt{3}}, \Delta C_2C_1C \sim \Delta SOC.$$

$$\text{Из подобия следует: } \frac{C_1C_2}{C_1C} = \frac{SO}{OC}; C_1C_2 \cdot OC = C_1C \cdot SO; x \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \\ = \frac{a-x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; x\sqrt{3} = a\sqrt{2} - x\sqrt{2}; x = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = a\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Объем призмы

$$V = S_{\Delta A_1B_1C_1} \cdot C_1C_2 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot x = \frac{x^3\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3 \sqrt{3}}{4} = \\ = \frac{a^3 \sqrt{6}(3\sqrt{3} - 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{2})}{2} = \frac{a^3 \sqrt{6}(9\sqrt{3} - 11\sqrt{2})}{2} = \frac{a^3(27\sqrt{2} - 22\sqrt{3})}{2}.$$

*Ответ:*  $\frac{a^3(27\sqrt{2} - 22\sqrt{3})}{2}$ .

**11.144.** Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной  $c$ , и острым углом  $30^\circ$ . Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Определить объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

*Решение.*

Искомый объем  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot CC_1$  (рис. 11.41). Так как  $\angle ABC = 30^\circ$ ,

то  $AC = \frac{c}{2}, BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ , следовательно,  $S_{\text{осн}} = \frac{c^2\sqrt{3}}{8}$ . С другой сто-

роны,  $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$ , где  $CD \perp AB$  и  $CD = \frac{1}{2} BC = \frac{c\sqrt{3}}{4}$ . Так как

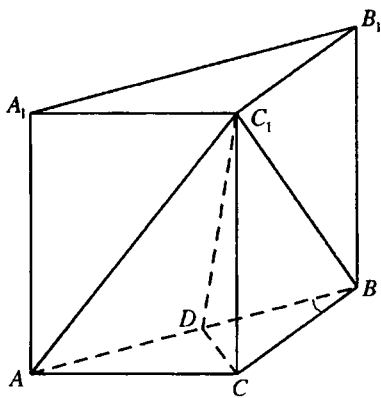


Рис. 11.41

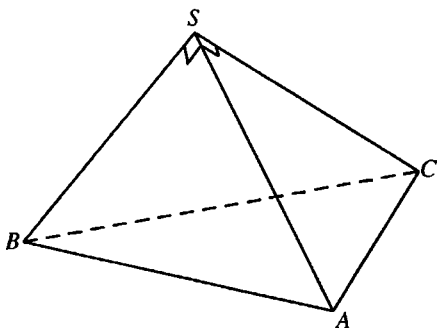


Рис. 11.42

$CD \perp AB$ , то и  $C_1D \perp AB$ , т.е.  $\angle C_1DC = 45^\circ$  (по условию); поэтому в  $\triangle C_1DC$  имеем  $CC_1 = CD = \frac{c\sqrt{3}}{4}$ . Получили  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{c^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{4} = \frac{c^3}{32}$ .

Ответ:  $\frac{c^3}{32}$ .

**11.145.** Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а площади их равны  $a^2$ ,  $b^2$  и  $c^2$ . Определить объем пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $SA = x$ ,  $SB = y$ ,  $SC = z$  (рис. 11.42). Из взаимной перпендикулярности боковых граней следует взаимная перпендикулярность этих ребер, откуда искомый объем  $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ASB} \cdot SC = \frac{1}{6} xyz$ . По условию

$\frac{1}{2}xy = a^2$ ,  $\frac{1}{2}xz = b^2$ ,  $\frac{1}{2}yz = c^2$ . Перемножив эти равенства, получим

$\frac{1}{8}x^2y^2z^2 = a^2b^2c^2$ . Итак,  $V = \frac{1}{6}abc\sqrt{8} = \frac{1}{3}abc\sqrt{2}$ .

Ответ:  $\frac{1}{3}abc\sqrt{2}$ .

**11.146.** Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник со стороной, равной  $a$ . Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. Определить полную поверхность пирамиды.

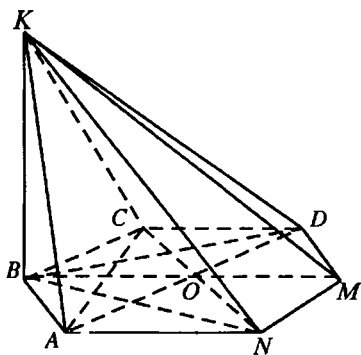


Рис. 11.43.1

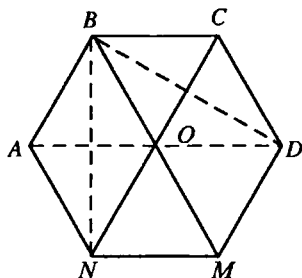


Рис. 11.43.2

*Решение.*

Правильный шестиугольник  $ABCDMN$  — основание пирамиды  $KABCDMN$  (рис. 11.43.1), ребро  $KB$  перпендикулярно плоскости основания,  $KB = AB = a$ . Тогда  $\triangle ABK = \triangle CBK$  (по двум катетам),

$S_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} AB \cdot BK = \frac{a^2}{2}$ .  $\angle BAN = \angle ANM = 120^\circ$  (рис. 11.43.2). Тогда

из  $\triangle BAN$   $AB = AN$ ,  $BN = a\sqrt{3}$ ,  $\angle ABN = \angle ANB = 30^\circ$  и, следовательно,  $\angle BNM = 90^\circ$ .  $BN$  — проекция  $KN$  на плоскость основания пирамиды. Значит,  $KN \perp NM$ . Аналогично  $KD \perp MD$  и так как  $BN = BD$ , то  $KN = KD$ ,  $\triangle KNM = \triangle KDM$ ,  $\triangle KAN = \triangle KCD$ .

Из  $\triangle KBN$  ( $\angle KBN = 90^\circ$ ):  $KN = \sqrt{BN^2 + KB^2} = 2a$ .

Тогда  $S_{\triangle KNM} = \frac{1}{2} KN \cdot MN = a^2$ .

Из  $\triangle ABK$  ( $\angle ABK = 90^\circ$ ):  $AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = a\sqrt{2}$ . Полупериметр треугольника  $\triangle ANK$   $p = \frac{a\sqrt{2} + 2a + a}{2} = \frac{3a + a\sqrt{2}}{2}$ , вычислим его площадь по формуле Герона:

$$S_{\triangle ANK} = \sqrt{\frac{3a + a\sqrt{2}}{2} \left( \frac{3a + a\sqrt{2}}{2} - a \right) \times \left( \frac{3a + a\sqrt{2}}{2} - a\sqrt{2} \right) \left( \frac{3a + a\sqrt{2}}{2} - 2a \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{3a+a\sqrt{2}}{4} \cdot (a\sqrt{2}+a)} \times \sqrt{\frac{3a-a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}-a}{2}} =$$

$$= \frac{a^2}{4} \sqrt{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

Площадь правильного шестиугольника  $ABCDMN$ :  $S_{\text{осн}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ . Следовательно, полная поверхность пирамиды

$$S = 2(S_{\Delta AVK} + S_{\Delta KNM} + S_{\Delta ANK}) + S_{\text{осн}} = 2\left(\frac{a^2}{2} + a^2 + \frac{a^2\sqrt{7}}{4}\right) + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{a^2(6 + \sqrt{7} + 3\sqrt{3})}{2}.$$

Ответ:  $\frac{a^2(6 + \sqrt{7} + 3\sqrt{3})}{2}$ .

**11.147.** Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 и 8 м, а одна из диагоналей равна 6 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 м. Определить полную поверхность пирамиды.

*Решение.*

По условию  $AB = 8$  м,  $AD = 10$  м,  $BD = 6$  м (рис. 11.44). Так как  $6^2 + 8^2 = 10^2$ , то  $\Delta ABD$  — прямоугольный и  $S_{\text{осн}} = 8 \cdot 6 = 48$  (м<sup>2</sup>).

Так как  $BD \perp AB$ , то и  $SB \perp AB$ ,  $S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2} AB \sqrt{SO^2 + OB^2} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \sqrt{4^2 + 3^2} = 20 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Проведем  $SK \perp AD$ ; тогда  $S_{\Delta ASD} = \frac{1}{2} AD \cdot SK = \frac{1}{2} AD \sqrt{SO^2 + OK^2}$ .

Чтобы найти  $OK$ , воспользуемся тем, что  $\Delta OKD \sim \Delta ABD$ ;

тогда  $OK : AB = OD : AD \Rightarrow OK = \frac{8 \cdot 3}{10} = \frac{12}{5}$  (м). Следовательно,

$$SK = \sqrt{16 + \frac{144}{25}} = \frac{4\sqrt{34}}{5} \text{ (м)} \text{ и } S_{\Delta ASD} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{4\sqrt{34}}{5} = 4\sqrt{34} \text{ (м}^2\text{)}. \text{ Итак,}$$

$$S_{\text{прям}} = 48 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 4\sqrt{34} = 8(11 + \sqrt{34}) \text{ (м}^2\text{)}.$$

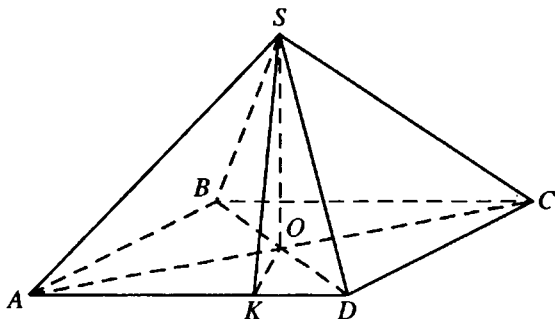


Рис. 11.44

Ответ:  $8(11 + \sqrt{34})$  (м<sup>2</sup>).

11.148. Площади оснований усеченной пирамиды равны  $S_1$  и  $S_2$  ( $S_1 < S_2$ ), а ее объем равен  $V$ . Определить объем полной пирамиды.

Решение.

Пусть  $H$  — высота полной пирамиды,  $h$  — высота усеченной пирамиды и  $x = H - h$ .

Имеем  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{x^2}{H^2}$  или  $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} = \frac{x}{x+h}$ , откуда  $x\sqrt{S_1} + h\sqrt{S_1} = x\sqrt{S_2}$ ,

$x = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$ . Так как  $H = x + h = \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$ , то объем полной пира-

миды  $V_{\text{прям}} = \frac{1}{3}S_2H = \frac{1}{3} \frac{hS_2\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$ .

По условию  $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$ , и, значит,  $h = \frac{3V}{S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}}$ .

Получили,  $V_{\text{прям}} = \frac{1}{3} \frac{S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}} \cdot \frac{3V}{S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}} = \frac{VS_2\sqrt{S_2}}{S_2\sqrt{S_2} - S_1\sqrt{S_1}}$ .

Ответ:  $\frac{VS_2\sqrt{S_2}}{S_2\sqrt{S_2} - S_1\sqrt{S_1}}$ .



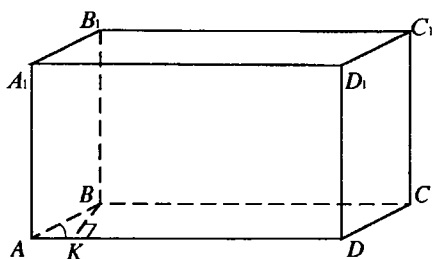


Рис. 11.45

$V = S_{\text{осн}} h$ , где  $h$  — высота параллелепипеда. Так как параллелепипед прямой, то высоты боковых граней также равны  $h$  (рис. 11.44). По условию  $\angle BAD = 30^\circ$ ,  $AB \cdot h = 6 \text{ дм}^2$ ,  $AD \cdot h = 12 \text{ дм}^2$ , т.е.  $AD = 2AB$ .

Пусть  $BK \perp AD$ ; тогда  $BK = \frac{1}{2} AB$ .

Так как  $AD \cdot BK = 4 \text{ дм}^2$ , то имеем  $2AB \cdot \frac{1}{2} AB = 4$ ,  $AB = 2$  (дм); следовательно,  $h = 3$  дм. Окончательно  $V = 4 \cdot 3 = 12 \text{ дм}^3$ .

*Ответ:*  $12 \text{ дм}^3$ .

**11.150.** Определить объем правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой стороны основания равны 3 и 2 м, а боковая поверхность равновелика сумме площадей оснований.

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр нижнего основания  $ABC$ ,  $O_1$  — центр верхнего основания  $A_1B_1C_1$  правильной усеченной пирамиды,  $D$  — середина  $AB$ ,  $D_1$  — середина  $A_1B_1$  (рис. 11.46). Тогда  $DD_1$  — высота боковой грани  $AA_1B_1B$ ,

площадь которой  $S_1 = \frac{A_1B_1 + AB}{2} \cdot DD_1 = \frac{5}{2} DD_1$ , откуда боковая поверхность пирамиды  $S_6 = 3S_1 = \frac{15}{2} \cdot DD_1$ ,  $S_{\Delta ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ м}^2$ ;  $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \sqrt{3} \text{ м}^2$ . По

$S_6 = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1B_1C_1}$ , тогда  $\frac{15}{2} DD_1 = \frac{13\sqrt{3}}{4}$ ;  $DD_1 = \frac{13\sqrt{3}}{30}$ . Опустим перпендикуляр  $D_1K$  на плоскость  $ABC$ . Тогда точка  $K$  принадлежит отрезку  $OD$ ,  $DK = OD - O_1D_1 = \frac{AB\sqrt{3}}{6} - \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ м}$ .

**11.149.** Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, один из углов которого равен  $30^\circ$ . Площадь основания равна  $4 \text{ дм}^2$ . Площади боковых граней параллелепипеда равны  $6$  и  $12 \text{ дм}^2$ . Найти объем параллелепипеда.

*Решение.*

Объем параллелепипеда

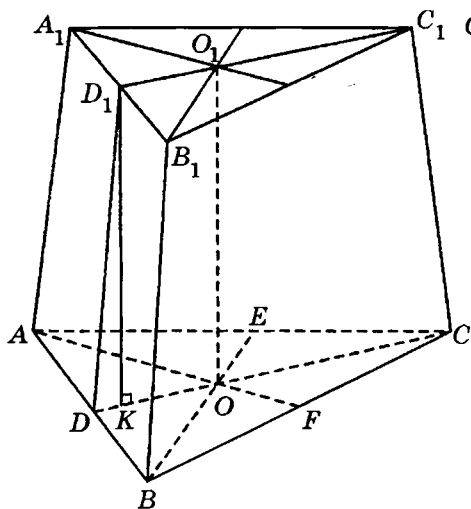


Рис. 11.46

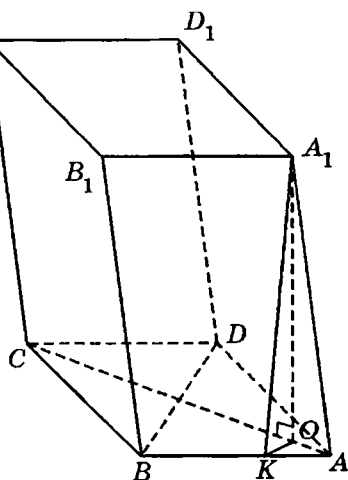


Рис. 11.47

$$\text{Из } \triangle D_1KD (\angle D_1KD = 90^\circ) D_1K = \sqrt{DD_1^2 - DK^2} = \sqrt{\frac{169}{300} - \frac{1}{12}} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \text{ (м).}$$

$$\begin{aligned} \text{Объем пирамиды } V &= \frac{D_1K}{3} (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle A_1B_1C_1} + \sqrt{S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}}) = \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{15} \left( \frac{9\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \right) = 1,9 \text{ м}^3. \end{aligned}$$

Ответ: 1,9 м<sup>3</sup>.

**11.151.** Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб  $ABCD$  со стороной, равной  $a$ , и острым углом  $60^\circ$ . Ребро  $AA_1$  также равно  $a$  и образует с ребрами  $AB$  и  $AD$  углы  $45^\circ$ . Определить объем параллелепипеда.

*Решение.*

Пусть  $A_1O$  — высота параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , о котором говорится в условии задачи (рис. 11.47). Так как  $\angle A_1AB = \angle A_1AD$ , то точка  $O$  принадлежит биссектрисе  $\angle BAD$  — лучу  $AC$ .  $AA_1$  — наклонная к плоскости основания призмы,  $AO$  — ее проекция на эту плоскость,  $AB$  — прямая, лежащая в этой плоскости.

Проведем  $A_1K \perp AB$  и соединим  $K$  с  $O$ . В  $\triangle A_1OA$ :  $\cos \angle A_1AO = \frac{OA}{A_1A}$ ;

$$\text{в } \triangle A_1KA: \cos \angle A_1AK = \cos \angle A_1AB = \frac{AK}{A_1A}; \quad \text{в } \triangle OKA: \cos \angle OAK =$$

$$= \cos \angle OAB = \frac{AK}{OA}. \quad \text{Но } \frac{OA}{A_1A} \cdot \frac{AK}{OA} = \frac{AK}{A_1A}, \quad \text{т.е. } \cos \angle A_1AO \cdot \cos \angle OAK =$$

$$= \cos \angle A_1AK, \quad \text{откуда } \cos \angle A_1AO = \frac{\cos \angle A_1AK}{\cos \angle OAK}.$$

Так как  $\angle BAD = 60^\circ$ , то  $\angle OAK = 30^\circ$  и, значит,  $\cos \angle A_1AO = \frac{\cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \quad \sin \angle A_1AO = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A_1AO} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \text{Тогда}$$

$A_1O = AA_1 \sin \angle A_1AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$ , откуда находим искомый объем:

$$V = S_{ABCD} \cdot A_1O = a^2 \sin 60^\circ \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{2}.$$

Ответ:  $\frac{a^3}{2}$ .

**11.152.** Центры граней правильного тетраэдра служат вершинами нового тетраэдра (рис. 11.48). Найти отношение их поверхностей и отношение их объемов.

*Решение.*

Пусть  $M, N, K, O$  — центры граней  $AFC, BFC, AFB, ABC$  данного тетраэдра соответственно,  $D$  — середина  $AC$ ,  $E$  — середина  $BC$ . Тогда

$$FM = \frac{2}{3}FD, \quad FN = \frac{2}{3}FE \quad \text{и, следовательно, } MN \parallel DE, \quad MN = \frac{2}{3}DE =$$

$$= \frac{1}{2}AB. \quad \text{Пусть } V_1 \text{ и } S_1 \text{ — объем и поверхность данного тетраэдра, а}$$

$V_2$  и  $S_2$  — объем и поверхность нового тетраэдра. Так как два любых пра-

вильных тетраэдра подобны, то  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{AB^3}{MN^3} = 27:1; \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{AB^2}{MN^2} = 9:1.$

Ответ:  $27:1; 9:1$ .

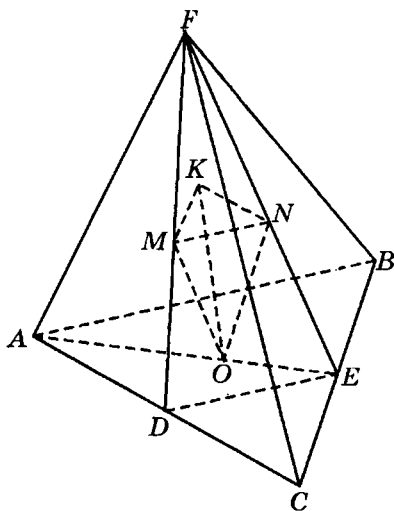


Рис. 11.48

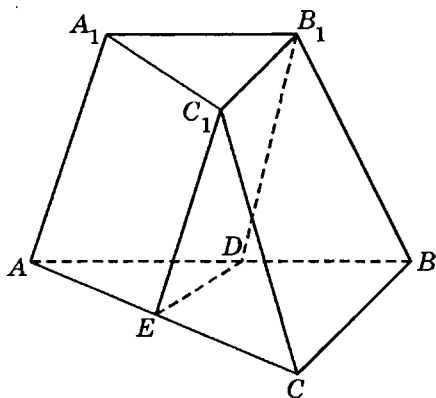


Рис. 11.49

**11.153.** В усеченной треугольной пирамиде через сторону верхнего основания проведена плоскость параллельно противоположному боковому ребру. В каком отношении разделится объем усеченной пирамиды, если соответственные стороны относятся как 1:2?

*Решение.*

Стороны оснований относятся как 1:2, поэтому площади оснований относятся как 1:4 (рис. 11.49). Тогда объем усеченной пирамиды

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{1}{3}h(4S_2 + S_2 + 2S_2) = \frac{7}{3}S_2h, \text{ где } S_2 \text{ — площадь верхнего основания, } h \text{ — высота.}$$

Объем призмы  $ADEA_1B_1C_1$  составляет  $V_1 = S_2h$  и объем оставшейся части пирамиды есть

$$V_2 = V - V_1 = \frac{7}{3}S_2h - S_2h = \frac{4}{3}S_2h. \text{ Итак, } V_1 : V_2 = 3 : 4.$$

*Ответ:* 3:4.

**11.154.** Расстояние между любыми двумя боковыми ребрами наклонной треугольной призмы  $a$ . Боковое ребро равно  $l$  и наклонено к плоскости основания под углом  $60^\circ$ . Определить полную поверхность призмы.

*Решение.*

Пусть  $A_1O$  — высота наклонной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  (рис. 11.50).

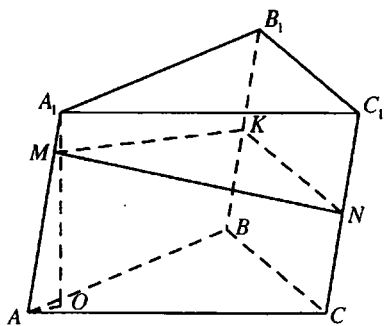


Рис. 11.50

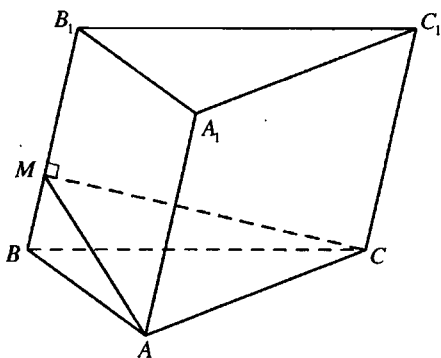


Рис. 11.51

$AO$  — проекция  $AA_1$  на плоскость основания,  $\angle A_1AO$  — угол наклона бокового ребра  $AA_1$  к плоскости основания, по условию

$$\angle A_1AO = 60^\circ. \text{ Из } \triangle AOA_1 (\angle AOA_1) = 90^\circ; A_1O = AA_1 \sin \angle A_1AO = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Рассмотрим  $\triangle MNK$  — перпендикулярное сечение призмы. Тогда длина его сторон — расстояние между боковыми ребрами призмы. Так как по условию эти расстояния равны  $a$ , то периметр перпендикулярного

сечения  $P = 3a$ , его площадь  $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ . Боковая поверхность призмы

$$S_6 = P \cdot AA_1 = 3al. \text{ Объем призмы } V = S_1 \cdot AA_1 = S_{\triangle ABC} \cdot A_1O.$$

$$\text{Отсюда } \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot l = S_{\triangle ABC} \frac{l\sqrt{3}}{2}; S_{\triangle ABC} = \frac{a^2}{2}.$$

призмы  $S = S_6 + 2S_{\triangle ABC} = 3al + a^2$ .

*Ответ:*  $3al + a^2$ .

**11.155.** Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной, равной  $a$ . Длина бокового ребра равна  $b$ , а одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы  $45^\circ$ . Определить боковую поверхность призмы.

*Решение.*

Пусть правильный треугольник  $ABC$  — основание наклонной призмы  $ABC_1A_1B_1C_1$ ,  $\angle B_1BA = \angle B_1BC = 45^\circ$  (рис. 11.51). Опустим перпен-

дикуляр  $AM$  на  $BB_1$ .  $\Delta BMA = \Delta BMC$  (по двум сторонам и углу между ними). Тогда  $\angle BMC = \angle BMA = 90^\circ$  и  $AM = CM = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Отсюда следует, что  $\Delta AMC$  — перпендикулярное сечение данной призмы и его периметр  $P = a\sqrt{2} + a = a(\sqrt{2} + 1)$ . Боковая поверхность призмы  $S_6 = P \cdot BB_1 = ab(\sqrt{2} + 1)$ .

Ответ:  $ab(\sqrt{2} + 1)$ .

**11.156.** Доказать, что объем прямой призмы, основанием которой служит трапеция, равен произведению среднего арифметического площадей параллельных боковых граней на расстояние между ними.

Решение.

Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — площади боковых параллельных граней данной прямой призмы,  $H$  — ее высота,  $a$  и  $b$  — длины параллельных сторон оснований,  $h$  — высота трапеции, лежащей в основании. Тогда  $h$  — расстояние между параллельными боковыми гранями призмы, вычислим их площади:  $S_1 = aH$ ,  $S_2 = bH$ , отсюда  $a = \frac{S_1}{H}$ ,  $b = \frac{S_2}{H}$ , площадь основания призмы  $S = (a + b) \cdot \frac{h}{2} = \frac{(S_1 + S_2)h}{2H}$ .

Объем призмы  $V = SH = \frac{(S_1 + S_2)h}{2}$ , что и требовалось доказать.

**11.157.** В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны  $a$  и  $b$ , а боковая поверхность равна половине полной поверхности. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть  $O$  и  $O_1$  — центры соответственно нижнего  $ABCD$  и верхнего  $A_1B_1C_1D_1$  оснований правильной усеченной пирамиды (рис. 11.52),

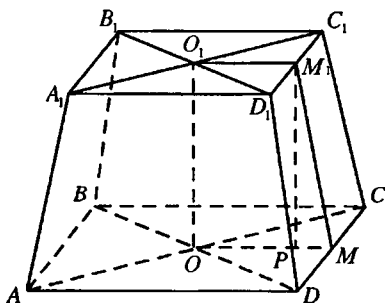


Рис. 11.52

$M$  — середина  $CD$ ,  $M_1$  — середина  $C_1D_1$ . Тогда  $MM_1$  — апофема данной пирамиды. Пусть  $MM_1 = x$ . Тогда боковая поверхность пирамиды  $S_6 = 4 \cdot \frac{CD + C_1D_1}{2} \cdot MM_1 = 2(a+b)x$ . Площадь верхнего основания  $S_1 = b^2$ , нижнего основания  $S_2 = a^2$ .

Полная поверхность  $S = S_1 + S_2 + S_6$ . По условию  $S = 2S_6$ . Следовательно,  $S_6 = S_1 + S_2$ ;  $2(a+b)x = a^2 + b^2$ ;  $x = \frac{a^2 + b^2}{2(a+b)}$ . Опустим перпендикуляр  $M_1P$  на плоскость нижнего основания. Тогда  $P$  принадлежит  $OM$ ,

$$PM = \frac{a-b}{2}. \text{ Из } \triangle M_1PM (\angle M_1PM = 90^\circ): M_1P = \sqrt{MM_1^2 - PM^2} = \\ = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)^2}{4(a+b)^2} - \frac{(a-b)^2}{4}} = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}}{2(a+b)} = \frac{ab}{a+b}.$$

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} M_1P(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}) = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}.$$

Ответ:  $\frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}$ .

**11.158.** В треугольной пирамиде, каждое из боковых ребер которой равно  $a$ , один плоский угол при вершине пирамиды прямой, а каждый из остальных равен  $60^\circ$ . Вычислить объем пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $D$  — вершина пирамиды  $DABC$  (рис. 11.53), по условию  $DA = DB = DC = a$ ,  $\angle ADC = \angle BDC = 60^\circ$ ,  $\angle ADB = 90^\circ$ .

Тогда  $\triangle ADC$  и  $\triangle BDC$  — равносторонние,  $AC = BC = a$ ,  $AB = a\sqrt{2}$ .

Так как  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ , то  $\angle ACB = 90^\circ$  и  $S_{\triangle ACB} = \frac{a^2}{2}$ .  $DO$  — высота пирамиды. Так как боковые ребра пирамиды равны, то точка  $O$  — центр окружности, описанной около основания пирамиды. Так как  $\triangle ABC$  прямоугольный, то точка  $O$  — середина гипотенузы  $AB$ ,  $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Из

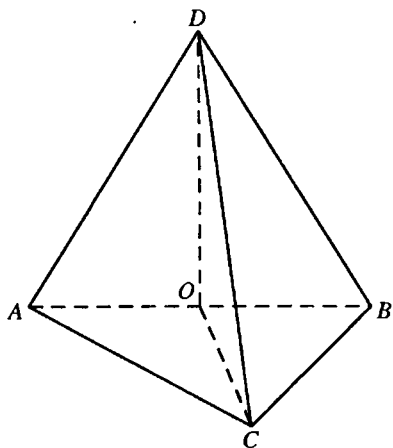


Рис. 11.53

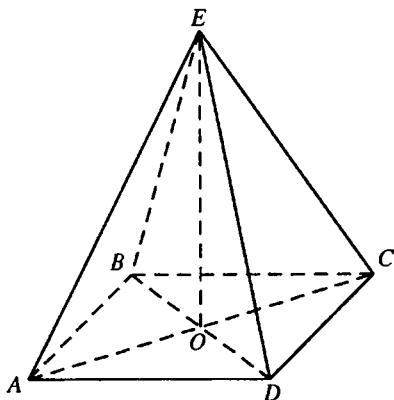


Рис. 11.54

$\triangle AOD (\angle AOD = 90^\circ)$ :  $DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Объем пи-

рамиды  $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ACB} \cdot DO = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$ .

Ответ:  $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$ .

**11.159.** Основанием пирамиды служит параллелограмм, смежные стороны которого 9 и 10 см, а одна из диагоналей 11 см. Противоположные боковые ребра равны, и длина каждого из больших ребер составляет 10,5 см. Вычислить объем пирамиды.

*Решение.*

Пусть параллелограмм  $ABCD$  — основание пирамиды  $EABCD$  (рис. 11.54),  $AB = 9$  см,  $AD = 10$  см,  $BD = 11$  см,  $AE = CE$ ,  $BE = DE$ .  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  параллелограмма. Тогда  $EO$  — медиана равнобедренных треугольников  $AEC$  и  $BED$ .

Следовательно,  $EO \perp AC$ ,  $EO \perp BD$ , то есть отрезок  $EO$  перпендикулярен плоскости основания и является высотой пирамиды.

$AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2)$ ;  $AC = \sqrt{241}$  см. Значит,  $AC > BD$  и  $AO > BO$ .  $AO$  — проекция  $AE$ ,  $BO$  — проекция  $BE$  на плоскость



основания. Следовательно,  $AE > BE$ ,  $AE = 10,5 \text{ см} = \frac{21}{2} \text{ см}$ . Из

$$\triangle AOE (\angle AOE = 90^\circ): EO = \sqrt{AE^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{441}{4} - \frac{241}{2}} = 5\sqrt{2} \text{ (см)}. По$$

формуле Герона  $S_{\triangle ABD} = 30\sqrt{2} \text{ см}^2$ , площадь параллелограмма  $ABCD$

$$A = 2S_{\triangle ABD} = 60\sqrt{2} \text{ см}^2. \text{ Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S \cdot EO = 200 \text{ см}^3.$$

*Ответ:*  $200 \text{ см}^3$ .

**11.160.** Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями  $d_1$  и  $d_2$ . Высота пирамиды проходит через вершину острого угла ромба. Площадь диагонального сечения, проведенного через меньшую диагональ, равна  $Q$ . Вычислить объем пирамиды при условии, что  $d_1 > d_2$ .

*Решение.*

Искомый объем  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SA$ , где  $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} d_1 d_2$  (рис. 11.55) В

$\triangle SAO$  имеем  $SA = \sqrt{SO^2 - AO^2}$ , где  $AO = \frac{d_1}{2}$ , а  $SO = \frac{2Q}{d_2}$ , так как по

$$\text{условию } \frac{1}{2} d_2 \cdot SO = Q. \text{ Отсюда } SA = \sqrt{\frac{4Q^2}{d_2^2} - \frac{d_1^2}{4}} = \frac{\sqrt{16Q^2 - d_1^2 d_2^2}}{2d_2}.$$

$$\text{Получили } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \frac{\sqrt{16Q^2 - d_1^2 d_2^2}}{2d_2} = \frac{d_1}{12} \sqrt{16Q^2 - d_1^2 d_2^2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{d_1}{12} \sqrt{16Q^2 - d_1^2 d_2^2}.$$

**11.161.** В треугольной пирамиде две боковые грани взаимно перпендикулярны. Площади этих граней равны  $P$  и  $Q$ , а длина их общего ребра равна  $a$ . Определить объем пирамиды.

*Решение.*

Пусть в пирамиде  $ABCS$  грани  $ABC$  и  $ABS$  взаимно перпендикулярны,  $\triangle ABC$  — основание пирамиды, точка  $S$  — ее вершина (рис. 11.56),  $S_{\triangle ABC} = P$ ,  $S_{\triangle ASB} = Q$ ,  $AB = a$ . В плоскости  $ABS$  опустим перпендикуляр  $SK$  на  $AB$ . Тогда отрезок  $SK$  перпендикулярен плоско-

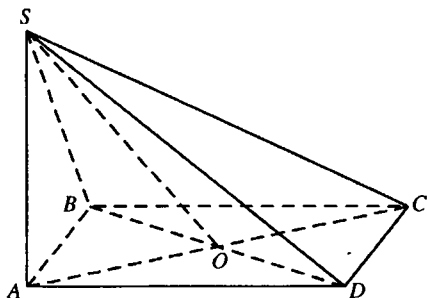


Рис. 11.55

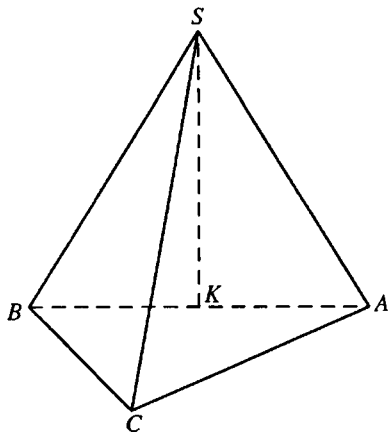


Рис. 11.56

сти  $ABC$  и является высотой пирамиды. Из  $\triangle ASB$ :  $SK = \frac{2S_{\triangle ASB}}{AB} = \frac{2Q}{a}$ .

Объем пирамиды  $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SK = \frac{2PQ}{3a}$ .

Ответ:  $\frac{2PQ}{3a}$ .

**11.162.** В треугольной пирамиде все четыре грани — равные равнобедренные треугольники с основанием  $a$  и боковой стороной  $b$ . Вычислить объем пирамиды. При всяких ли  $a$  и  $b$  задача имеет решение?

*Решение.*

В пирамиде  $SABC$  (рис. 11.57)  $AB = AC = BS = CS = b$ ,  $BC = AS = a$ :  $E$  — середина  $BC$ . Тогда  $AE \perp BC$ ,  $SE \perp BC$ . Следовательно, прямая  $BC$  перпендикулярна плоскости  $ASE$ . Тогда плоскость  $ABC$  также перпендикулярна плоскости  $ASE$ . В плоскости  $ASE$  опустим перпендикуляр  $SO$  на  $AE$ . Тогда отрезок  $SO$  перпендикулярен плоскости  $ABC$  и является высотой пирамиды.

Из  $\triangle AEB$  ( $\angle AEB = 90^\circ$ ):  $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2}$ .

$M$  — середина  $AS$ . Тогда  $EM$  — высота треугольника  $\triangle AES$  и

$$EM = \sqrt{AE^2 - AM^2} = \sqrt{\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}.$$

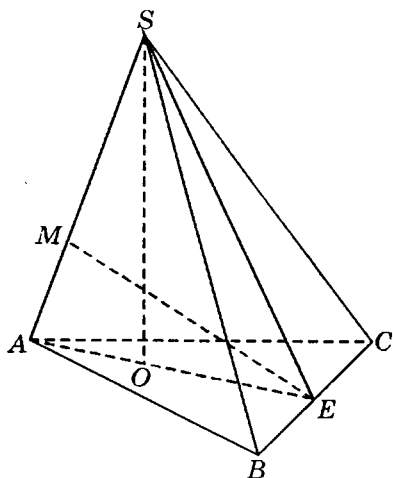


Рис. 11.57

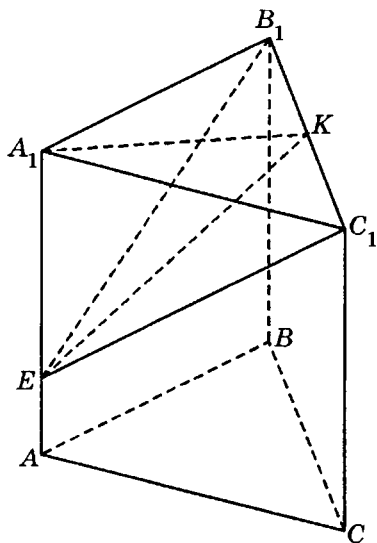


Рис. 11.58

$$S_{\Delta AES} = \frac{1}{2} AS \cdot EM = \frac{1}{2} AE \cdot SO.$$

Тогда  $SO = \frac{AS \cdot EM}{AE} = \frac{a \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{a \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$ . Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a \sqrt{4b^2 - a^2} \frac{a \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{a^2 \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{12}.$$

Задача имеет решение при  $\begin{cases} 4b^2 - 2a^2 > 0 \\ 4b^2 - a^2 > 0 \end{cases}$ , т.е. при  $0 < a < b\sqrt{2}$ .

Ответ:  $\frac{a^2 \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{12}; 0 < a < b\sqrt{2}$ .

**11.163.** В наклонной треугольной призме расстояния боковых ребер друг от друга равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Боковое ребро равно  $l$ , высота призмы  $h$ . Определить полную поверхность призмы.

*Решение.*

Полная поверхность призмы  $S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$ . Так как  $a, b, c$  — расстояния между боковыми ребрами призмы, то  $a + b + c$  — периметр сечения, перпендикулярного ребру.

Следовательно,  $S_{\text{бок}} = (a + b + c)l = 2pl$ , где  $p = (a + b + c)/2$ . По формуле Герона находим  $S_{\text{сеч}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

Далее, учитывая, что  $V = S_{\text{сеч}}l = S_{\text{осн}}h$ , имеем  $S_{\text{осн}} = S_{\text{сеч}}l/h$ . Окончательно получим  $S_{\text{полн}} = \frac{2l}{h} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} + 2pl$ .

*Ответ:*  $\frac{2l}{h} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} + 2pl$ .

**11.164.** Сторона основания правильной треугольной призмы меньше бокового ребра и равна  $a$ . Через сторону верхнего основания проведена плоскость, которая составляет с плоскостью основания угол  $45^\circ$  и делит призму на две части. Определить объем и полную поверхность верхней части призмы.

*Решение.*

В правильной призме  $ABC A_1 B_1 C_1$   $B_1 C_1 = a$ ,  $B_1 C_1 < AA_1$ ,  $E$  — точка пересечения плоскости, проходящей через сторону  $B_1 C_1$  верхнего основания, и прямой  $AA_1$  (рис. 11.58). Пусть  $K$  — середина  $B_1 C_1$ . Тогда

$A_1 K \perp B_1 C_1$ ;  $A_1 K = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .  $A_1 K$  является проекцией отрезка  $EK$  на плоскость  $A_1 B_1 C_1$ . Тогда  $EK \perp B_1 C_1$ ,  $\angle A_1 K E$  — угол между секущей плоскостью  $B_1 E C_1$  и плоскостью  $A_1 B_1 C_1$ ,  $\angle A K E = 45^\circ$ .

Значит,  $A_1 E = A_1 K = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , и так как  $B_1 C_1 < AA_1$ , то  $A_1 E < AA_1$ , т.е. точка  $E$  принадлежит отрезку  $AA_1$ . Следовательно, верхняя часть призмы, о которой говорится в условии задачи, — пирамида с основанием  $A_1 B_1 C_1$  и

высотой  $EA_1$ , объем которой  $V = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1 B_1 C_1} \cdot EA_1 = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{8}$ ,

$S_{\Delta EA_1 C_1} = S_{\Delta EA_1 B_1} = \frac{1}{2} EA_1 \cdot A_1 C_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ .  $\Delta A_1 B_1 C_1$  — проекция  $\Delta EB_1 C_1$  на

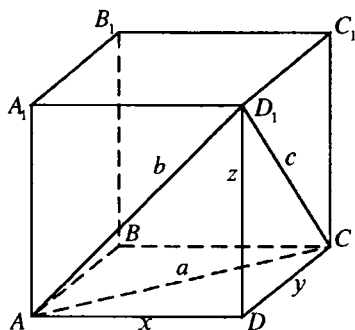


Рис. 11.59

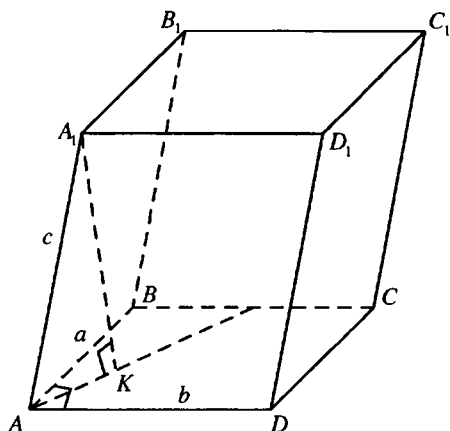


Рис. 11.60

плоскость  $A_1B_1C_1$ . Тогда  $S_{\Delta EB_1C_1} = \frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{\cos \angle A_1KE} = \frac{a^2 \sqrt{6}}{4}$ . Полная поверхность пирамиды  $EA_1B_1C_1$ :

$$S = 2S_{\Delta EA_1C_1} + S_{\Delta EB_1C_1} + S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{2a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{a^2 \sqrt{6}}{4} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}(3 + \sqrt{2})}{4}.$$

Ответ:  $\frac{a^3}{8}; \frac{a^2 \sqrt{3}(3 + \sqrt{2})}{4}$ .

**11.165.** Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны  $a, b$  и  $c$ . Определить его полную поверхность.

*Решение.*

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 11.59)  $AC = a$ ,  $AD_1 = b$ ,  $CD_1 = c$ . Введем неизвестные  $AD = x$ ,  $CD = y$ ,

$$DD_1 = z. \text{ Рассмотрим систему уравнений: } \begin{cases} a^2 = x^2 + y^2; \\ b^2 = x^2 + z^2; \\ c^2 = y^2 + z^2; \end{cases} \text{ Сложив по-}$$

членно уравнения системы получим:  $a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$ , отсюда  $a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + z^2)$ ;  $a^2 + b^2 + c^2 = 2(b^2 + z^2)$ ;  $a^2 + b^2 + c^2 = 2(c^2 + x^2)$ .

$$\text{Следовательно, } x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}; y = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}; z = \sqrt{\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}}.$$

Полная поверхность параллелепипеда:

$$S = 2(xy + xz + yz) = \sqrt{a^4 - (b^2 - c^2)^2} + \sqrt{b^4 - (a^2 - c^2)^2} + \sqrt{c^4 - (a^2 - b^2)^2}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{a^4 - (b^2 - c^2)^2} + \sqrt{b^4 - (a^2 - c^2)^2} + \sqrt{c^4 - (a^2 - b^2)^2}.$$

**11.166.** Длины ребер параллелепипеда равны  $a, b$  и  $c$ . Ребра, длины которых равны  $a$  и  $b$ , взаимно перпендикулярны, а ребро с длиной  $c$  образует с каждым из них угол  $60^\circ$ . Определить объем параллелепипеда.

*Решение.*

В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 11.60)  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $\angle BAD = 90^\circ$ ,  $AA_1 = c$ ,  $\angle A_1 AB = \angle A_1 AD = 60^\circ$ ,  $A_1 K$  — высота. Так как  $\angle A_1 AB = \angle A_1 AD$ , то  $AK$  — биссектриса  $\angle BAD$ .  $AA_1$  — наклонная к плоскости основания,  $AK$  — ее проекция,  $AD$  — прямая, лежащая в этой плоскости. Тогда  $\cos \angle A_1 AD = \cos \angle A_1 AK \cdot \cos \angle KAD$ ;

$$\cos \angle A_1 AK = \frac{\cos \angle A_1 AD}{\cos \angle KAD} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит,  $\angle A_1 AK = 45^\circ$ ,  $\triangle K A K_1$  — прямоугольный и равнобедренный и

$$A_1 K = \frac{AA_1 \sqrt{2}}{2} = \frac{c \sqrt{2}}{2}. \text{ Объем параллелепипеда } V = S_{ABCD} \cdot A_1 K = \frac{abc \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{abc \sqrt{2}}{2}.$$

**11.167.** Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм с углом  $120^\circ$  и сторонами 3 и 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найти объем параллелепипеда.

*Решение.*

В прямом параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 11.61)  $AB = 3$  см,  $AD = 4$  см,  $\angle ABC = 120^\circ$ . Тогда  $AC$  — большая диагональ основания,  $B_1 D$  — меньшая диагональ параллелепипеда,  $B_1 D = AC$ . Площадь основания  $ABCD$ :  $S = AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = 6\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>. Из  $\triangle ABC$ :

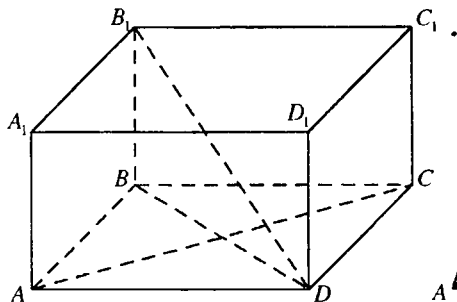


Рис. 11.61

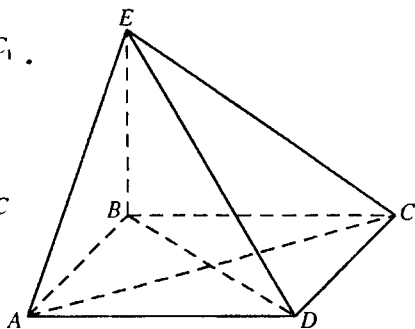


Рис. 11.62

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC = 9 + 16 - 24 \cos 120^\circ = 37$  (см). Из  $\triangle BAD$ :  $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD = 9 + 16 - 24 \cos 60^\circ = 13$  (см).

Из  $\triangle B_1BD$  ( $\angle B_1BD = 90^\circ$ ):  $BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$  (см).

Объем параллелепипеда  $V = S \cdot BB_1 = 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 36\sqrt{2}$  (см<sup>3</sup>).

Ответ:  $36\sqrt{2}$  (см<sup>3</sup>).

**11.168.** Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна  $S$ . Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Найти объем пирамиды.

Решение.

По условию основание пирамиды  $EABCD$  — прямоугольник  $ABCD$ , боковые грани  $ABE$  и  $CBE$  перпендикулярны плоскости основания (рис. 11.62). Тогда их общее ребро  $EB$  перпендикулярно плоскости основания и является высотой пирамиды.  $BA$  — проекция  $EA$  на плоскость основания,  $BA \perp AD$ . Тогда  $EA \perp AD$  и, следовательно,  $\angle EAB$  — угол наклона боковой грани  $EAD$  к плоскости основания,  $\angle EAB = 60^\circ$ . Аналогично  $\angle ECB = 30^\circ$ .

Пусть  $EB = H$ . Из  $\triangle ABE$  ( $\angle ABE = 90^\circ$ ):  $AB = BE \operatorname{ctg} \angle EAB = \frac{H\sqrt{3}}{3}$ .

Из  $\triangle CBE$  ( $\angle CBE = 90^\circ$ ):  $BC = BE \operatorname{ctg} \angle ECB = H\sqrt{3}$ .

Так как  $AB \cdot BC = S$ , то  $\frac{H\sqrt{3}}{3} \cdot H\sqrt{3} = S$ ,  $H = \sqrt{S}$ . Объем параллеле-

пипеда  $V = \frac{1}{3} SH = \frac{S\sqrt{S}}{3}$ .

Ответ:  $\frac{S\sqrt{S}}{3}$ .

**11.169.** Через вершину основания и середины двух боковых ребер правильной треугольной пирамиды проведена плоскость. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади ее основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна боковой грани.

*Решение.*

Пусть  $KO$  — высота правильной пирамиды  $KABC$  (рис. 11.63),  $M$  — середина  $AK$ ,  $N$  — середина  $CK$ , плоскость  $MBN$  перпендикулярна плоскости  $AKC$ .  $BM$  и  $BN$  — медианы равных равнобедренных  $\triangle AKB$  и  $\triangle CKB$ , проведенные к их боковым сторонам. Следовательно,  $BM=BN$ .  $Q$  — точка пересечения средней линии  $MN$  и медианы  $KE$  треугольника  $AKC$ . Следовательно,  $Q$  — середина  $KE$  и  $MN$ , и так как  $BM=BN$ , то  $BQ$  — высота и медиана  $\triangle MBN$ . Так как плоскости  $MBN$  и  $AKC$  перпендикулярны, то отрезок  $BQ$  перпендикулярен плоскости  $AKC$  и, следовательно,  $BQ \perp KE$ . Итак, мы имеем:  $BQ$  — медиана и высота  $\triangle KBE$ . Отсюда следует, что  $BK = BE$ . Пусть  $BK = BE = 1$ . Тогда

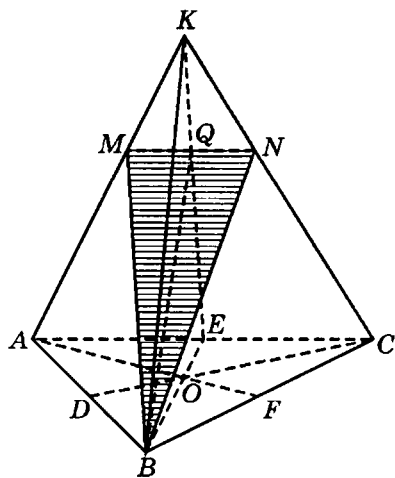


Рис. 11.63

$BO = \frac{2}{3}$ ,  $OE = \frac{1}{3}$ . Из прямоугольного треугольника  $BOK$  ( $\angle BOK = 90^\circ$ ):

$$KO^2 = BK^2 - BO^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}; \text{ далее из } \triangle EOK (\angle EOK = 90^\circ) \text{ находим}$$

$$KE = \sqrt{KO^2 + OE^2} = \sqrt{\frac{5}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \text{ Так как пирамида правильная, то}$$

$$S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \angle KEO}. \text{ Тогда}$$

$$\frac{S_6}{S_{\text{осн}}} = \frac{1}{\cos \angle KEO} = \frac{KE}{EO} = \frac{\sqrt{6}}{3} : \frac{1}{3} = \sqrt{6}.$$

Ответ:  $\sqrt{6}$ .



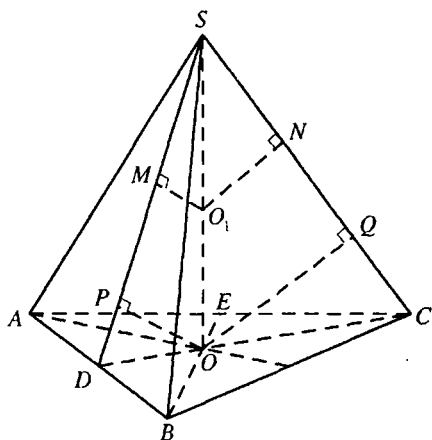


Рис. 11.64

**11.170.** Из середины высоты правильной треугольной пирамиды опущены перпендикуляры на боковое ребро и на боковую грань. Длины этих перпендикуляров равны соответственно  $a$  и  $b$ . Найти объем пирамиды. При всяких ли  $a$  и  $b$  задача имеет решение?

*Решение.*

Пусть  $O_1$  — середина высоты  $SO$  правильной пирамиды  $SABC$  (рис. 11.63),  $SD$  — апофема боковой грани  $ASB$ .  $O_1N$  и  $O_1M$  — перпендикуляры, опущенные соответственно на  $SC$  и  $SD$ ,  $O_1N = a$ .

Так как пирамида  $SABC$  правильная, то плоскости  $ASB$  и  $SDO$  перпендикулярны и, следовательно, отрезок  $O_1M$  перпендикулярен плоскости  $ASB$ ,  $O_1M = b$ . Опустим перпендикуляры  $OQ$  и  $OP$  на  $SC$  и  $SD$  соответственно. Тогда, так как  $OP \parallel O_1M$ ,  $OQ \parallel O_1N$ ,  $O_1$  — середина  $SO$ , то  $OP = 2 \cdot O_1M = 2b$ ,  $OQ = 2 \cdot O_1N = 2a$ . Пусть  $\angle SCO = \alpha$ ,  $\angle SDO = \beta$ ,  $SO = H$ .

Тогда из  $\triangle OPD$  ( $\angle OPD = 90^\circ$ )  $OD = \frac{2b}{\sin \beta}$ , из  $\triangle OQC$

( $\angle OQC = 90^\circ$ )  $OC = \frac{2a}{\sin \alpha}$ . Так как  $OC = 2 \cdot OD$ , то  $\frac{2a}{\sin \alpha} = 2 \cdot \frac{2b}{\sin \beta}$ ;

$\sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{2b}$ . Пусть  $OP$  — высота прямоугольного  $\triangle SOD$ , опущенная на гипотенузу.

Тогда  $\angle SOP = \angle SDO = \beta$ . Аналогично  $\angle SOQ = \angle SCO = \alpha$ . Из

$$\triangle SPO \quad (\angle SPO = 90^\circ): H = \frac{OP}{\cos \angle SOP} = \frac{2b}{\cos \beta}.$$

$$\text{Из } \triangle SQO \quad (\angle SQO = 90^\circ): H = \frac{OQ}{\cos \angle SOQ} = \frac{2a}{\cos \alpha}.$$

Тогда  $\frac{2b}{\cos\beta} = \frac{2a}{\cos\alpha}$ ;  $\cos\alpha = \frac{a\cos\beta}{b}$ . Так как  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ , то

$$\frac{a^2 \sin^2\beta}{4b^2} + \frac{a^2 \cos^2\beta}{b^2} = 1; \quad \frac{a^2}{b^2} \left( \frac{1}{4} \sin^2\beta + \cos^2\beta \right) = 1; \quad \frac{1}{4} \sin^2\beta + 1 - \sin^2\beta = \frac{b^2}{a^2};$$

$$\frac{3}{4} \sin^2\beta = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad \sin\beta = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{3}}; \quad \cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{4(a^2 - b^2)}{3a^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{a\sqrt{3}}. \text{ Тогда } H = \frac{2b}{\cos\beta} = \frac{2ab\sqrt{3}}{\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

Площадь основания

$$S = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{3} \cdot DO)^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \cdot DO^2 = 3\sqrt{3} \cdot \left( \frac{2b}{\sin\beta} \right)^2 = 3\sqrt{3} \cdot \frac{12a^2 b^2}{4(a^2 - b^2)} =$$

$$= \frac{9a^2 b^2 \sqrt{3}}{a^2 - b^2}.$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{9a^2 b^2 \sqrt{3}}{a^2 - b^2} \cdot \frac{2ab\sqrt{3}}{\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{18a^3 b^3}{(a^2 - b^2)\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

Задача имеет решение при  $\begin{cases} a^2 - b^2 > 0; \\ 4b^2 - a^2 > 0, \end{cases}$  то есть при  $b < a < 2b$ .

Ответ:  $\frac{18a^3 b^3}{(a^2 - b^2)\sqrt{4b^2 - a^2}}$ ;  $b < a < 2b$ .

**11.171.** В полушар радиуса  $R$  вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на его сферической поверхности. Вычислить объем куба.

*Решение.*

Рассмотрим сечение указанных полушара и куба плоско-

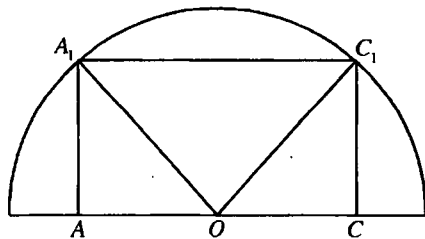


Рис. 11.65

стью, проходящей через противоположные боковые ребра  $AA_1$  и  $CC_1$  куба (рис. 11.65),  $O$  — центр полушара и принадлежит диагонали  $AC$  основания куба. Пусть ребро куба  $AA_1 = x$ . Тогда  $OA = \frac{x\sqrt{2}}{2}$  и из

$$\triangle A_1AO (\angle A_1AO = 90^\circ): OA_1 = \sqrt{AA_1^2 + OA^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{2}} = x\sqrt{\frac{3}{2}}. \text{ Так как}$$

$$OA_1 = R, \text{ то } x\sqrt{\frac{3}{2}} = R; x = R\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ и объем куба } V = x^3 = \frac{2}{3}R^3\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2R^3\sqrt{6}}{9}.$$

Ответ:  $\frac{2R^3\sqrt{6}}{9}$ .

**11.172.** Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен  $30^\circ$ . Боковая поверхность конуса равна  $3\pi\sqrt{3}$  кв. ед. Определить объем правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус.

*Решение.*

Правильный шестиугольник  $ABCDEF$  — основание правильной пирамиды, вписанной в конус с высотой  $MO$  (рис. 11.66). Тогда  $\angle MEO$  — угол между образующей конуса и плоскостью основания,  $\angle MEO = 30^\circ$ . Пусть  $EO = R$ ,  $ME = l$ .

$$\text{Тогда из } \triangle MOE (\angle MOE = 90^\circ) l = ME = \frac{OE}{\cos \angle MEO} = \frac{R}{\cos 30^\circ} = \frac{2R}{\sqrt{3}}; OM = OE \operatorname{tg} \angle MEO = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Боковая поверхность конуса } S_6 = \pi Rl = 3\pi\sqrt{3}.$$

$$\text{Тогда } R \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}; R^2 = \frac{9}{2}; R = \frac{3}{\sqrt{2}}. \text{ Площадь основания пирамиды}$$

$$S = 6S_{\triangle EOF} = 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ (кв. ед.); } OM = \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3}S \cdot OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{27}{4\sqrt{2}} = \frac{27\sqrt{2}}{8} \text{ (куб. ед.)}$$

Ответ:  $\frac{27\sqrt{2}}{8}$  куб. ед.

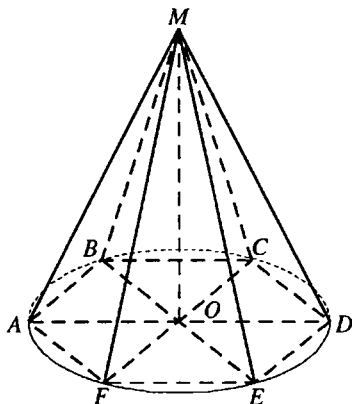


Рис. 11.66

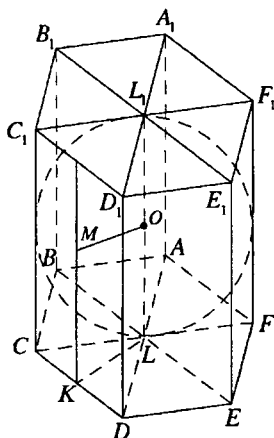


Рис. 11.67

**11.173.** Около шара радиуса  $R$  описана правильная шестиугольная призма. Определить ее полную поверхность.

*Решение.*

Правильный шестиугольник  $ABCDEF$  — основание правильной призмы, описанной около шара с центром  $O$  (рис. 11.66). Точка  $O$  — середина оси  $LL_1$  призмы,  $LL_1 = 2R$ .  $M$  — точка касания шара с гранью  $CC_1D_1D$  призмы,  $K$  — середина  $CD$ . Тогда  $OM$  и  $LK$  перпендикулярны грани  $CC_1D_1D$  и, следовательно,  $OM \parallel LK$ , а так как  $LO$  параллельна грани  $CC_1D_1D$ , то  $LK = OM = R$ .  $LK$  — высота равностороннего  $\triangle CLD$ .

$$\text{Тогда } CD = \frac{2LK\sqrt{3}}{3} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}, S_{\triangle CLD} = \frac{CD^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4R^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\sqrt{3}}{3}.$$

Площадь основания призмы  $S_{\text{осн}} = 6S_{\triangle CLD} = 2R^2\sqrt{3}$ , периметр основания

$$P_{\text{осн}} = 6CD = 4R\sqrt{3}, \text{ боковая поверхность призмы } S_6 = P_{\text{осн}} \cdot LL_1 = 8R^2\sqrt{3}.$$

$$\text{Полная поверхность призмы } S = 2S_{\text{осн}} + S_6 = 12R^2\sqrt{3}.$$

*Ответ:*  $12R^2\sqrt{3}$ .

**11.174.** В шар радиуса  $R$  вписана правильная шестиугольная усеченная пирамида, у которой плоскость нижнего основания проходит

через центр шара, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Определить объем пирамиды.

*Решение.*

По условию,  $\angle OAA_1 = 60^\circ$  (рис. 11.68); значит,  $\angle O_1OA_1 = 30^\circ$  и

$$A_1O_1 = \frac{1}{2} A_1O = \frac{R}{2}, \quad OO_1 = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Находим } S_{\text{нижн.осн}} = 6 \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\text{верхн.осн}} = \frac{1}{4} S_{\text{нижн.осн}} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{8}.$$

$$\text{Получаем, что } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \left( \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3R^2\sqrt{3}}{8} + \sqrt{\frac{9R^4 \cdot 3}{16}} \right) = \frac{21R^3}{16}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{21R^3}{16}.$$

**11.175.** Около шара описан прямой параллелепипед, у которого диагонали основания равны  $a$  и  $b$ . Определить полную поверхность параллелепипеда.

*Решение.*

Пусть радиус шара равен  $R$ . В сечении шара плоскостью, проходящей через его центр и параллельной основанию параллелепипеда, получим параллелограмм, описанный около окружности радиуса  $R$ . Поскольку суммы противоположных сторон такого описанного параллелограмма равны, он представляет собой ромб. Пусть сторона ромба равна  $m$ ; тогда искомая полная поверхность  $S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2m \cdot 2R + 4m \cdot 2R = 6m \cdot 2R = 6S_{\text{осн}}$ .

Но  $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}ab$  и окончательно получим  $S = 3ab$ .

$$\text{Ответ: } 3ab.$$

**11.176.** В шар радиуса  $R$  вписана правильная четырехугольная пирамида. Определить объем этой пирамиды, если радиус окружности, описанной около ее основания, равен  $r$ .

*Решение.*

Пусть  $EO$  — высота правильной пирамиды  $EABCD$ , вписанной в шар радиуса  $R$  (рис. 11.69),  $OC = r$ . Точки  $A$ ,  $E$ ,  $C$  принадлежат поверхности шара. Следовательно,  $R$  — радиус круга, описанного

$$\text{около } \triangle AEC. \text{ Тогда } R = \frac{AE \cdot EC \cdot AC}{4S_{\triangle AEC}} = \frac{EC^2 \cdot AC}{4 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot EO} = \frac{EC^2}{2EO}. \text{ Пусть}$$

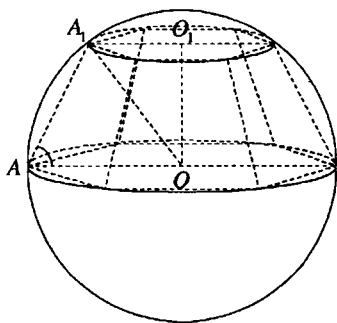


Рис. 11.68

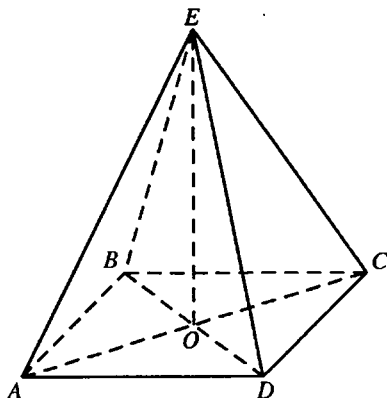


Рис. 11.69

$EO = H$ . Тогда из  $\triangle EOC$ :  $EC^2 = H^2 + r^2$ . Значит,  $\frac{H^2 + r^2}{2H} = R$ ;  
 $H^2 - 2HR + r^2 = 0$ ;  $H = R + \sqrt{R^2 - r^2}$  или  $H = R - \sqrt{R^2 - r^2}$ .

Площадь основания пирамиды  $S = \frac{1}{2}AC^2 = 2r^2$ , а ее объем

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{2r^2 \left( R \pm \sqrt{R^2 - r^2} \right)}{3}.$$

Ответ:  $\frac{2r^2 \left( R \pm \sqrt{R^2 - r^2} \right)}{3}.$

**11.177.** Конус образован вращением прямоугольного треугольника площадью  $S$  вокруг одного из катетов. Найти объем конуса, если длина окружности, описанной при вращении этого треугольника точкой пересечения его медиан, равна  $L$ .

*Решение.*

Искомый объем  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ . Пусть конус образован вращением  $\triangle ABC$  вокруг катета  $BC$  (рис. 11.70); тогда  $AC = r$ ,  $BC = h$ . По условию

$\frac{1}{2}rh = S$ ; тогда  $V = \frac{2}{3}\pi rS$ . Далее, по условию,  $2\pi \cdot DN = L$ , где  $D$  —

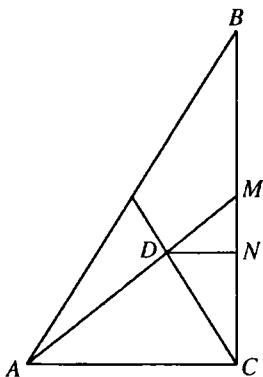


Рис. 11.70

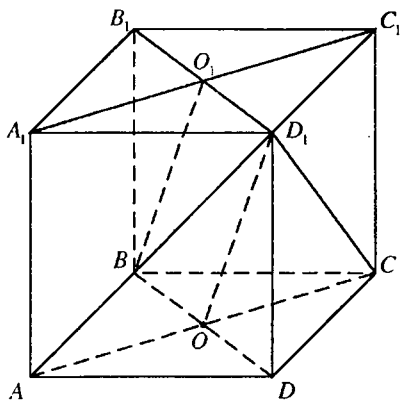


Рис. 11.71

точка пересечения медиан,  $DN \perp BC$ . Но  $DN : AC = DM : AM = 1 : 3$ ,  $\Rightarrow$

$$DN = \frac{r}{3}; \text{ следовательно, } \frac{2}{3}\pi r = L, r = \frac{3L}{2\pi}. \text{ Имеем } V = \frac{2}{3}\pi S \cdot \frac{3L}{2\pi} = SL.$$

*Ответ:*  $SL$ .

**11.178.** Треугольник со сторонами, равными  $a$ ,  $b$  и  $c$ , вращается поочередно вокруг каждой из своих сторон. Найти отношение объемов полученных при этом фигур.

*Решение.*

Пусть объемы тел вращения вокруг сторон  $a$ ,  $b$ ,  $c$  равны  $V_a$ ,  $V_b$ ,

$V_c$ ; тогда  $V_a = \frac{1}{3}\pi h_a^2 a$ ,  $V_b = \frac{2}{3}\pi h_b^2 b$ ,  $V_c = \frac{1}{3}\pi h_c^2 c$ , где  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$  — соответствующие высоты.

Учитывая, что  $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$ , имеем  $V_a = \frac{2}{3}\pi S h_a$ ,  $V_b = \frac{2}{3}\pi S h_b$ ,

$$V_c = \frac{2}{3}\pi S h_c \text{ или } V_a = \frac{4}{3}\pi S^2 \cdot \frac{1}{a}, V_b = \frac{4}{3}\pi S^2 \cdot \frac{1}{b}, V_c = \frac{4}{3}\pi S^2 \cdot \frac{1}{c}. \text{ Оконча-}$$

тельно  $V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ .

*Ответ:*  $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ .

**11.179.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , ребро которого равно  $a$ . Через диагональ  $AC$  его грани  $ABCD$  проведена плоскость, параллельная

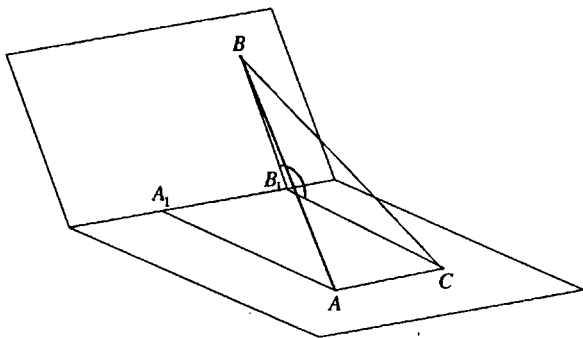


Рис. 11.72

прямой  $BO_1$ , где  $O_1$  — центр грани  $A_1B_1C_1D_1$ . Найти площадь полученного сечения.

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр квадрата  $ABCD$  (рис. 11.71). В четырехугольнике  $BO_1D_1O$   $BO \parallel O_1D_1$ ,  $BO = O_1D_1$ . Следовательно,  $BO_1D_1O$  — параллелограмм,  $OD_1 \parallel BO_1$ , и тогда прямая  $BO_1$  параллельна плоскости  $AD_1C$ , а треугольник  $AD_1C$  — сечение куба искомой площади. Из

$$\triangle ODD_1 (\angle ODD_1 = 90^\circ): OD_1 = \sqrt{OD^2 + DD_1^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{\triangle AD_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot OD_1 = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

*Ответ:*  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

**11.180.** На ребре двугранного угла  $120^\circ$  взят отрезок длиной  $c$ , и из его концов проведены перпендикуляры к нему, лежащие в различных гранях данного двугранного угла и имеющие длины  $a$  и  $b$ . Найти длину отрезка прямой, соединяющего концы этих перпендикуляров.

*Решение.*

Пусть прямая  $A_1B_1$  — ребро данного двугранного угла (рис. 11.72),  $A_1B_1 = c$ ,  $AA_1 \perp A_1B_1$ ,  $BB_1 \perp A_1B_1$ ,  $AA_1 = a$ ,  $BB_1 = b$ . В плоскости  $AA_1B_1$  проведем перпендикуляр  $B_1C$  к  $A_1B_1$ ,  $B_1C = A_1A$ . Тогда  $\angle BB_1C$  —



линейный угол данного двугранного угла,  $\angle BB_1C = 120^\circ$ ,  $AC \parallel A_1B_1$ ,  $AC = A_1B_1 = c$ . Так как  $A_1B_1$  — перпендикуляр к плоскости  $BB_1C_1$ , то  $A_1B_1 \perp BC$ .  $A_1B_1 \parallel AC$ . Тогда  $AC \perp BC$ . Из  $\triangle BB_1C$ :  $BC^2 = BB_1^2 + B_1C^2 - 2BB_1 \cdot B_1C \cdot \cos \angle BB_1C = b^2 + a^2 - 2ab \cos 120^\circ = a^2 + ab + b^2$ .

Из  $\triangle BCA$  ( $\angle BCA = 90^\circ$ ):  $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab}$ .

Ответ:  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab}$ .

**11.181.** Полная поверхность конуса равна  $\pi S$  кв. ед. Развернутая на плоскости боковая поверхность конуса представляет собой сектор с углом  $60^\circ$ . Определить объем конуса.

*Решение.*

Пусть  $R$  — радиус основания конуса,  $l$  — его образующая,  $H$  — высота. Развертка боковой поверхности конуса — сектор круга радиуса  $l$  с центральным углом  $60^\circ$ , длина дуги которого  $2\pi R$ . Тогда

$$2\pi R = \frac{1}{6} \cdot 2\pi l; \quad l = 6R. \quad H = \sqrt{l^2 - R^2} = R\sqrt{35}.$$

Полная поверхность конуса  $\pi S = \pi Rl + \pi R^2$ . Следовательно,  $S = R \cdot 6R + R^2 = 7R^2$ ,  $R = \sqrt{\frac{S}{7}}$ ,

$$H = \sqrt{\frac{S}{7}} \cdot \sqrt{35} = \sqrt{5S}. \quad \text{Объем конуса } V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi \frac{S}{7} \sqrt{5S} = \frac{\pi S \sqrt{5S}}{21}.$$

Ответ:  $\frac{\pi S \sqrt{5S}}{21}$ .

**11.182.** Радиус основания конуса равен  $R$ , а боковая поверхность равна сумме площадей основания и осевого сечения. Определить объем конуса.

*Решение.*

Пусть  $H$  — высота,  $l$  — образующая конуса. Тогда  $l = \sqrt{H^2 + R^2}$ , площадь осевого сечения  $S_1 = RH$ , площадь основания  $S_2 = \pi R^2$ , боковая поверхность  $S_3 = \pi Rl = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$ . По условию  $S_3 = S_1 + S_2$ .

$$\text{Тогда } \pi R \sqrt{H^2 + R^2} = RH + \pi R^2; \quad \pi \sqrt{H^2 + R^2} = H + \pi R;$$

$$\pi^2(H^2 + R^2) = H^2 + 2\pi RH + \pi^2 R^2; \pi^2 H^2 = H^2 + 2\pi RH; (\pi^2 - 1)H = 2\pi R;$$

$$H = \frac{2\pi R}{\pi^2 - 1}. \text{ Объем конуса } V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{2\pi R}{\pi^2 - 1} = \frac{2\pi^2 R^3}{3(\pi^2 - 1)}.$$

Ответ:  $\frac{2\pi^2 R^3}{3(\pi^2 - 1)}$ .

**11.183.** Около шара описана правильная треугольная призма, а около нее описан шар. Найти отношение поверхностей этих шаров.

*Решение.*

Пусть  $r$  и  $R$  — радиусы вписанного и описанного шаров (рис. 11.73); тогда  $BD = 3r$ ,  $AD^2 + BD^2 = AB^2 = 4AD^2$ ,  $BD^2 = 3AD^2$ ,  $AD^2 = 3r^2$ .

Из  $\triangle AKD$  находим, что

$$KA^2 = KD^2 + AD^2 = r^2 + 3r^2 = 4r^2, \text{ а}$$

из  $\triangle OKA$  — что  $OA^2 = OK^2 + KA^2 = r^2 + 4r^2 = 5r^2 = R^2$ . Обозначив поверхности вписанного и описанного шаров через  $s$  и  $S$ , имеем  $s = 4\pi r^2$ ,  $S = 4\pi R^2$ , тогда  $S : s = R^2 : r^2 = 5 : 1$ .

Ответ: 5:1.

**11.184.** Даны цилиндр и шар. Радиусы основания цилиндра и большого круга шара равны. Полная поверхность цилиндра относится к поверхности шара как  $m : n$ . Найти отношение их объемов.

*Решение.*

Пусть  $R$  — радиус основания цилиндра и радиус шара,  $H$  — высота,  $S_1$  — полная поверхность,  $V_1$  — объем цилиндра,  $S_2$  — поверхность,  $V_2$  — объем шара. Тогда

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi R^2 + 2\pi RH}{4\pi R^2} = \frac{R + H}{2R} = \frac{m}{n}.$$

Пусть  $R + H = m$ . Тогда  $2R = n$ ,  $R = \frac{n}{2}$  и  $H = m - R = \frac{2m - n}{2}$ . Следова-

$$\text{тельно, } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R^2 H}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3H}{4R} = \frac{3(2m - n)}{2} : 2n = \frac{6m - 3n}{4n}.$$

Ответ:  $\frac{6m - 3n}{4n}$ .

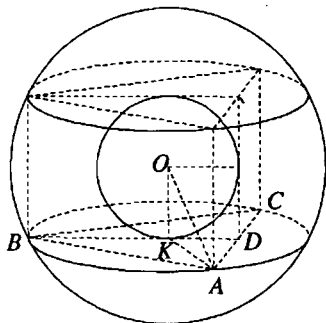


Рис. 11.73

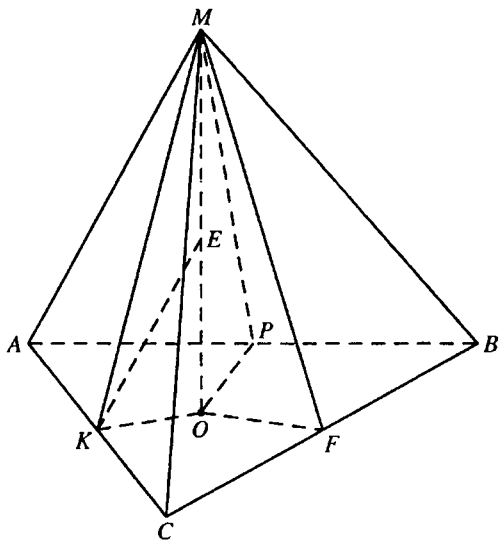


Рис. 11.74

**11.185.** Найти площадь поверхности шара, вписанного в пирамиду, в основании которой лежит треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см, если вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на 5 см.

*Решение.*

Пусть  $MO$  — высота пирамиды  $MABC$  (рис. 11.74),  $AC = 13$  см,  $BC = 14$  см,  $AB = 15$  см,  $MK \perp AC$ ,  $MP \perp AB$ ,  $MF \perp BC$ ,  $MK = MP = MF = 5$  см.

Тогда  $OK \perp AC$ ,  $OP \perp AB$ ,  $OF \perp BC$ ,  $OK = OP = OF$  и, следовательно, точка  $O$  — центр круга, вписанного в  $\triangle ABC$ , а  $OK = r$  — радиус этого круга. Полупериметр треугольника  $ABC$   $p = 21$ , его площадь

вычисляем по формуле Герона  $S_{\Delta} = 84$  см<sup>2</sup>,  $r = \frac{S_{\Delta}}{p} = 4$  см.

Из  $\triangle KOM$  ( $\angle KOM = 90^\circ$ ):  $MO = \sqrt{KM^2 - KO^2} = 3$  см.  $\angle MKO$ ,  $\angle MPO$ ,  $\angle MFO$  — линейные углы двугранных углов при ребрах основания, и так как  $\angle MKO = \angle MPO = \angle MFO$ , центр  $E$  шара, вписанного в пирамиду, принадлежит и высоте  $MO$ , а  $KE$  является биссектрисой  $\angle MKO$ . Пусть радиус шара  $EO = R$ . По свойству биссектрисы

треугольника из  $\triangle MKO$ :  $\frac{EO}{ME} = \frac{OK}{MK}$ ;  $\frac{R}{3-R} = \frac{4}{5}$ ;  $R = \frac{4}{3}$ . Площадь поверхности шара  $S = 4\pi R^2 = \frac{64\pi}{9}$  см<sup>2</sup>.

Ответ:  $\frac{64\pi}{9}$  см<sup>2</sup>.

**11.186.** Высота конуса равна  $h$ . Разверткой боковой поверхности этого конуса является сектор с центральным углом  $120^\circ$ . Вычислить объем конуса.

*Решение.*

Пусть  $R$  — радиус основания конуса,  $l$  — ее образующая. Длина дуги развертки боковой поверхности равна  $2\pi R$  или  $\frac{2\pi l}{3}$ . Тогда  $2\pi R = \frac{2}{3}\pi l$ ,  $l = 3R$ . Так как  $l^2 = R^2 + h^2$ , то  $9R^2 = R^2 + h^2$ ,  $R^2 = \frac{h^2}{8}$ .

Объем конуса  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{h^2}{8} \cdot h = \frac{\pi h^3}{24}$ .

Ответ:  $\frac{\pi h^3}{24}$ .

**11.187.** Вычислить поверхность шара, вписанного в треугольную пирамиду, все ребра которой равны  $a$ .

*Решение.*

Проведем плоскость через высоту пирамиды и апофему (рис. 11.75). Радиус круга в полученном сечении равен радиусу шара. Так как все ребра пирамиды равны  $a$ , то  $SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,

$OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ . Из  $\triangle SOD$  находим

$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ . Обозначим радиус шара через  $r$ , тогда  $SO_1 = SO - r$ .

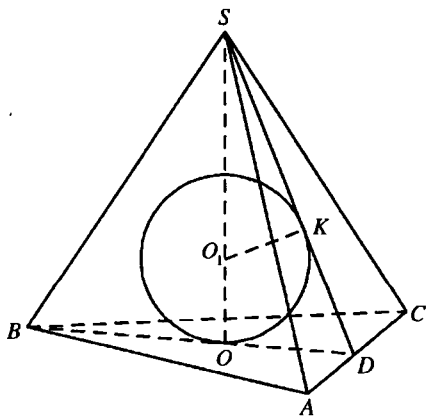


Рис. 11.75

В  $\Delta SKO_1$  имеем  $O_1K^2 = SO_1^2 - SK^2$  или  $r^2 = (SO - r)^2 - \frac{a^2}{3}$ , откуда

$$r^2 = \frac{2a^2}{3} - \frac{2ar\sqrt{6}}{3} + r^2 - \frac{a^2}{3}, \text{ т.е. } r = \frac{a}{2\sqrt{6}}.$$

Получили  $S_{\text{шара}} = 4\pi r^2 = \frac{\pi a^2}{6}$ .

Ответ:  $\frac{\pi a^2}{6}$ .

**11.188.** Определить боковую поверхность и объем усеченного конуса с образующей, равной  $l$ , описанного около шара радиуса  $r$ .

*Решение.*

Для нахождения боковой поверхности усеченного конуса воспользуемся формулой  $S_{\text{бок}} = \pi(r_1 + r_2)l$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы оснований усеченного конуса. Проведем плоскость через высоту конуса. В сечении получим равнобедренную трапецию, описанную около круга радиуса  $r$ , причем  $AD = 2r_2$ ,  $BC = 2r_1$  (рис. 11.76). Для описанного четырехугольника имеем  $BC + AD = AB + CD$ , т.е.  $2r_1 + 2r_2 = 2l$ , откуда

$$S_{\text{бок}} = \pi l^2. \text{ Объем усеченного конуса } V = \frac{1}{3} \pi H \left( (r_1 + r_2)^2 - r_1 r_2 \right), \text{ где}$$

$H = 2r$ ,  $r_1 + r_2 = l$ ,  $r_1 r_2 = r^2$ . Последнее соотношение получается из прямоугольного треугольника  $OCD$ , в котором  $OK^2 = CK \cdot KD$  ( $\angle COD = 90^\circ$ , поскольку  $OC$  и  $OD$  — биссектрисы углов трапеции и,

значит,  $\angle OCD + \angle CDO = 90^\circ$ ). Итак,  $V = \frac{2}{3} \pi r (l^2 - r^2)$ .

Ответ:  $\pi l^2$ ;  $\frac{2\pi r(l^2 - r^2)}{3}$ .

**11.189.** В цилиндрический сосуд, радиус основания которого  $R = 4$  см, помещен шар радиуса  $r = 3$  см. В сосуд наливается вода так, что ее свободная поверхность касается поверхности шара (шар при этом не всплывает). Определить толщину того слоя воды, который получится, если вынуть шар из сосуда.

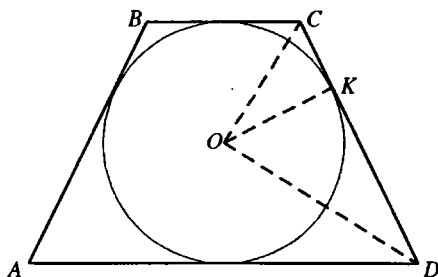


Рис. 11.76

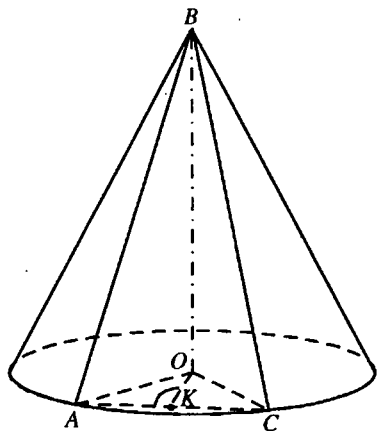


Рис. 11.77

*Решение.*

Пусть  $V_0$  — объем воды в сосуде, когда в него помещен шар,  $V_1$  — объем шара,  $V_2$  — объем жидкости в сосуде после того, как вынули шар,  $h$  — высота искомого слоя жидкости,  $H$  — высота слоя жидкости с шаром,  $V$  — объем воды и шара вместе.

$$H = 2r = 6 \text{ см}; V = \pi R^2 H = 96\pi \text{ см}^3; V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \text{ см}^3;$$

$$V_0 = V - V_1 = 60\pi \text{ см}^3; V_2 = \pi R^2 h.$$

$$\text{Так как } V_2 = V_0, \text{ то } h = \frac{V_0}{\pi R^2} = \frac{60\pi}{\pi R^2} = \frac{60\pi}{16\pi} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ (см)}.$$

*Ответ:* 3,75 см.

**11.190.** Радиус основания конуса равен  $R$ . Две взаимно перпендикулярные образующие делят площадь боковой поверхности конуса на части в отношении 1:2. Найти объем конуса.

*Решение.*

$BO$  — высота данного конуса,  $BA$  и  $BC$  — образующие, о которых говорится в условии задачи (рис. 11.77). Пусть  $BA = l$ . Так как  $BA = BC$  и  $\angle ABC = 90^\circ$ , то  $AC = l\sqrt{2}$ . Так как по условию образующие  $BA$  и  $BC$  делят площадь боковой поверхности конуса в отношении 1:2, то

длина дуги, опирающейся на  $AC$ , составляет  $1/3$  длины окружности основания и  $\angle AOC = 120^\circ$ . Пусть  $K$  — середина  $AC$ . Тогда  $AK = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ ,

$$\angle AOK = 60^\circ \text{ и } AK = OA \cdot \sin \angle AOK; \frac{l\sqrt{2}}{2} = R \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}; l = R\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Высота конуса  $H = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{\frac{3}{2}R^2 - R^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ . Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi R^3 \sqrt{2}}{6}.$$

Ответ:  $\frac{\pi R^3 \sqrt{2}}{6}$ .

**11.191.** Около шара описана правильная четырехугольная усеченная пирамида, у которой стороны оснований относятся как  $m : n$ . Определить отношение объемов пирамиды и шара.

*Решение.*

Рассмотрим равнобокую трапецию  $MM_1K_1K$  и вписанный в нее круг с центром  $E$  — сечение данной комбинации тел плоскостью, проходящей через середины противоположных сторон оснований усеченной пирамиды (рис. 11.78). Пусть  $MK = m$ ,  $r$  — радиус вписанного шара. Тогда  $M_1K_1 = n$ , высота усеченной пирамиды  $H = 2r$ , объем

усеченной пирамиды  $V_1 = \frac{2r}{3}(m^2 + n^2 + mn)$ , объем шара  $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$ .

$P$  — точка касания круга, вписанного в  $MM_1K_1K$  со стороной  $K_1K$ .

Тогда  $EP = r$ ,  $EP \perp K_1K$ , и так как  $\Delta K_1EK$  прямоугольный, то

$$r^2 = EP^2 = K_1P \cdot PK. \quad K_1P = K_1O_1 = \frac{n}{2}; \quad KP = KO = \frac{m}{2}. \quad \text{Тогда } r^2 = \frac{mn}{4}.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{2r}{3}(m^2 + n^2 + mn)}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{m^2 + n^2 + mn}{2\pi r^2} = \frac{m^2 + n^2 + mn}{2\pi \frac{mn}{4}} = \frac{2(m^2 + n^2 + mn)}{\pi mn}.$$

Ответ:  $\frac{2(m^2 + n^2 + mn)}{\pi mn}$ .

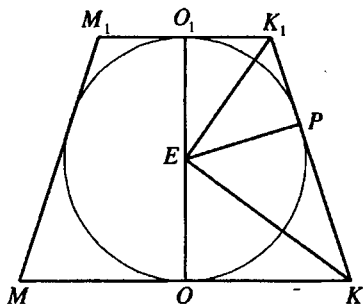


Рис. 11.78

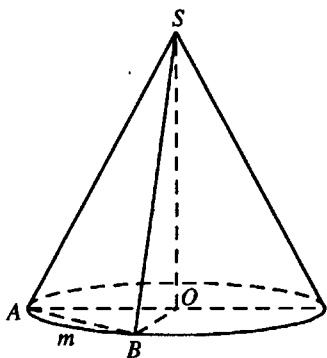


Рис. 11.79

**11.192.** Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которой равна радиусу этого основания. Определить отношение объемов полученных частей конуса.

*Решение.*

Пусть  $AO = r$ ,  $SO = h$  (рис. 11.79),  $V$  — объем конуса,  $V_1$  и  $V_2$  — объемы его частей. Найдем  $V_1$  как разность между объемами части конуса, основанием которой является сектор  $AOB$ , и пирамиды, в основании которой лежит  $\triangle AOB$ . Согласно условию,  $AB = r$ , т.е.  $AB$  — сторона правильного вписанного шестиугольника и, значит,

$$V_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h - \frac{1}{3} \cdot \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} h = \frac{1}{3} S_1 h, \text{ где } S_1 \text{ — площадь сегмента } AmB.$$

Тогда  $V_2 = V - V_1 = \frac{1}{3} S_2 h$ , где  $S_2 = \pi r^2 - S_1$ . Таким образом,  $V_1 : V_2 =$

$$= S_1 : S_2. \text{ Далее находим } S_1 = \frac{1}{6} \pi r^2 - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{r^2 (2\pi - 3\sqrt{3})}{12}, \quad S_2 = \pi r^2 -$$

$$- \frac{r^2 (2\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \frac{r^2 (10\pi + 3\sqrt{3})}{12} \Rightarrow V_1 : V_2 = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}.$$

*Ответ:*  $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}.$

**11.193.** Основание пирамиды есть прямоугольный треугольник. Боковые ребра пирамиды равны, а боковые грани, проходящие через



катеты, составляют с плоскостью основания углы  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Найти объем описанного около пирамиды конуса, если высота пирамиды равна  $h$ .

*Решение.*

Пусть  $DO$  — высота пирамиды  $DABC$  (рис. 11.80),  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $DO = h$ . Так как боковые ребра данной пирамиды равны, то  $O$  — центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , и так как  $\triangle ABC$  прямоугольный, то  $O$  — середина гипотенузы  $AB$ . Опустим перпендикуляры  $OF$  и  $OE$  соответственно на катеты  $AC$  и  $BC$  основания. Так как  $OF$  — проекция  $DF$  на плоскость основания,  $OE$  — проекция  $DE$ , то  $DF \perp AC$ ,  $DE \perp BC$ ,  $\angle DFO$  — угол наклона грани  $ADC$  к плоскости основания,  $\angle DFO = 60^\circ$ ,  $\angle DEO$  — угол наклона грани  $BDC$  к плоскости основания,  $\angle DEO = 30^\circ$

Из  $\triangle DOF$  ( $\angle DOF = 90^\circ$ ):  $OF = DO \operatorname{ctg} \angle DFO = h\sqrt{3}$ . Из  $\triangle DOE$

( $\angle DOE = 90^\circ$ ):  $OE = DO \operatorname{ctg} \angle DEO = \frac{h}{\sqrt{3}}$ . Радиус круга, описанного

около  $\triangle ABC$ ,  $R = OC = \sqrt{OF^2 + OE^2} = \sqrt{3h^2 + \frac{h^2}{3}} = h\sqrt{\frac{10}{3}}$ .

Объем конуса, описанного около данной пирамиды,

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{10h^2}{3} \cdot h = \frac{10\pi h^3}{9}.$$

Ответ:  $\frac{10\pi h^3}{9}$ .

**11.194.** Параллелограмм, периметр которого равен  $2p$ , вращается вокруг оси, перпендикулярной диагонали длиной  $d$  и проходящей через ее конец. Найти поверхность фигуры вращения.

*Решение.*

Поверхность  $S$  тела вращения состоит из боковых поверхностей двух усеченных конусов, полученных при вращении отрезков  $BC$  и  $CD$  (рис. 11.81), и двух конусов, полученных при вращении отрезков  $AB$  и  $AD$ .

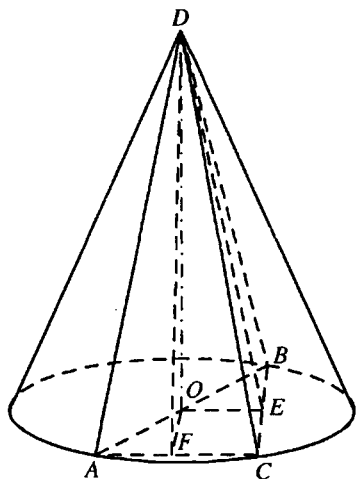


Рис. 11.80

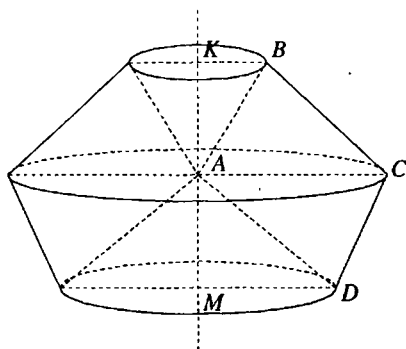


Рис. 11.81

Отсюда  $S = \pi(KB + AC)BC + \pi(MD + AC)CD + \pi KB \cdot AB + \pi MD \cdot AD$ .

Учитывая, что  $AD = BC$ ,  $CD = AD$  и  $KB + MD = AC$ , имеем

$$\begin{aligned} & \pi(KB \cdot BC + AC \cdot BC + MD \cdot AB + AC \cdot AB + KB \cdot AB + MD \cdot BC) = \\ & = \pi((KB + MD)BC + (KB + MD)AB + AC \cdot BC + AC \cdot AB) = \\ & = \pi(2BC + 2AB)AC. \end{aligned}$$

По условию  $AC = d$ ,  $2BC + 2AB = 2p$ , отсюда  $S = 2\pi dp$ .

*Ответ:*  $2\pi dp$ .

**11.195.** Радиус основания конуса равен  $R$ , а угол развертки его боковой поверхности равен  $90^\circ$ . Определить объем конуса.

*Решение.*

Пусть  $l$  — образующая конуса. Так как длина дуги развертки боковой поверхности конуса равна длине окружности основания, то

$$2\pi R = \frac{2\pi l}{4} \quad (\text{по условию развертка представляет собой четверть круга}),$$

откуда  $l = 4R$ .

Найдем высоту конуса:  $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{16R^2 - R^2} = R\sqrt{15}$ . Далее,

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\sqrt{15} = \frac{\pi R^3 \sqrt{15}}{3}.$$

*Ответ:*  $\frac{\pi R^3 \sqrt{15}}{3}$ .

## ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

### НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

1 Площадь параллелограмма  $ABCD$  (рис. 12.1) можно вычислить по следующим формулам:

$$S = \frac{AC^2 - BD^2}{4} \operatorname{tg} A; \quad (a)$$

$$S = \frac{AB^2 - AD^2}{2} \operatorname{tg} \angle AOD, \quad (б)$$

где  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ .

2. Пусть известны длины  $b$  и  $c$  двух сторон треугольника  $ABC$  и угол  $A$ , образуемый ими (рис. 12.2). Тогда длина биссектрисы  $AD$  треугольника, проведенной из вершины этого угла, выражается формулой

$$l_a = \frac{2bc \cos(A/2)}{b+c}.$$

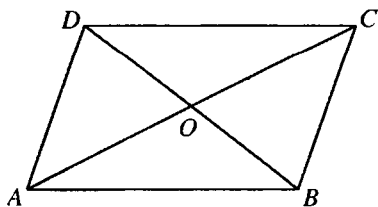


Рис 12.1

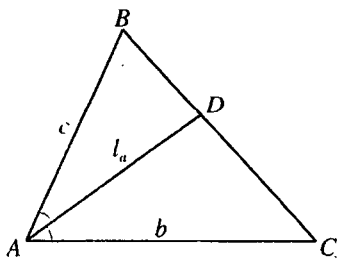


Рис 12.2

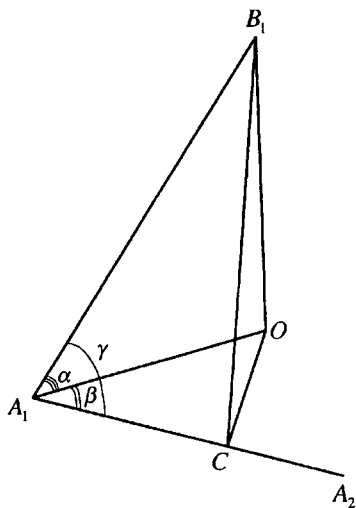


Рис 12.3

4. Пусть  $A_1B_1$  — боковое ребро пирамиды или призмы,  $A_1O$  — его проекция на плоскость основания,  $\angle B_1A_1O = \alpha$ ,  $\angle OA_1A_2 = \beta$ ,  $\angle B_1A_1A_2 = \gamma$  (рис. 12.3). Тогда справедливо равенство  $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$ .

Доказательство этих соотношений можно найти в любом издании данного сборника задач последних лет.

**12.131.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  высота  $AD = a$ , высота  $CE = b$ , острый угол между  $AD$  и  $CE$  равен  $\alpha$ . Найти  $AC$ .

*Решение.*

Так как  $\triangle ABC$  остроугольный, то точка  $O$  пересечения его высот находится внутри треугольника,  $\angle AOE = \alpha$  (рис. 12.4).

$\triangle AEO$  и  $\triangle ADB$  — прямоугольные с общим углом  $\angle DAB$ . Отсюда,  $\angle B = \angle AOE = \alpha$ .

$$\text{Из } \triangle CEB (\angle CEB = 90^\circ): CB = \frac{CE}{\sin \angle B} = \frac{b}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Из } \triangle ADB (\angle ADB = 90^\circ): AB = \frac{AD}{\sin \angle B} = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Из  $\triangle ABC$ :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B = \frac{a^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{b^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{2ab \cos \alpha}{\sin^2 \alpha};$$

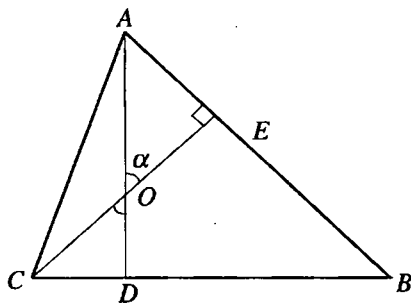


Рис. 12.4

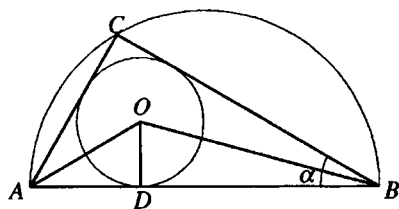


Рис. 12.5

$$AC = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}{\sin \alpha}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}{\sin \alpha}.$

12.132. Острый угол прямоугольного треугольника равен  $\alpha$ . Найти отношение радиуса вписанной в треугольник окружности к радиусу описанной окружности. При каком значении  $\alpha$  это отношение является наибольшим?

*Решение.*

В  $\triangle ABC$  (рис. 12.5)  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle B = \alpha$ ,  $O$  — центр вписанной окружности,  $D$  — точка ее касания с гипотенузой  $AB$ .

Пусть радиус вписанной окружности  $OD = r$ .

Тогда из  $\triangle BDO$  ( $\angle BDO = 90^\circ$ ):  $BD = OD \operatorname{ctg} \angle OBD = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

Из  $\triangle ADO$  ( $\angle ADO = 90^\circ$ ):  $AD = OD \operatorname{ctg} \angle OAD = r \operatorname{ctg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$

Радиус описанной окружности будет равен

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} (AD + BD) = \frac{1}{2} r \left( \operatorname{ctg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \frac{r}{2} \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{2\sqrt{2} \sin \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \frac{r}{R} = 2\sqrt{2} \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$2\sqrt{2} \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}(\cos(45^\circ - \alpha) - \cos 45^\circ) = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha) - 1.$$

Полученное отношение принимает наибольшее значение, когда  $\cos(45^\circ - \alpha) = 1$ , то есть, так как  $0 < \alpha < 90^\circ$ , при  $\alpha = 45^\circ$ .

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{2} \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2}; \alpha = 45^\circ.$$

**12.133.** Дуга  $AB$  сектора  $AOB$  содержит  $\alpha$  радианов. Через точку  $B$  и середину  $C$  радиуса  $OA$  проведена прямая. В каком отношении она делит площадь сектора?

*Решение.*

Обозначим радиус данного сектора через  $R$ .

$$\text{Площадь сектора } AOB \text{ (рис. 12.6)} \quad S = \frac{R^2 \alpha}{2}.$$

$$S_{\Delta BCO} = \frac{1}{2} OC \cdot OB \sin \angle BOC = \frac{R^2 \sin \alpha}{4}.$$

Площадь фигуры  $ABC$

$$S_1 = S - S_{\Delta BCO} = \frac{R^2 \alpha}{2} - \frac{R^2 \sin \alpha}{4} = \frac{R^2}{4} (2\alpha - \sin \alpha).$$

$$\text{Тогда } \frac{S_{\Delta BCO}}{S_1} = \frac{\sin \alpha}{2\alpha - \sin \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sin \alpha}{2\alpha - \sin \alpha}.$$

**12.134.** Основания равнобедренной трапеции равны  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ), угол при большем основании равен  $\alpha$ . Найти радиус окружности, описанной около трапеции.

*Решение.*

Пусть  $BL$  — высота данной трапеции  $ABCD$  (рис. 12.7),  $BC = b$ ,  $AD = a$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

$$\text{Тогда } AL = \frac{a-b}{2} \text{ и из } \Delta ALB (\angle ALB = 90^\circ):$$

$$AB = \frac{a-b}{2 \cos \alpha}.$$

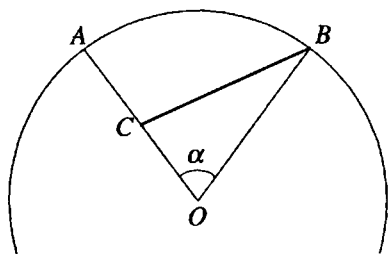


Рис. 12.6

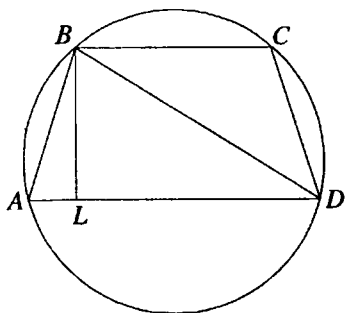


Рис. 12.7

Далее, из  $\triangle ABD$ :

$$\begin{aligned}
 BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle A = \frac{(a-b)^2}{4 \cos^2 \alpha} + a^2 - \frac{2a(a-b)}{2 \cos \alpha} \cdot \cos \alpha = \\
 &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4 \cos^2 \alpha} + a^2 - a^2 + ab = \frac{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab \cos \alpha}{4 \cos^2 \alpha} = \\
 &= \frac{a^2 + b^2 - 2ab(1 - 2 \cos^2 \alpha)}{4 \cos^2 \alpha} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\alpha}{4 \cos^2 \alpha}. \\
 BD &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\alpha}}{2 \cos \alpha}.
 \end{aligned}$$

Радиус окружности, описанной около  $\triangle BAD$ , будет равен

$$R = \frac{BD}{2 \sin \angle A} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\alpha}}{2 \sin 2\alpha}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\alpha}}{2 \sin 2\alpha}$ .

**12.135.** Найти отношение площади сектора с данным центральным углом  $\alpha$  радианов к площади вписанного в него круга.

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр данного сектора  $AOB$  (рис. 12.8), центр  $O_1$  вписанного в него круга принадлежит биссектрисе  $OK$  угла  $AOB$ .

Далее, пусть  $R$  — радиус сектора,  $r$  — радиус круга.

Тогда площадь сектора  $S_1 = \frac{\alpha R^2}{2}$ , площадь круга  $S_2 = \pi r^2$ .

$D$  — точка касания круга и радиуса  $OB$ .



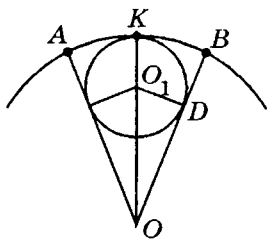


Рис. 12.8

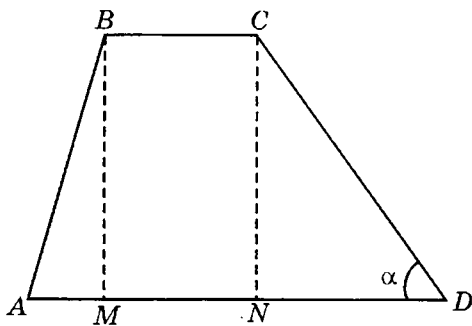


Рис. 12.9а

Тогда  $O_1D \perp OB$ ,  $O_1D = r$ .

$$\text{Из } \triangle O_1DO \left( \angle O_1DO = \frac{\pi}{2} \right): OO_1 = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$R = OK = OO_1 + O_1K = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} + r = \frac{r \left( 1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{r \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2r \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad S_1 = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot R^2 = \frac{4\alpha \cos^4 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right)}{2\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\alpha \cos^4 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right)}{\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: 
$$\frac{2\alpha \cos^4 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right)}{\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

**12.136.** Боковые стороны трапеции равны  $p$  и  $q$  ( $p < q$ ), большее основание равно  $a$ . Углы при большем основании относятся как 2:1.

Найти меньшее основание.

*Решение.*

Пусть  $BM$  и  $CN$  — высоты трапеции  $ABCD$  (рис. 12.9. а),

$AB = p$ ,  $CD = q$ ,  $AD = a$ .

Тогда  $\angle A : \angle D = 2 : 1$ ,  $MN = BC = x$ . Пусть  $\angle D = \alpha$ . Тогда  $\angle A = 2\alpha$ .

В  $\triangle AMB$  ( $\angle AMB = 90^\circ$ ):  $BM = p \sin 2\alpha$ ;  $AM = p \cos 2\alpha$ .

В  $\triangle DNC$  ( $\angle DNC = 90^\circ$ ):  $CN = q \sin \alpha$ ;  $DN = q \cos \alpha$ .

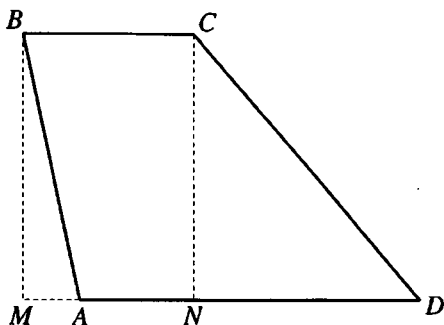


Рис.12.96

Так как  $BM = CN$ , то  $p \sin 2\alpha = q \sin \alpha$ ;  $2p \sin \alpha \cos \alpha = q \sin \alpha$ ;  $\cos \alpha = \frac{q}{2p}$ .

$AD = AM + MN + ND$ ;  $a = p \cos 2\alpha + x + q \cos \alpha$ ;

$$\begin{aligned} x &= a - p \cos 2\alpha - q \cos \alpha = a - p(2 \cos^2 \alpha - 1) - q \cos \alpha = \\ &= a - p \left( 2 \cdot \frac{q^2}{4p^2} - 1 \right) - q \cdot \frac{q}{2p} = a - \frac{q^2}{2p} + p - \frac{q^2}{2p} = \frac{p^2 + ap - q^2}{p}. \end{aligned}$$

В случае, если  $90^\circ < 2\alpha < 180^\circ$  (рис. 12.9 б)  $AD = ND + MN - AM = q \cos \alpha + x - p \cos(180^\circ - 2\alpha) = q \cos \alpha + x + q \cos 2\alpha$ , и получаем тот же ответ.

Ответ:  $\frac{p^2 + ap - q^2}{p}$ .

12.137. Площадь равнобедренной трапеции равна  $S$ , угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен  $\alpha$ . Найти высоту трапеции.

Решение.

Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей данной трапеции  $ABCD$ ,  $AB = CD$  (рис. 12.10),  $\angle AOB = \alpha$ .

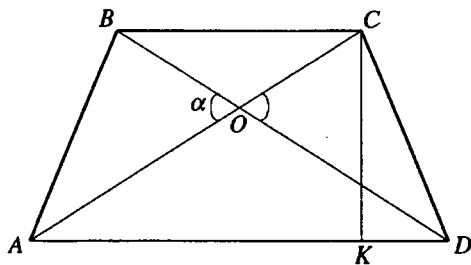


Рис. 12.10

Так как  $\angle AOB$  — внешний угол  $\triangle AOD$ ,  $AO = OD$ , то  $\angle CAD = \frac{\alpha}{2}$ .

Пусть  $CK = H$  — высота трапеции.

Из  $\triangle AKC$  ( $\angle AKC = 90^\circ$ ):  $AK = H \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

Тогда площадь трапеции  $S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CK = AK \cdot CK = H^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

Окончательно,  $H = \sqrt{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$ .

Ответ:  $\sqrt{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$ .

**12.138.** Большее основание вписанной в круг трапеции равно диаметру круга, а угол при основании равен  $\alpha$ . В каком отношении точка пересечения диагоналей трапеции делит ее высоту?

*Решение.*

Пусть основание  $AD$  равнобокой трапеции  $ABCD$  (рис. 12.11) есть диаметр круга, описанного около трапеции, тогда центр  $O$  круга — середина  $AD$ .

Высота  $KO$  трапеции проходит через точку  $L$  пересечения диагона-

лей,  $\triangle BLC \sim \triangle ALD$ ,  $\frac{KL}{LO} = \frac{LC}{LD}$ .

$\angle ACD$  — вписанный, опирающийся на диаметр, поэтому  $\angle ACD = 90^\circ$ .

$\angle ACD$  и  $\angle AOL$  — прямоугольные с общим острым углом при вершине  $A$ . Отсюда,  $\angle ALO = \angle ADC = \alpha$ .

Тогда  $\angle KLC = \angle OLD = \alpha$ ,  $\angle CLD = 180^\circ - 2\alpha$ , из  $\triangle LCD$  ( $\angle LCD = 90^\circ$ ):

$\frac{LC}{LD} = \cos \angle CLD = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$ .

Ответ:  $-\cos 2\alpha$ .

**12.139.** В равносторонний треугольник  $ABC$  вписан равносторонний треугольник  $A_1B_1C_1$ . Точка  $A_1$  лежит на стороне  $BC$ , точка  $B_1$  — на стороне  $AC$  и точка  $C_1$  — на стороне  $AB$ . Угол  $\angle A_1B_1C$  равен  $\alpha$ . Найти отношение  $AB$  к  $A_1B_1$ .

*Решение.*

В  $\triangle A_1B_1C$  (рис. 12.12)  $\angle C = 60^\circ$ ,  $\angle B_1A_1C = 120^\circ - \alpha$ .

$$\begin{aligned} \frac{AB}{A_1B_1} &= \frac{A_1C + B_1C}{A_1B_1} = \frac{A_1C}{A_1B_1} + \frac{B_1C}{A_1B_1} = \frac{\sin \angle A_1B_1C}{\sin \angle C} + \frac{\sin \angle B_1A_1C}{\sin \angle C} = \\ &= \frac{\sin \alpha + \sin(120^\circ - \alpha)}{\sin 60^\circ} = \frac{2 \sin 60^\circ \cos(60^\circ - \alpha)}{\sin 60^\circ} = 2 \sin(30^\circ + \alpha). \end{aligned}$$

Ответ:  $2 \sin(30^\circ + \alpha)$ .

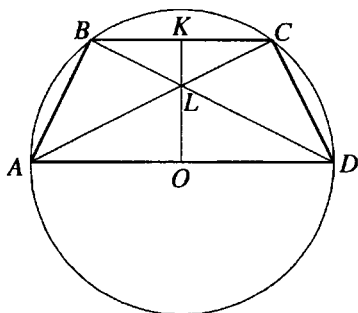


Рис. 12.11

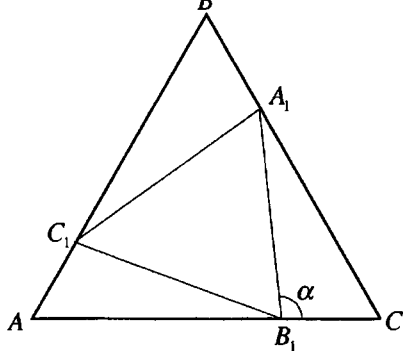


Рис. 12.12

**12.140.** В каком отношении делит высоту равнобедренного треугольника  $ABC$  точка  $O$ , из которой все три стороны видны под одним и тем же углом ( $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$ ), если угол при основании треугольника равен  $\alpha$  ( $\alpha > \frac{\pi}{6}$ )?

*Решение.*

Пусть  $BD$  — высота, биссектриса и медиана  $\triangle ABC$  (рис. 12.13).

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\angle AOK = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{\pi}{3}.$$

Пусть  $OK = 1$ , тогда из  $\triangle ADO$  ( $\angle ADO = \frac{\pi}{2}$ ):

$$AD = OD \operatorname{tg} \angle AOD = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Из  $\triangle ADB$  ( $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$ ):  $BD = AD \operatorname{tg} \angle BAD = \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$ .

$$\frac{BO}{OD} = \frac{BD - OD}{OD} = \frac{BD}{OD} - 1 = \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha - 1 = \sqrt{3} \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} \left( \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \alpha \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2 \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \alpha}.$$

*Ответ:*  $\frac{2 \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \alpha}$ , считая от вершины.

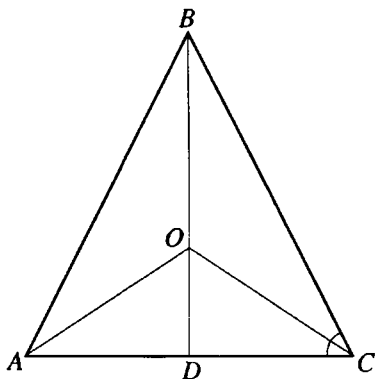


Рис. 12.13

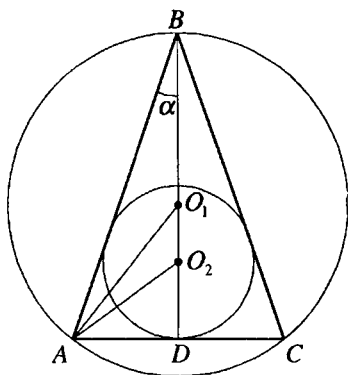


Рис. 12.14

**12.141.** Высота равнобедренного треугольника равна  $h$  и составляет с боковой стороной угол  $\alpha$  ( $\alpha \leq \frac{\pi}{6}$ ). Найти расстояние между центрами вписанной в треугольник и описанной около него окружностей.

*Решение.*

Пусть  $BD$  — высота  $\triangle ABC$ ,  $AB = BC$ ,  $BD = h$ ,  $\angle ABD = \alpha$ ,  $O_1$  и  $O_2$  — центры соответственно описанной и вписанной окружностей треугольника  $ABC$ .

Так как  $\angle ABC = 2\alpha \leq \frac{\pi}{3}$ , то точки  $O_1$  и  $O_2$  расположены на отрезке  $BD$  так, что  $O_1$  лежит между точками  $B$  и  $O_2$  (рис. 12.14).

$$\text{В } \triangle ADB \left( \angle ADB = \frac{\pi}{2} \right):$$

$$AD = BD \operatorname{tg} \angle ABD = h \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\angle BAD = \frac{\pi}{2} - \alpha, \angle DAO_2 = \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{В } \triangle ADO_2 \left( \angle ADO_2 = \frac{\pi}{2} \right): AO_2 = \frac{AD}{\cos \angle DAO_2} = \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{\cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Так как  $\angle AO_1O_2$  — внешний угол равнобедренного треугольника  $AO_1B$  ( $O_1A = O_1B$ ), то  $\angle AO_1O_2 = 2 \angle ABD = 2\alpha$ .

$$\angle O_1 A O_2 = \angle B A D - (\angle B A O_1 + \angle D A O_2) = \frac{\pi}{2} - \alpha - \left( \alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2}.$$

$$\text{В } \triangle O_1 A O_2: \frac{O_1 O_2}{\sin \angle O_1 A O_2} = \frac{A O_2}{\sin \angle A O_1 O_2} \Rightarrow O_1 O_2 = A O_2 \cdot \frac{\sin \angle O_1 A O_2}{\sin \angle O_2 O_1 A} =$$

$$= \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)} \cdot \frac{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2} \right)}{\sin 2\alpha} = \frac{h \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{3\alpha}{2} \right)}{2 \cos^2 \alpha \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{h \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{3\alpha}{2} \right)}{2 \cos^2 \alpha \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

**12.142.** В окружность радиуса  $R$  вписан треугольник, вершины которого делят окружность на три части в отношении 2 : 5 : 17. Найти площадь треугольника.

*Решение.*

Пусть  $\cup AB = 2x$  (рис. 12.15),  $\cup BC = 5x$ ,  $\cup AmC = 17x$  и  $2x + 5x + 17x = 360^\circ$ ,  $x = 15^\circ$   
 $\Rightarrow \angle AOB = \cup AB = 30^\circ$ ,  $\angle BOC = \cup BC = 75^\circ$ ,  
 $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 105^\circ$ .

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} - S_{\triangle AOC} =$$

$$= \frac{1}{2} R^2 \sin 30^\circ + \frac{1}{2} R^2 \sin 75^\circ - \frac{1}{2} R^2 \sin 105^\circ. \text{ Так как } \sin 75^\circ = \sin 105^\circ, \text{ то}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{R^2}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{R^2}{4}.$$

**12.143.** Тангенс угла при основании равнобедренного треугольника равен  $3/4$ . Найти тангенс угла между медианой и биссектрисой, проведенными к боковой стороне.

*Решение.*

В  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $AM$  — биссектриса,  $AN$  — медиана,  $BD$  — вы-

сота, (рис. 12.16).  $\angle C = \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ .

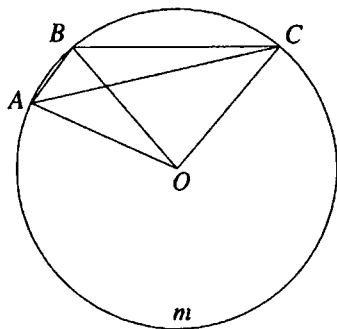


Рис. 12.15

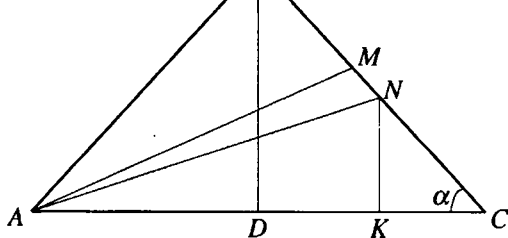


Рис. 12.16

Пусть  $BD = 3x \Rightarrow CD = BD \operatorname{ctg} \alpha = 4x$ .

Проведем  $NK \parallel BD$ . Так как  $BN = NC$ , то  $DK = KC = 2x$ ,  $NK = \frac{1}{2} BD = 1,5x$ ,

$$AK = AD + DK = 6x \quad \angle MAC = \frac{\alpha}{2}.$$

Пусть  $\angle MAN = \gamma$ , тогда  $\angle NAC = \frac{\alpha}{2} - \gamma$ ,  $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma\right) = \frac{NK}{AK} = \frac{1,5x}{6x} = \frac{1}{4}$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{4}; 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 8 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 3 = 0; \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3.$$

Так как  $\alpha$  — угол острый, то  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$ . Таким образом

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} - \gamma\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \gamma} = \frac{1}{4}; \frac{\frac{1}{3} - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \gamma} = \frac{1}{4}; \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{13}.$$

Ответ:  $\frac{1}{13}$ .

**12.144.** Найти синус угла при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что медиана, проведенная к боковой стороне, составляет с основанием угол, синус которого равен  $\frac{3}{5}$ .

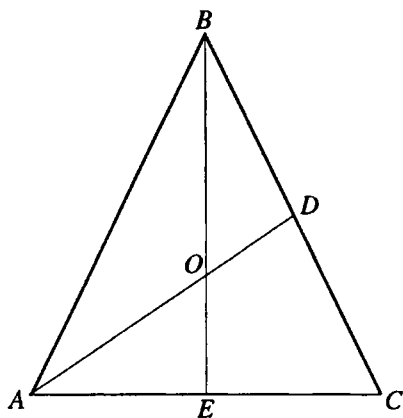


Рис. 12.17

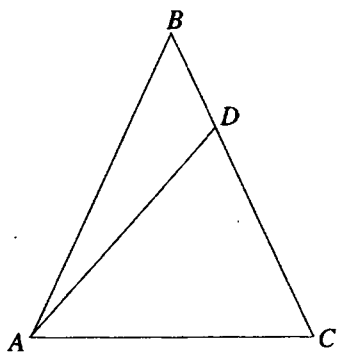


Рис. 12.18

*Решение.*

В  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $BE$  — высота, медиана, биссектриса.  $AD$  — медиана,  $O$  — точка пересечения  $AD$  и  $BE$  (рис. 12.17),  $\sin \angle OAE = \frac{3}{5}$ .

Пусть  $AO = 5x$ , тогда  $OE = 3x$ ,  $AE = 4x$ .

$BE = 3OE = 9x$ .

Если  $\angle ABC = \alpha$ , то из  $\triangle AEB$  ( $\angle AEB = 90^\circ$ ):  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{AE}{BE} = \frac{4}{9}$ .

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{8}{9}}{1 + \frac{16}{81}} = \frac{72}{97}.$$

Ответ:  $\frac{72}{97}$ .

**12.145.** Через вершину угла  $\alpha$  при основании равнобедренного треугольника проведена прямая, пересекающая противоположную боковую сторону и составляющая с основанием угол  $\beta$ . В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

*Решение.*

В  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle DAC = \beta$  (рис. 12.18)

Тогда  $\angle BAD = \alpha - \beta$ .



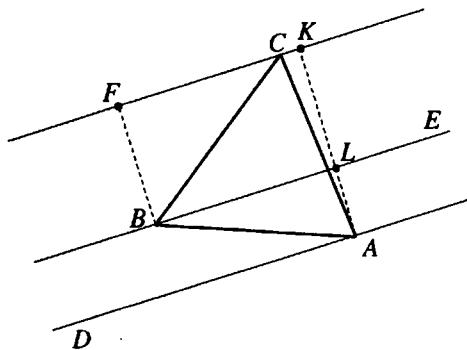


Рис. 12.19

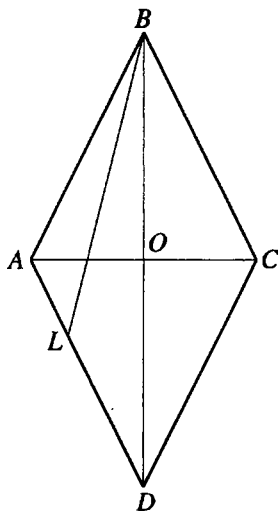


Рис. 12.20

Пусть  $AB = a \Rightarrow AC = 2a \cos \alpha$  и

$$\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle CAD}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \angle BAD}{\frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \angle CAD} = \frac{AB \sin \angle BAD}{AC \sin \angle CAD} = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{2a \cos \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2 \cos \alpha \sin \beta}$$

Ответ:  $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{2 \cos \alpha \sin \beta}$ .

12.146. Через вершину равностороннего треугольника  $ABC$  проведены параллельные прямые  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$ . Прямая  $BE$  лежит между прямыми  $AD$  и  $CF$  и делит расстояние между ними в отношении  $m:n$ , считая от прямой  $AD$ . Найти угол  $BCF$ .

Решение.

Пусть  $AK$  — общий перпендикуляр данных параллельных прямых,  $L$  — точка пересечения  $BE$  и  $AK$ ,  $AL:LK = m:n$ ,  $BF \perp FK$  (рис. 12.19).

Пусть  $BC = a$ ,  $\angle BCF = \alpha$ .

В  $\triangle BFC$  ( $\angle BFC = 90^\circ$ ):  $BF = a \sin \alpha$ ,  $KL = BF = a \sin \alpha$ ,

$$\angle CBL = \angle BCF = \alpha,$$

$$\angle ABL = 60^\circ - \alpha, \text{ и из } \triangle ALB \ (\angle ALB = 90^\circ): AL = a \sin(60^\circ - \alpha).$$

$$\text{Тогда } \frac{a \sin(60^\circ - \alpha)}{a \sin \alpha} = \frac{m}{n}; \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{2} = \frac{m}{n};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2m+n}{n\sqrt{3}}; \alpha = \operatorname{arctg} \frac{n\sqrt{3}}{2m+n}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{n\sqrt{3}}{2m+n}.$$

**12.147.** Найти косинус острого угла ромба, если прямая, проведенная через его вершину, делит угол в отношении 1:3, а противоположную сторону — в отношении 3:5.

*Решение.*

Пусть  $L$  — точка пересечения данной прямой  $BL$  со стороной  $AD$  ромба  $ABCD$ ,  $\angle ABL : \angle CBL = 1:3$ ,  $AL : LD = 3:5$  (рис. 12.20).

$$\angle ABL = \alpha, AL = 3x.$$

$$\text{Тогда } \angle CBL = 3\alpha, LD = 5x, AB = 8x, \angle ABC = 4\alpha, \angle ABO = 2\alpha.$$

$$\text{Если } BL \text{ — биссектриса } \angle ABD, \text{ то из } \triangle ABD: \frac{AL}{LD} = \frac{AB}{BD};$$

$$BD = \frac{LD \cdot AB}{AL} = \frac{5x \cdot 8x}{3x} = \frac{40x}{3}.$$

$$\text{В } \triangle AOB \ (\angle AOB = 90^\circ): \cos 2\alpha = \cos \angle ABO = \frac{BO}{AB} = \frac{20x}{3} : 8x = \frac{5}{6}.$$

$$\cos \angle ABC = \cos 4\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = \frac{7}{18}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{7}{18}.$$

**12.148.** Отношение площади прямоугольника  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) к квадрату его диагонали равно  $k$ . Найти  $\angle EAF$ , где  $E$  и  $F$  — соответственно середины сторон  $BC$  и  $CD$ .

*Решение.*

$$\text{Пусть } AB = y, AD = x, \angle BAE = \alpha, \angle DAF = \beta, \angle EAF = \gamma \text{ (рис. 12.21).}$$

$$\text{Диагональ прямоугольника равна } \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ площадь } xy, \frac{xy}{x^2 + y^2} = k \Rightarrow$$

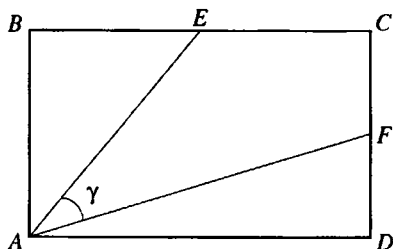


Рис. 12.21

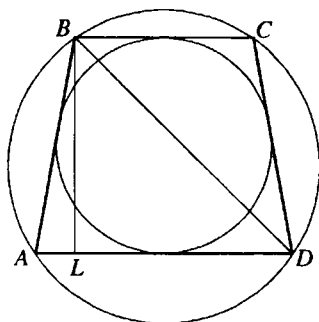


Рис. 12.22

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \frac{1 - \frac{x}{2y} \cdot \frac{y}{2x}}{\frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{3xy}{2(x^2 + y^2)} = \frac{3k}{2}; \gamma = \operatorname{arctg} \frac{3k}{2}.$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{3k}{2}$ .

**12.149.** Около круга радиуса  $r$  описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции составляет с меньшим основанием угол  $\alpha$ . Найти радиус круга, описанного около трапеции.

*Решение.*

Пусть  $BL$  — высота данной равнобокой трапеции  $ABCD$  (рис. 12.22),

тогда  $BL = 2r$ . В  $\triangle ALB$  ( $\angle ALB = 90^\circ$ ):  $AB = \frac{BL}{\sin \angle BAL} = \frac{2r}{\sin \alpha}$ . Так

как в данную трапецию вписан круг, то  $AB + BC = AB + CD = 2AB$ ,

$AB = CD \Rightarrow LD = \frac{AD + BC}{2} = AB = \frac{2r}{\sin \alpha}$ . В  $\triangle BLD$  ( $\angle BLD = 90^\circ$ ):

$BD = \sqrt{BL^2 + LD^2} = \sqrt{4r^2 + \frac{4r^2}{\sin^2 \alpha}} = \frac{2r}{\sin \alpha} \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}$ . Радиус  $R$  круга,

описанного около  $\triangle ABD$ :  $R = \frac{BD}{2 \sin \angle A} = \frac{r \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha}$ .

Ответ:  $\frac{r \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha}$ .

**12.150.** Высота треугольника делит угол треугольника в отношении 2:1, а основание — на отрезки, отношение которых (большого к меньшему) равно  $k$ . Найти синус меньшего угла при основании и допустимые значения  $k$ .

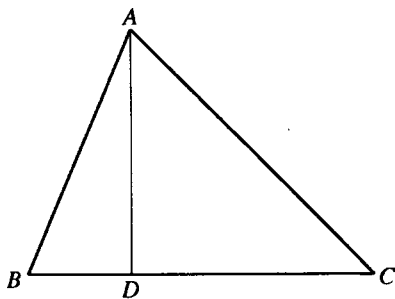


Рис. 12.23

*Решение.*

Пусть  $AD$  — высота  $\triangle ABC$  (рис. 12.23),  $\angle CAD : \angle BAD = 2 : 1 \Rightarrow AC > AB, CD > BD, CD : BD = k$ .

Если  $\angle BAD = \alpha$ , то  $\angle CAD = 2\alpha$ . В  $\triangle ADB$  ( $\angle ADB = 90^\circ$ ):  $BD = AD \operatorname{tg} \alpha$ .

Из  $\triangle ADC$  ( $\angle ADC = 90^\circ$ ):  $CD = AD \operatorname{tg} 2\alpha$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } k &= \frac{CD}{BD} = \frac{AD \operatorname{tg} 2\alpha}{AD \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{k-2}{k} \Rightarrow k > 2. \end{aligned}$$

Далее,

$$\sin \angle C = \sin(90^\circ - 2\alpha) = \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{k-2}{k}}{1 + \frac{k-2}{k}} = \frac{2}{2k-2} = \frac{1}{k-1}.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{k-1}, k > 2$ .

**12.151.** Гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанного круга на отрезки, отношение которых равно  $k$ . Найти углы треугольника.

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ ,  $\angle BAC = \pi/2$ ,  $D$  — точка касания этой окружности и гипотенузы  $BC$  (рис.

12.24),  $BD : DC = k$ ,  $\angle BAC = \alpha$ . Тогда  $\angle OBD = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\angle OCD = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ .

$$\text{В } \triangle ODC \left( \angle ODC = \frac{\pi}{2} \right): OD = DC \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$\text{Из } \triangle ODB \left( \angle ODB = \frac{\pi}{2} \right): OD = DB \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = kDC \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

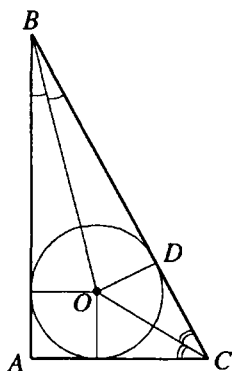


Рис. 12.24

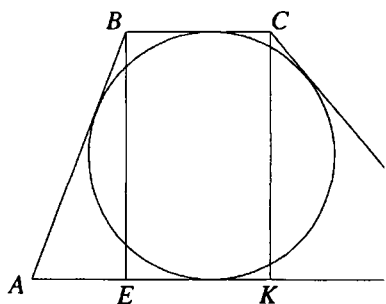


Рис. 12.25

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow k \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \Leftrightarrow \frac{k \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow k \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) &= \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow k \frac{1}{2} \left( \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{1}{2} \left( \sin \frac{\pi}{4} + \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) + k \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) &= k \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cdot (k+1) &= \frac{\sqrt{2}(k-1)}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{\sqrt{2}(k-1)}{2(k+1)} \Leftrightarrow \alpha &= \frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{\sqrt{2}(k-1)}{2(k+1)}. \\
 \angle ACB = \frac{\pi}{2} - \alpha &= \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{\sqrt{2}(k-1)}{2(k+1)}. \\
 \text{Ответ: } \frac{\pi}{4} \pm \arcsin \frac{\sqrt{2}(k-1)}{2(k+1)}. &
 \end{aligned}$$

**12.152.** Отношение боковых сторон трапеции равно отношению ее периметра к длине вписанной окружности и равно  $k$ . Найти углы трапеции и допустимые значения  $k$ .

*Решение.*

Пусть в трапеции  $ABCD$  (рис. 12.25)  $BC \parallel AD$ ,

$BC < AD$ ,  $BE$  и  $CK$  — высоты трапеции,  $R$  — радиус окружности, вписанной в трапецию,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle D = \beta$ .

$$\text{Тогда } BE = CK = 2R, AB = \frac{2R}{\sin \alpha}, CD = \frac{2R}{\sin \beta}.$$

Так как  $AB + CD = BC + AD$ , то периметр трапеции равен

$$2(AB + CD), k = \frac{2(AB + CD)}{2\pi R} = \frac{\frac{2R}{\sin \alpha} + \frac{2R}{\sin \beta}}{\pi R} = \frac{2(\sin \alpha + \sin \beta)}{\pi \sin \alpha \sin \beta}.$$

По условию  $AB = kCD$ . Тогда  $\frac{2R}{\sin \alpha} = \frac{2kR}{\sin \beta}$ ,  $\sin \beta = k \sin \alpha \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2(\sin \alpha + \sin \beta)}{\pi \sin \alpha \sin \beta} = k &\Leftrightarrow \frac{2(\sin \alpha + k \sin \alpha)}{\pi k \sin^2 \alpha} = k \Leftrightarrow \frac{2(k+1)}{\pi k \sin \alpha} = \\ &= k \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{2(k+1)}{\pi k^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \sin \beta = k \sin \alpha = \frac{2(k+1)}{\pi k}.$$

Таким образом, углы трапеции  $\arcsin \frac{2(k+1)}{\pi k^2}, \pi - \arcsin \frac{2(k+1)}{\pi k^2},$

$$\arcsin \frac{2(k+1)}{\pi k}, \pi - \arcsin \frac{2(k+1)}{\pi k}.$$

$$\text{При этом } \begin{cases} \frac{2k+2}{\pi k} \leq 1, \\ \frac{2k+2}{\pi k^2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(\pi-2) \geq 2, \\ \pi k^2 - 2k - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{2}{\pi-2}, \\ k \geq \frac{1+\sqrt{2\pi+1}}{\pi} \end{cases} \Rightarrow k \geq \frac{2}{\pi-2}.$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{2(k+1)}{\pi k^2}, \pi - \arcsin \frac{2(k+1)}{\pi k^2}, \arcsin \frac{2(k+1)}{\pi k},$$

$$\pi - \arcsin \frac{2(k+1)}{\pi k}, k \geq \frac{2}{\pi-2}.$$

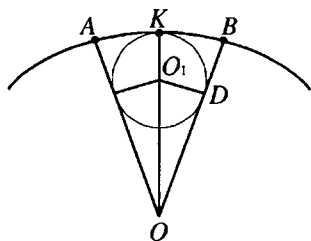


Рис. 12.26

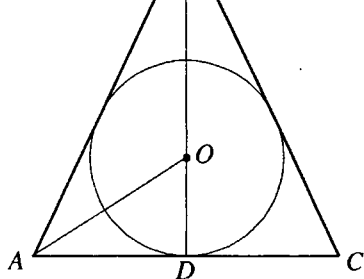


Рис. 12.27

**12.153.** В сектор радиуса  $R$  вписана окружность радиуса  $r$ . Найдите периметр сектора.

*Решение.*

Пусть  $D$  — точка касания окружности, вписанной в сектор  $AOB$  (рис. 12.26), центр  $O_1$  находится на биссектрисе  $OK$  угла  $AOB$ .

Пусть  $\angle AOB = \alpha$ , тогда  $\angle DOK = \frac{\alpha}{2}$  и из  $\triangle ODO_1$  ( $\angle ODO_1 = \frac{\pi}{2}$ )

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{O_1D}{OO_1} = \frac{r}{R-r}. \text{ Следовательно, } \alpha = 2 \arcsin \frac{r}{R-r}, \text{ длина дуги } AKB$$

равна  $\alpha R = 2R \arcsin \frac{r}{R-r}$  и периметр сектора равен  $2R \left( 1 + \arcsin \frac{r}{R-r} \right)$ .

*Ответ:*  $2R \left( 1 + \arcsin \frac{r}{R-r} \right)$ .

**12.154.** В остроугольном равнобедренном треугольнике радиус вписанной окружности в 4 раза меньше радиуса описанной окружности. Найдите углы треугольника.

*Решение.*

Пусть в  $\triangle ABC$  ( $AB = BC$ )  $AC = a$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $BD$  — высота,  $O$  — центр вписанной окружности,  $R$  и  $r$  — радиусы описанной и вписанной окружностей (рис. 12.27)

В  $\triangle ADO$  ( $\angle ADO = 90^\circ$ ):

$$r = OD = AD \operatorname{tg} \angle OAD = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{a}{2 \sin 2\alpha}.$$

Так как  $R = 4r$ , то  $\frac{a}{2 \sin \alpha} = 4 \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ;  $\Leftrightarrow 4 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow$

$$16 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow 16 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow 8(1 - \cos \alpha) \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \cos^2 \alpha - 8 \cos \alpha + 1 = 0; \quad \cos \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos \angle ABC = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha.$$

Если  $\cos \alpha = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ , то  $\cos \angle ABC = 1 - 2 \left( \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{4} < 0$ ,

что противоречит условию, так как данный треугольник остроугольный.

Таким образом,  $\cos \alpha = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ ,  $\cos \angle ABC = 1 - 2 \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}$ .

Ответ:  $\arccos \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ ;  $\arccos \frac{2\sqrt{2} + 1}{4}$ .

**12.155.** В треугольнике  $ABC$  даны острые углы  $\alpha$  и  $\gamma$  ( $\alpha > \gamma$ ), прилежащие к стороне  $AC$ . Из вершины  $B$  проведены медиана  $BD$  и биссектриса  $BE$ . Найти отношение площади треугольника  $BDE$  к площади треугольника  $ABC$ .

*Решение.*

В  $\triangle ABC$   $\angle A = \alpha$ ,  $\angle C = \gamma$

(рис. 12.28). Так как  $\alpha > \gamma$ , то точка  $D$  находится между точками  $A$  и  $E$ .

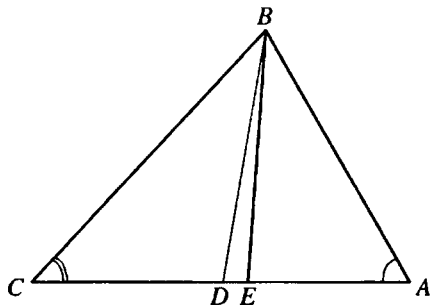


Рис. 12.28

$$\triangle ABC \text{ и } \triangle BDE \text{ имеют общую высоту, поэтому } \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{DE}{AC}.$$

$AC = CE + AE$ .  $AD = AE + DE$ ,  $CD = CE - DE$ . Так как  $AD = CD$ , то

$$AE + DE = CE - DE, \quad DE = \frac{CE - AE}{2}.$$



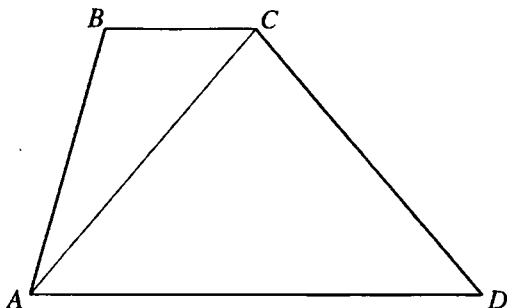


Рис. 12.29

Так как  $BE$  — биссектриса  $\triangle ABC$ , то  $\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ .

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{DE}{AC} = \frac{CE - AE}{2(CE + AE)} = \frac{\frac{CE}{AE} - 1}{2\left(\frac{CE}{AE} + 1\right)} = \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} - 1}{2\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + 1\right)} = \frac{\sin \alpha - \sin \gamma}{2(\sin \alpha + \sin \gamma)} = \frac{2 \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2}}{4 \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \gamma}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \gamma}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2}}.$$

12.156. Угол при вершине  $A$  трапеции  $ABCD$  равен  $\alpha$ . Боковая сторона  $AB$  вдвое больше меньшего основания  $BC$ . Найти угол  $BAC$ .

Решение. Пусть  $\angle BAC = \beta$  (рис. 12.29).

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \angle BCA = \angle CAD = \alpha - \beta. \text{ Из } \triangle ABC: \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \Leftrightarrow 2 = \sin \alpha \operatorname{ctg} \beta - \cos \alpha \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = 2 + \cos \alpha; \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha}.$$

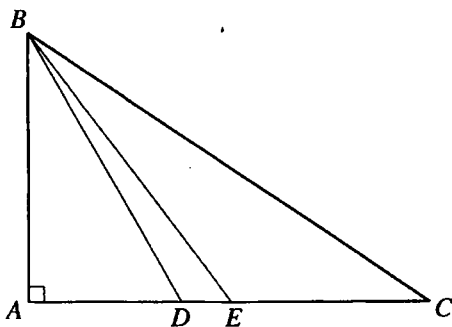


Рис. 12.30

**12.157.** В прямоугольном треугольнике найти угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины острого угла, равного  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть в  $\triangle ABC$  (рис. 12.30)  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = \alpha$ ,

$BD$  — биссектриса,  $BE$  — медиана. Так как  $\angle A > \angle C$ , то точка  $D$  находится между точками  $A$  и  $E$ . Если  $AB = x$ , то  $AC = x \operatorname{tg} \alpha$ ,

$$AE = \frac{1}{2} x \operatorname{tg} \alpha. \text{ В } \triangle BAE : \operatorname{tg} \angle ABE = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha; \quad \angle ABE = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \right).$$

$$\angle DBE = \angle ABE - \angle ABD = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \right) - \frac{\alpha}{2}.$$

*Ответ:*  $\operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \right) - \frac{\alpha}{2}$ .

**12.158.** Найти косинусы острых углов прямоугольного треугольника, зная, что произведение тангенсов половин этих углов равно  $1/6$ .

*Решение.*

Пусть один из углов равен  $\alpha$ . Тогда второй угол будет  $90^\circ - \alpha$  и по

$$\text{условию } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{6} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 5 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1 = 0;$$

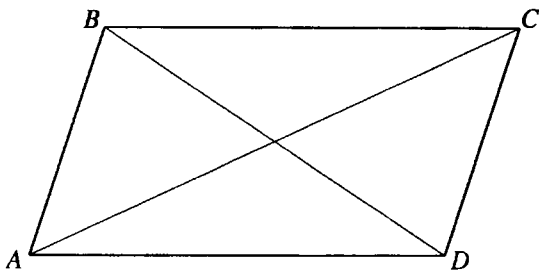


Рис. 12.31

$$1) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2};$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}.$$

Так как  $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ , то 1)  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ; 2)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  и  $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{5}$

или  $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{5}$ .

Ответ:  $\frac{3}{5}$  и  $\frac{4}{5}$ .

**12.159.** Стороны параллелограмма относятся как  $p:q$ , а диагонали — как  $m:n$ . Найти углы параллелограмма.

*Решение.*

Пусть в параллелограмме  $ABCD$  (рис. 12.31)  $AD = py$ ,  $BD = mx$ .

Тогда  $AB = qy$ ,  $AC = nx$ . Из  $\triangle BAD$  и  $\triangle ABC$  по теореме косинусов:

$$m^2 x^2 = p^2 y^2 + q^2 y^2 - 2pqy^2 \cos \angle A; m^2 x^2 = p^2 y^2 + q^2 y^2 + 2pqy^2 \cos \angle A.$$

$$\Rightarrow (n^2 - m^2)x^2 = 4pqy^2 \cos \angle A; \frac{x^2}{y^2} = \frac{4pq \cos \angle A}{n^2 - m^2}. \text{ По свойству диаго-$$

налей параллелограмма:  $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$

$$m^2 x^2 + n^2 x^2 = 2(p^2 y^2 + q^2 y^2); x^2(m^2 + n^2) = 2y^2(p^2 + q^2);$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{2(p^2 + q^2)}{m^2 + n^2} \Rightarrow \frac{4pq \cos \angle A}{n^2 - m^2} = \frac{2(p^2 + q^2)}{m^2 + n^2};$$

$$\angle A = \arccos \frac{(p^2 + q^2)(n^2 - m^2)}{2pq(m^2 + n^2)}$$

$$\angle ABC = \pi - \angle A = \pi - \arccos \frac{(p^2 + q^2)(n^2 - m^2)}{2pq(m^2 + n^2)}$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{(p^2 + q^2)(n^2 - m^2)}{2pq(m^2 + n^2)}; \pi - \arccos \frac{(p^2 + q^2)(n^2 - m^2)}{2pq(m^2 + n^2)}$$

**12.160.** Отношение периметра ромба к сумме его диагоналей равно  $k$ . Найти углы ромба и допустимые значения  $k$ .

*Решение.*

Пусть сторона ромба  $ABCD$  равна  $a$ , острый угол  $\alpha$  (рис. 12.32). Тогда диагона-

ли ромба  $2a \sin \frac{\alpha}{2}$  и  $2a \cos \frac{\alpha}{2}$ .

По условию

$$k = \frac{4a}{2a \sin \frac{\alpha}{2} + 2a \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \sin \alpha}}$$

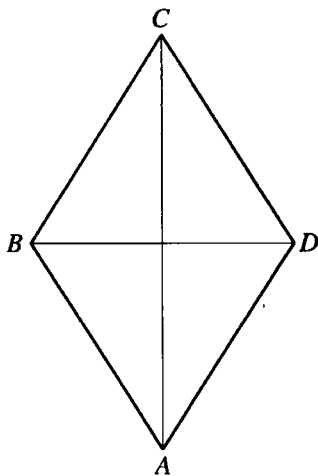


Рис. 12.32

Так как  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , то  $1 < 1 + \sin \alpha \leq 2$ ,  $\sqrt{2} \leq \frac{2}{\sqrt{1 + \sin \alpha}} < 2$ ,  $\sqrt{2} \leq k < 2$ .

Таким образом  $k^2 = \frac{4}{1 + \sin \alpha}$ ;  $\sin \alpha = \frac{4 - k^2}{k^2}$ ;  $\alpha = \arcsin \frac{4 - k^2}{k^2}$ .

**Ответ:**  $\arcsin \frac{4 - k^2}{k^2}$ ,  $\pi - \arcsin \frac{4 - k^2}{k^2}$ ;  $\sqrt{2} \leq k < 2$ .

**12.161.** Найти косинусы углов равнобедренного треугольника, у которого точка пересечения высот делит пополам высоту, проведенную к основанию.

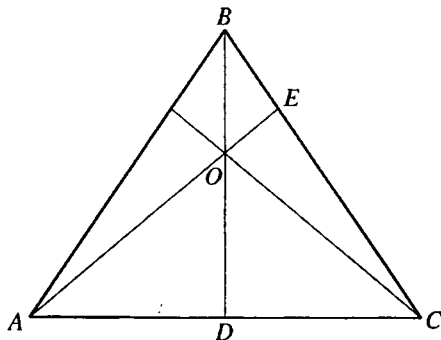


Рис. 12.33

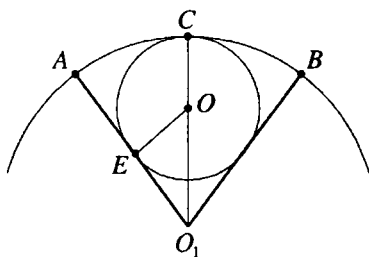


Рис. 12.34

*Решение.*

В  $\triangle ABC$  (рис. 12.33)  $AB=BC$ ,  $BD$  и  $AE$  — высоты,  $O$  — точка пересечения высот,  $BO=OD$ .

Пусть  $\angle ACB = \alpha$ ,  $BO = OD = 1$ .  $\triangle BDC$  и  $\triangle BEO$  — прямоугольные с общим острым углом  $\angle DBC$ . Имеем  $\angle BOE = \angle ACB = \alpha$ .

$$\angle COD = \angle AOD = \angle BOE = \alpha, \quad \angle COE = 180^\circ - 2\alpha.$$

$$\text{В } \triangle BEO (\angle BEO = 90^\circ): OE = OB \cos \angle BOE = \cos \alpha.$$

$$\text{В } \triangle ODC (\angle ODC = 90^\circ): OC = \frac{OD}{\cos \angle COD} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

$$\text{В } \triangle OEC (\angle OEC = 90^\circ): \cos \angle COE = \frac{OE}{OC};$$

$$\cos(180^\circ - 2\alpha) = \cos^2 \alpha \Leftrightarrow -\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}; \quad \cos = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\cos \angle ABC = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**12.162.** Периметр сектора равен  $l$ . Найти расстояние от вершины центрального угла сектора до центра окружности, вписанной в этот сектор, если радиус дуги сектора равен  $R$ .

*Решение.*

Пусть  $E$  — точка касания вписанной окружности и радиуса  $O_1A$  сектора, центр  $O$  окружности лежит на биссектрисе  $O_1C$  угла  $AO_1B$  (рис. 12.34). Если  $\angle AO_1B = \alpha$ , то длина дуги  $ACB$  равна  $\alpha R$  и

$$l = 2R + R\alpha, \quad \alpha = \frac{l - 2R}{R}. \quad \text{Пусть } OO_1 = x. \quad \text{В } \triangle OEO_1 \left( \angle OEO_1 = \frac{\pi}{2} \right):$$

$$OE = x \sin \frac{\alpha}{2}, \quad OC = OE = x \sin \frac{\alpha}{2}, \quad O_1C = OO_1 + OC, \quad R = x + x \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{R}{1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{R}{2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right)} = \frac{R}{2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{l - 2R}{4R} \right)} = \\ &= \frac{R}{2 \cos^2 \frac{(\pi + 2)R - l}{4R}}. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{R}{2 \cos^2 \frac{(\pi + 2)R - l}{4R}}$ .

**12.163.** Показать, что если в треугольнике отношение суммы синусов двух углов к сумме их косинусов равно синусу третьего угла, то треугольник прямоугольный.

*Решение.*

Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы данного треугольника и  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \sin \gamma$ .

$$\text{Тогда } \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \sin \gamma \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \gamma \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{180^\circ - \gamma}{2} = \sin \gamma \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\gamma}{2} \left( \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} - 2 \sin \frac{\gamma}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \gamma}{\sin \frac{\gamma}{2}} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \cos \gamma = 0.$$

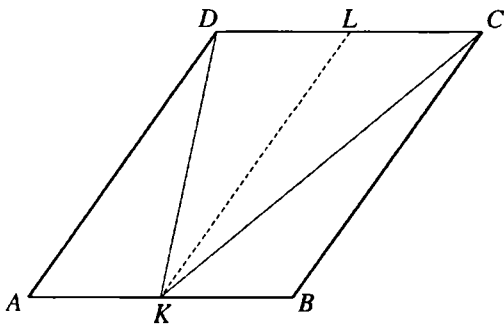


Рис. 12.35

Так как  $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ , то  $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \neq 0, \cos \gamma = 0$  при  $\gamma = 90^\circ$ , что и требовалось доказать.

**12.164.** Найти синус угла ромба, если из середины его стороны противоположная сторона видна под углом  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть  $K$  — середина стороны  $AB$ ,  $L$  — середина стороны  $CD$  ромба  $ABCD$  (рис. 12.35)  $\angle CKD = \alpha$ ,  $\angle DKL = \gamma$ ,  $\angle CKL = \beta$ .

Тогда  $\beta + \gamma = \alpha$ ,  $\angle ADK = \gamma$ ,  $\angle BCK = \beta$ .

В  $\triangle ADK$ :

$$\begin{aligned} \frac{\sin \angle AKD}{\sin \angle ADK} &= \frac{\sin(180^\circ - (\angle A + \gamma))}{\sin \gamma} = \frac{\sin(\angle A + \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{AD}{AK} = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\sin \angle A \cos \gamma + \sin \gamma \cos \angle A}{\sin \gamma} &= 2 \Leftrightarrow \sin \angle A \operatorname{ctg} \gamma + \cos \angle A = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \gamma &= \frac{2 - \cos \angle A}{\sin \angle A} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \gamma = \frac{2 \sin \angle A}{2 - \cos \angle A}. \end{aligned}$$

В  $\triangle BCK$ :

$$\begin{aligned} \frac{\sin \angle KCB}{\sin \angle BCK} &= \frac{\sin(180^\circ - (\angle B + \beta))}{\sin \beta} = \frac{\sin(180^\circ - (180^\circ - \angle A + \beta))}{\sin \beta} = \\ &= \frac{\sin(\angle A - \beta)}{\sin \beta} = \frac{BC}{BK} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin \angle A \cos \beta - \cos \angle A \sin \beta}{\sin \beta} = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin \angle A \operatorname{ctg} \beta - \cos \angle A &= 2 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \beta = \frac{2 + \cos \angle A}{\sin \angle A} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \angle A}{2 + \cos \angle A}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg}(\gamma + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{\sin \angle A}{2 - \cos \angle A} + \frac{\sin \angle A}{2 + \cos \angle A}}{1 - \frac{\sin \angle A}{2 - \cos \angle A} \cdot \frac{\sin \angle A}{2 + \cos \angle A}} = \\ &= \frac{\sin \angle A (2 + \cos \angle A + 2 - \cos \angle A)}{4 - \cos^2 \angle A - \sin^2 \angle A} = \frac{4 \sin \angle A}{3}; \end{aligned}$$

$$\sin \angle A = \frac{3}{4} \operatorname{tg} \alpha.$$

Ответ:  $\frac{3}{4} \operatorname{tg} \alpha$ .

**12.165.** Сторона треугольника равна  $a$ , разность углов, прилежащих к данной стороне, равна  $\frac{\pi}{2}$ . Найти углы треугольника, если его площадь равна  $S$ .

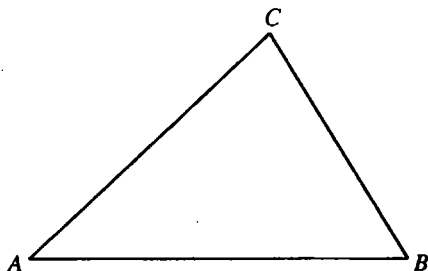


Рис. 12.36

*Решение.*

Пусть в треугольнике  $ABC$  (рис. 12.36)  $BC = a$ ,  $S_{\triangle ABC} = S$ ,  $\angle B = \alpha$ ,  $AC = b$ .

$$\text{Тогда } \angle C = \frac{\pi}{2} + \alpha, \angle A = \pi - (\angle B + \angle C) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha.$$

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{b}{\sin \alpha} \Leftrightarrow b = \frac{\alpha \sin \alpha}{\cos 2\alpha}.$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin \angle C = \frac{1}{2} a b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \cos \alpha = \frac{a^2 \operatorname{tg} 2\alpha}{4}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4S}{a^2}, \angle B = \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4S}{a^2}, \angle C = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4S}{a^2}, \angle A = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{4S}{a^2}.$$

Ответ:  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4S}{a^2}; \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4S}{a^2}; \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{4S}{a^2}$ .

**12.166.** Тангенс острого угла между медианами прямоугольного треугольника, проведенными к его катетам, равен  $k$ . Найти углы треугольника и допустимые значения  $k$ .



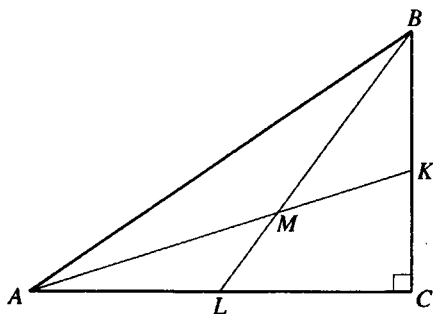


Рис. 12.37

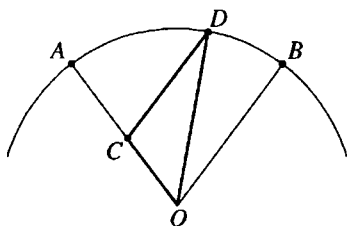


Рис. 12.38

*Решение.*

Пусть  $AK$  и  $BL$  — медианы  $\triangle ABC$ , проведенные к его катетам,  $M$  — их точка пересечения.

$\angle AML = \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = k$ ,  $0 < \alpha < \pi/2$  (рис. 12.37),  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $\angle BLC = \beta$ ,  $\angle KAC = \gamma$ .

$$\text{Тогда } \sin \angle BAC = \frac{a}{c}, \cos \angle BAC = \frac{b}{c}, \operatorname{tg} \beta = \frac{BC}{LC} = \frac{2a}{b}, \operatorname{tg} \gamma = \frac{KC}{AC} = \frac{a}{2b}.$$

Так как  $\beta$  — внешний угол треугольника  $AML$ , то  $\beta = \alpha + \gamma$  и

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\frac{2a}{b} - \frac{a}{2b}}{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{3a}{2b} \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{3a}{2b} \cdot \frac{b^2}{c^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} =$$

$$= \frac{3}{2} \sin \angle BAC \cdot \cos \angle BAC = \frac{3}{4} \sin 2\angle BAC \Rightarrow \sin 2\angle BAC = \frac{4}{3} \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3} k.$$

Отсюда

$$0 < \frac{4}{3} k \leq 1, 0 < k \leq \frac{3}{4}; \angle BAC = \frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{3} k; \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{3} k.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{3} k; \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{3} k; 0 < k \leq \frac{3}{4}.$$

**12.167.** Радиус дуги сектора равен  $R$ , центральный угол  $AOB$  равен  $\alpha$ . Через середину  $C$  радиуса  $OA$  проведена прямая, параллельная радиусу  $OB$  и пересекающая дугу  $AB$  в точке  $D$ . Найти площадь треугольника  $OCD$ .

*Решение.*

Пусть  $\angle BOD = \beta$  (рис. 12.38). Тогда  $\angle CDO = \beta$ ,  $\angle DOC = \alpha - \beta$ ,  $\angle DCO = 180^\circ - \alpha$ .

$$\text{В } \triangle COD: \frac{DO}{\sin \angle DCO} = \frac{CO}{\sin \angle CDO} \Leftrightarrow \frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{R}{2 \sin \beta}; \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{2}.$$

Так как  $OC = \frac{1}{2}OD$ , то  $\angle ODC = \beta$  не является наибольшим углом треугольника  $COD$  и  $\cos \beta > 0$ ,

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{4}} = \frac{\sqrt{4 - \sin^2 \alpha}}{2}.$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle OCD} &= \frac{1}{2} CO \cdot DO \sin \angle COD = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot R \sin(\alpha - \beta) = \\ &= \frac{R^2}{4} (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = \frac{R^2}{4} \left( \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{4 - \sin^2 \alpha}}{2} - \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{2} \right) = \\ &= \frac{R^2 \sin \alpha}{8} \left( \sqrt{4 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right). \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{R^2 \sin \alpha}{8} \left( \sqrt{4 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right).$$

**12.168.** В треугольнике даны сторона  $a$ , противолежащий ей угол  $\alpha$  и высота  $h$ , проведенная к данной стороне. Найти сумму двух других сторон.

*Решение.*

Пусть  $b$  и  $c$  — неизвестные стороны треугольника. Тогда площадь треугольника  $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ah, bc = \frac{ah}{\sin \alpha}$ .

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos \alpha \Leftrightarrow (b + c)^2 = \\ &= b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 2bc \cos \alpha + 2bc = a^2 + 2bc(1 + \cos \alpha) = \\ &= a^2 + \frac{2ah}{\sin \alpha} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} = a^2 + \frac{4ah \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = a^2 + 2ah \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{a^2 + 2ah \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}.$$

**12.169.** В квадрат  $ABCD$  вписан равнобедренный треугольник  $AEF$ ; точка  $E$  лежит на стороне  $BC$ , точка  $F$  — на стороне  $CD$  и  $AE = EF$ . Тангенс угла  $AEF$  равен 2. Найти тангенс угла  $FEC$ .

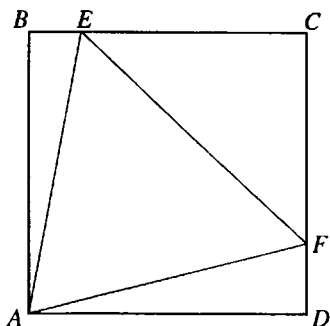


Рис. 12.39

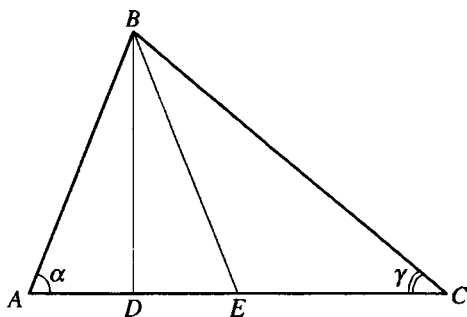


Рис. 12.40

*Решение.*

Пусть  $AB = a$ ,  $\angle AEF = \alpha$ ,  $\angle FEC = x$  (рис. 12.39).

Тогда  $\angle BEA = 180^\circ - (\alpha + x)$ .

В  $\triangle ABE$  ( $\angle ABE = 90^\circ$ ):

$$AE = \frac{AB}{\sin \angle BEA} = \frac{a}{\sin(\alpha + x)};$$

$$BE = AB \operatorname{ctg} \angle BEA = a \operatorname{ctg}(\alpha + x).$$

$$EF = AE = \frac{a}{\sin(\alpha + x)}.$$

$$\text{В } \triangle ECF (\angle ECF = 90^\circ): EC = EF \cos \angle FEC = \frac{a \cos x}{\sin(\alpha + x)}.$$

$$BE + EC = BC.$$

$$\text{Тогда } \frac{a \cos x}{\sin(\alpha + x)} - a \operatorname{ctg}(\alpha + x) = a \Leftrightarrow \cos x - \cos(\alpha + x) = \sin(\alpha + x) \Leftrightarrow$$

$$\cos x - \cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x = \sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x \Leftrightarrow \frac{1}{\cos \alpha} - 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} x =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} x. \text{ Так как по условию}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 2, \text{ то } \sqrt{5} - 1 + 2 \operatorname{tg} x = 2 + \operatorname{tg} x; \operatorname{tg} x = 3 - \sqrt{5}.$$

*Ответ:*  $3 - \sqrt{5}$ .

**12.170.** В треугольнике  $ABC$  даны острые углы  $\alpha$  и  $\gamma$  ( $\alpha > \gamma$ ) при основании  $AC$ . Из вершины  $B$  проведены высота  $BD$  и медиана  $BE$ .

Найти площадь треугольника  $BDE$ , если площадь треугольника  $ACB$  равна  $S$ .

*Решение.*

В  $\triangle ABC$   $\angle A = \alpha$ ,  $\angle C = \gamma$  (рис. 12.40).

Так как  $\alpha > \gamma$ , то точка  $D$  находится между точками  $A$  и  $E$ .

$AE = AD + DE$ ,  $CD = CE + DE$ . Так как  $CE = AE$ , то  $CD = (AD + DE) + DE$ ,

$$DE = \frac{CD - AD}{2}.$$

Пусть  $BD = H$ . Тогда из  $\triangle ABD$  получаем, что  $AD = H \operatorname{ctg} \alpha$ , а из  $\triangle CDB$  —  $CD = H \operatorname{ctg} \gamma$ .

$\triangle ABC$  и  $\triangle DBE$  имеют общую высоту  $BD$ , отсюда

$$\frac{S_{\triangle DBE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{DE}{AC} = \frac{CD - AD}{2(CD + AD)} = \frac{H \operatorname{ctg} \gamma - H \operatorname{ctg} \alpha}{2H(\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha)} = \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{2 \sin(\alpha + \gamma)};$$

$$S_{\triangle DBE} = \frac{S \sin(\alpha - \gamma)}{2 \sin(\alpha + \gamma)}.$$

*Ответ:*  $\frac{S \sin(\alpha - \gamma)}{2 \sin(\alpha + \gamma)}$ .

**12.171.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  острый угол при вершине  $A$  равен  $\alpha$ . Через середину  $D$  гипотенузы  $AB$  проведена прямая, пересекающая катет  $AC$  в точке  $E$ . В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника  $ABC$ , если  $\angle DEA = \beta$ ,  $AE > 0,5 AC$ ?

*Решение.*

Пусть  $S_1$  — площадь треугольника  $ADE$ ,  $S_2$  — площадь четырехугольника  $BCED$ ,  $S$  — площадь треугольника  $ABC$  (рис. 12.41).

Тогда

$$S_1 = \frac{1}{2} AE \cdot AD \sin \angle A = \frac{1}{4} AE \cdot AB \sin \angle A, S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \angle A,$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{S - S_1}{S_1} = \frac{S}{S_1} - 1 = \frac{2AC}{AE} - 1.$$

Если  $AB = c$ , то из  $\triangle ACB$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ):  $AC = c \cos \alpha$ .

В  $\triangle AED$ :

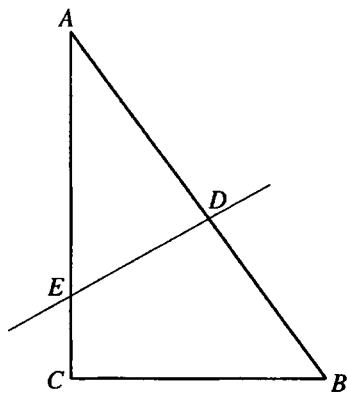


Рис. 12.41

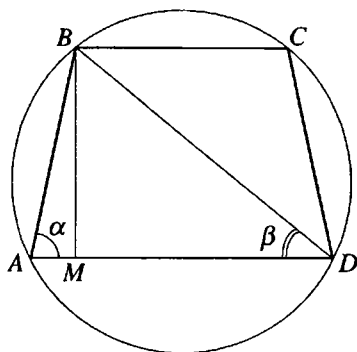


Рис. 12.42

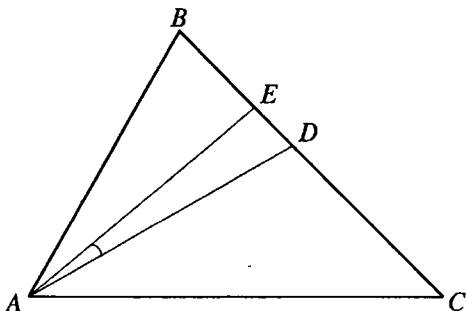


Рис. 12.43

$$\frac{AE}{\sin \angle ADE} = \frac{AD}{\sin \angle DEA} \Leftrightarrow \frac{AE}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{c}{2 \sin \beta} \Leftrightarrow AE = \frac{c \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \beta}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \frac{S_2}{S_1} &= \frac{2AC}{AE} - 1 = \frac{4 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - 1 = \frac{4 \sin \beta \cos \alpha - \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{3 \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} = \frac{3 \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{3 \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$

**12.172.** В круг вписана трапеция. Большее основание трапеции составляет с боковой стороной угол  $\alpha$ , а с диагональю — угол  $\beta$ . Найти отношение площади круга к площади трапеции.

*Решение.*

Пусть  $AD$  — большее основание данной трапеции  $ABCD$ ,  $\angle BAD = \alpha$ ,  $\angle BDA = \beta$  (рис. 12.42),  $BN$  — высота трапеции и  $BD = 1$ .

Тогда из  $\triangle BMD$  ( $\angle BMD = 90^\circ$ ):

$$BM = BD \sin \angle BDM = \sin \beta;$$

$$DM = BD \cos \angle BDM = \cos \beta.$$

Площадь трапеции

$$S_1 = \frac{AD + BC}{2} \cdot BM = DM \cdot BM = \sin \beta \cos \beta = \frac{1}{2} \sin 2\beta.$$

Радиус  $R$  круга, описанного около  $\triangle BAD$ :  $R = \frac{BD}{2 \sin \angle A} = \frac{1}{2 \sin \alpha}.$

Тогда площадь круга  $S_2 = \pi R^2 = \frac{\pi}{4 \sin^2 \alpha}$ .

Таким образом,  $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi}{2 \sin^2 \alpha \sin 2\beta}$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{2 \sin^2 \alpha \sin 2\beta}$ .

**12.173.** В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $\alpha$  и сторона  $BC = a$ . Найти длину биссектрисы  $AD$ , если угол между биссектрисой  $AD$  и высотой  $AE$  равен  $\beta$ .

*Решение.*

Если  $AD = x$  (рис. 12.43), то из  $\triangle AED$  ( $\angle AED = 90^\circ$ ):  
 $AE = AD \cos \angle EAD = x \cos \beta$ , а из  $\triangle AEB$  ( $\angle AEB = 90^\circ$ ):

$$BE = AE \operatorname{tg} \angle BAE = x \cos \beta \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} - \beta \right).$$

В  $\triangle AEC$  ( $\angle AEC = 90^\circ$ ):  $EC = AE \operatorname{tg} \angle EAC = x \cos \beta \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} + \beta \right)$ .

Так как  $BC = BE + EC$ , то:

$$a = x \cos \beta \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} - \beta \right) + \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} + \beta \right) \right) = \frac{x \cos \beta \sin \alpha}{\cos \left( \frac{\alpha}{2} - \beta \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} + \beta \right)} \Leftrightarrow x =$$

$$= \frac{a \cos \left( \frac{\alpha}{2} - \beta \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} + \beta \right)}{\cos \beta \sin \alpha}.$$

Ответ:  $\frac{a \cos \left( \frac{\alpha}{2} - \beta \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} + \beta \right)}{\cos \beta \sin \alpha}$ .

**12.174.** Равнобедренный треугольник с углом  $\alpha$  при вершине пересечен прямой, проходящей через вершину угла при основании и составляющей с основанием угол  $\beta$ . В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

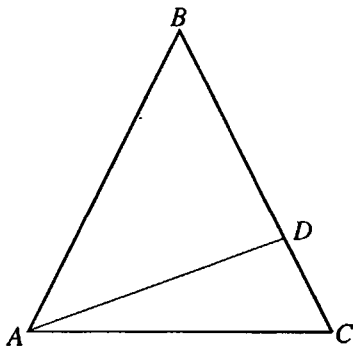


Рис. 12.44

*Решение.*

Пусть в  $DABC$  (рис. 12.44)  $AB=BC=a$ ,  $\angle ABC = \alpha$ ,  $AD$  — прямая, о которой говорится в условии задачи,  $\angle DAC = \beta$ ,  $CD = x$ . Тогда  $BD = a - x$ . В силу того, что  $\triangle BAD$  и  $\triangle CAD$  имеют одну и ту же высоту, опущенную из

вершины  $A$ , то  $\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle CAD}} = \frac{BD}{CD} = \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x} - 1$ .

$$\angle BAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta,$$

$$\angle ADB = 180^\circ - (\angle BAD + \angle B) = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta + \alpha\right) = 90^\circ + \beta - \frac{\alpha}{2}.$$

Из  $\triangle ADB$ :

$$\frac{BD}{AB} = \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle ADB}; \frac{a-x}{x} = \frac{\sin \left(90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right)}{\sin \left(90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)\right)} = \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)} \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{a} =$$

$$= \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = 1 - \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)} = \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) - \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)}.$$

$$\text{Тогда } \frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle CAD}} = \frac{a}{x} - 1 = \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) - \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)} - 1 = \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta}.$$

**12.175.** Радиус дуги сектора  $AOB$  равен  $R$ , центральный угол  $AOB$  равен  $\alpha$ . В этот сектор вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой дуги  $AB$ , а две другие вершины лежат соответственно на радиусах  $OA$  и  $OB$ . Найти стороны треугольника.

*Решение.*

Пусть  $M$  — середина дуги  $AB$ ,  $\triangle LMK$  — правильный, о котором говорится в условии задачи (рис. 12.45).

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \angle LOM &= \frac{\alpha}{2}, \angle MLK = 60^\circ, \angle OLK = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \angle OLM = \\ &= \angle OLK + \angle MLK = 150^\circ - \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

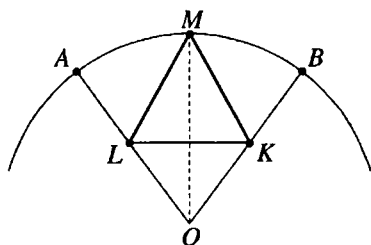


Рис. 12.45

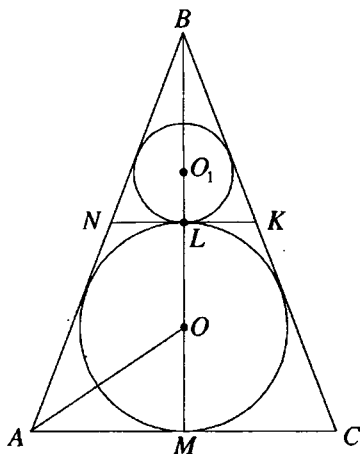


Рис. 12.46

Из  $\triangle OLM$ :

$$\frac{LM}{\sin \angle LOM} = \frac{OM}{\sin \angle OLM}; LM = \frac{OM \sin \angle LOM}{\sin \angle OLM} = \frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \left( 150^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)} =$$

$$= \frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \left( 30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Ответ:  $\frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \left( 30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}.$

**12.176.** В равнобедренный треугольник с основанием  $a$  и углом  $\alpha$  при основании вписана окружность. Найти радиус окружности, касающейся вписанной окружности и боковых сторон треугольника.

*Решение.*

В  $\triangle ABC$  (рис. 12.46)  $AB = BC$ ,  $AC = a$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $O$  — центр вписанной окружности,  $R$  — ее радиус,  $O_1$  — центр окружности, касающейся вписанной окружности и боковых сторон треугольника,  $r$  — ее радиус. Точки  $O$  и  $O_1$  находятся на высоте  $BM$  данного треугольника.

$$\text{В } \triangle AMB (\angle AMB = 90^\circ): BM = AM \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$



$$\text{В } \triangle AMO (\angle AMO = 90^\circ): R = OM = AM \operatorname{tg} \angle OAM = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Пусть  $L$  — точка касания окружностей с центрами  $O$  и  $O_1$ , а  $NK$  — их общая касательная, проходящая через точку  $L$ .

$$BL = BM - LM = BM - 2R = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha - a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \left( \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= \frac{a}{2} \left( \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{a}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$\triangle ABC \sim \triangle NBK$ .

$$\text{Тогда } \frac{r}{R} = \frac{BL}{BM}; r = R \cdot \frac{BL}{BM} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha} = \frac{a}{2} \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a}{2} \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}.$$

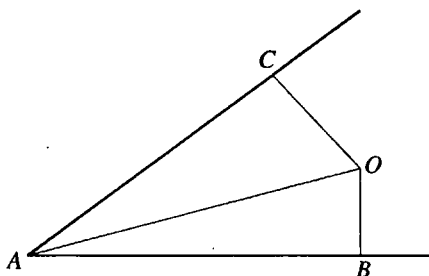


Рис. 12.47

**12.177.** Внутри данного угла расположена точка на расстоянии  $a$  от вершины и на расстоянии  $b$  от одной стороны. Найти расстояние этой точки от другой стороны.

*Решение.*

Пусть  $OA$  — расстояние от точки  $O$  до вершины  $A$  данного угла,  $OB$  — до одной из сторон,  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $OC$  — расстояние до другой стороны,  $\angle BAC = \alpha$  (рис. 12.47),  $\angle OAB = x$ .

$$\text{В } \triangle ABO (\angle ABO = 90^\circ): \sin x = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}. \text{ Из } \triangle OCA (\angle OCA = 90^\circ):$$

$$OC = OA \sin \angle OAC = a \sin(\alpha - x) = a(\sin \alpha \cos x - \cos \alpha \sin x) =$$

$$= a \left( \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 x} - \cos \alpha \sin x \right) = a \left( \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - \frac{b}{a} \cos \alpha \right) =$$

$$= \sin \alpha \sqrt{a^2 - b^2} - b \cos \alpha.$$

$$\text{Ответ: } \sin \alpha \sqrt{a^2 - b^2} - b \cos \alpha.$$

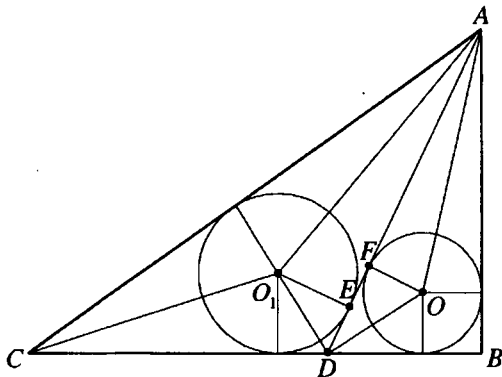


Рис. 12.48

**12.178.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$  острого угла  $A$ , равного  $\alpha$ . Найти отношение радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $ABD$  и  $ADC$ .

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр окружности, вписанной в  $\triangle ABD$ ,  $F$  — точка касания этой окружности с  $AD$ ,  $O_1$  — центр окружности, вписанной в  $\triangle ADC$ ,  $E$  — точка касания этой окружности с  $AD$  (рис. 12.48).

$$\angle BAD = \frac{\alpha}{2}, \angle ADB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \angle O_1AE = \angle FAO = \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{\alpha}{4},$$

$$\angle FDO = 45^\circ - \frac{\alpha}{4}.$$

$\angle O_1DO = 90^\circ$ , так как он образован биссектрисами смежных углов  $ADC$  и  $ADB$ . Тогда  $\angle EO_1D = \angle FDO$ , как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.

Если  $OF = r$ ,  $O_1E = R$ , то из  $\triangle AFO$  ( $\angle AFO = 90^\circ$ ):  $AF = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$ ;

из  $\triangle OFD$  ( $\angle OFD = 90^\circ$ ):  $DF = r \operatorname{ctg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)$ ;

из  $\triangle O_1ED$  ( $\angle O_1ED = 90^\circ$ ):  $DE = R \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) = R \operatorname{ctg} \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right)$ ;

из  $\triangle O_1EA$  ( $\angle O_1EA = 90^\circ$ ):  $AE = R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$ .

$$AF + FD = AE + ED \Rightarrow r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} + r \operatorname{ctg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) = R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} +$$

$$+ R \operatorname{ctg} \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right) \Leftrightarrow r \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin \frac{\alpha}{4} \sin \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)} = R \cdot \frac{\sin \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{4} \sin \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sin \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right) \sin 45^\circ}{\sin \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) \sin \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{\sqrt{2} \sin \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right)}{2 \cos \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right) \sin \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right)}{2 \sin \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right)}{2 \sin \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}.$

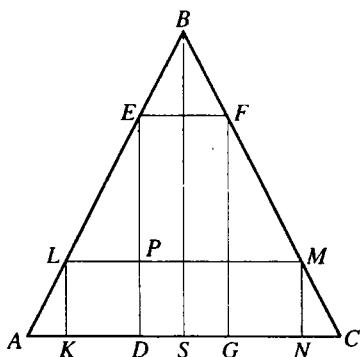


Рис. 12.49

Если  $BS$  — высота  $\triangle ABC$ ,  $P$  — точка пересечения  $LM$  и  $ED$ , то

$$LP = \frac{y_1 - y_2}{2}, EP = x_2 - x_1.$$

**12.179.** Найти синус угла при вершине равнобедренного треугольника, зная, что периметр любого вписанного в него прямоугольника, две вершины которого лежат на основании, имеет постоянную величину.

*Решение.*

Пусть  $KLMN$  и  $DEFG$  — два произвольных прямоугольника, вписанных в  $\triangle ABC$ ,  $AB = BC$  (рис. 12.49),  $LK = x_1$ ,  $LM = y_1$ ,  $ED = x_2$ ,  $DG = y_2$ ,  $\angle ABC = \alpha$ . По условию  $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ .

Тогда  $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$ .

$$\Delta LPE \sim \Delta ASB.$$

$$\text{Отсюда } \frac{AS}{BS} = \frac{LP}{EP} = \frac{y_1 - y_2}{2(x_2 - x_1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Так как } \frac{AS}{BS} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ то } \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4}{5}.$$

**12.180.** Сторона треугольника равна 15, сумма двух других сторон равна 27. Найти косинус угла, противолежащего данной стороне, если радиус вписанной в треугольник окружности равен 4.

*Решение.*

Пусть  $a$  — данная сторона треугольника,  $a = 15$ ,  $b$  и  $c$  — две другие стороны,  $b + c = 27$ ,  $c = 27 - b$ . Для определенности будем считать, что  $b > c$ .

Полупериметр треугольника  $p = \frac{a + b + c}{2} = 21$ , его площадь  $S = pr = 84$ .

По формуле Герона  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , таким образом

$$\sqrt{21 \cdot (21-15)(21-b)(21-27+b)} = 84 \Leftrightarrow \sqrt{21 \cdot 6(21-b)(b-6)} = 84 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (21-b)(b-6) = 56 \Leftrightarrow b^2 - 27b + 182 = 0,$$

$$b_1 = 14, b_2 = 13.$$

Имеем  $b = 14$ ,  $c = 13$ . По теореме косинусов

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5}{13}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{13}.$$

**12.181.** Меньшая дуга окружности, стягиваемая хордой  $AB$ , содержит  $\alpha^\circ$ . Через середину  $C$  хорды  $AB$  проведена хорда  $DE$  так, что  $DC : CE = 1 : 3$ . Найти острый угол  $ACD$  и допустимые значения  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть  $AC = BC = 1$ ,  $DC = x$  (рис. 12.50).

Тогда  $CE = 3x$ .

Если  $L$  — середина  $DE$ , то  $OC \perp AB$ ,  $OL \perp DE$ ,  $\angle COL = \angle ACD$  как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами,  $DL = EL = 2x$ ,

$CL = x$ . Так как  $DC \cdot CE = AC \cdot BC$ , то  $x \cdot 3x = 1 \cdot 1$ ;  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

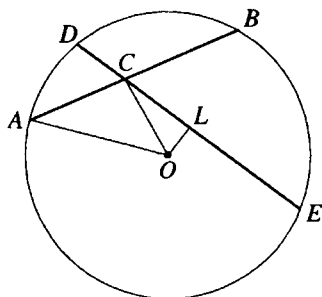


Рис. 12.50

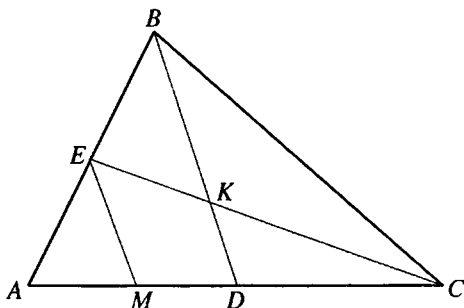


Рис. 12.51

$\angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{\alpha}{2}$  и из  $\triangle ACO$  ( $\angle ACO = 90^\circ$ ):

$$OC = AC \operatorname{ctg} \angle AOC = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Из  $\triangle OLC$  ( $\angle OLC = 90^\circ$ ):  $\sin \angle COL = \frac{CL}{OC} = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$

Таким образом,  $\angle ACD = \angle COL = \operatorname{arcsin} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$

Так как  $\sin \angle COL \leq 1$ , то  $\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}} \leq 1$ ;  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \leq \sqrt{3}$ ;  $\alpha \leq 120^\circ.$

Ответ:  $\operatorname{arcsin} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}, \alpha \leq 120^\circ.$

**12.182.** Медиана  $BD$  треугольника  $ABC$  пересекается с биссектрицей  $CE$  в точке  $K$ . Найти  $CK:KE$ , если  $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$ .

Решение.

Проведем  $EM \parallel BD$  (рис. 12.51).

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \frac{CK}{KE} &= \frac{CD}{DM} = \frac{AD}{DM}; \frac{CK}{KE} - 1 = \frac{AD}{DM} - 1 = \frac{AD - DM}{DM} = \frac{AM}{DM} = \frac{AE}{EB} = \\ &= \frac{AC}{BC} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

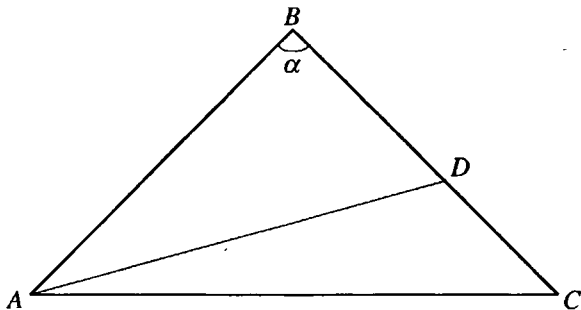


Рис. 12.52

Таким образом,  $\frac{CK}{KE} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + 1 = \frac{\sin \beta + \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \alpha}$ .

Ответ:  $\frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \alpha}$ .

**12.183.** Площадь равнобедренного тупоугольного треугольника равна 8, а медиана, проведенная к его боковой стороне, равна  $\sqrt{37}$ . Найти косинус угла при вершине.

*Решение.*

Пусть  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $AD$  — медиана,  $AD = \sqrt{37}$  (рис. 12.52),  $\angle B = \alpha$ ,  $BD = x$ . Тогда  $AB = 2x$ .

Из  $\triangle ABD$ :

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 AB \cdot BD \cos \angle B;$$

$$37 = 4x^2 + x^2 - 4x^2 \cos \alpha;$$

$$37 = x^2(5 - 4 \cos \alpha).$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB^2 \sin \angle B. \text{ Тогда } 2x^2 \sin \alpha = 8; x^2 = \frac{4}{\sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{\sin \alpha} (5 - 4 \cos \alpha) = 37 \Leftrightarrow 37 \sin \alpha + 16 \cos \alpha + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{74 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{16 \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + 20 = 0 \Leftrightarrow 18 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 37 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 2 = 0;$$

$$1) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2; \quad 2) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{18}.$$

$$\text{Тогда } \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = -\frac{3}{5} \text{ при } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2, \quad \cos \alpha = \frac{323}{325} \text{ при } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{18}.$$

Так как по условию  $\alpha$  — тупой угол, то  $\cos \alpha = -3/5$ .

*Ответ:*  $-3/5$ .

**12.184.** В равнобедренном треугольнике угол при основании равен  $\alpha$ . Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на  $m$ . Найти радиус описанного круга.

*Решение.*

В  $\triangle ABC$  (рис. 12.53)  $AB = BC$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $BD$  — высота,  $O$  — центр вписанного круга.

Тогда по условию  $BO = BD - OD = m$ .  $\angle BAO = \angle DAO = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\angle AOB = \angle OAD + \angle ADO = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ$  как внешний угол треугольника  $AOB$ .

$$\begin{aligned} \text{По теореме синусов, из } \triangle AOB: \quad \frac{AB}{\sin \angle AOB} &= \frac{BO}{\sin \angle BAO} \Rightarrow AB = \\ &= \frac{BO \sin \angle AOB}{\sin \angle BAO} = \frac{m \sin \left( \frac{\alpha}{2} + 90^\circ \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} = m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Тогда радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ,

$$R = \frac{AB}{2 \sin \angle ACB} = \frac{m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \alpha} = \frac{m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{m}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{m}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

**12.185.** В треугольнике известны площадь  $S$ , сторона  $a$  и противолежащий ей угол  $\alpha$ . Найти сумму двух других сторон.

*Решение.*

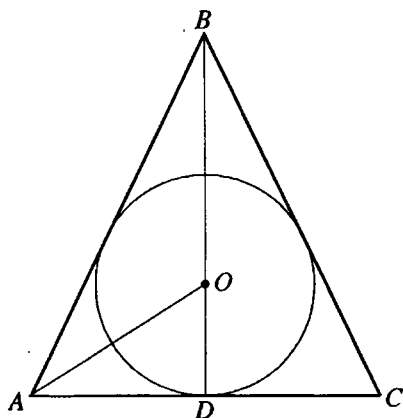


Рис. 12.53

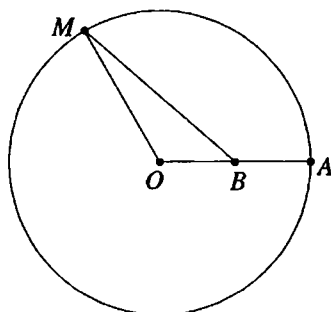


Рис. 12.54

Пусть  $x$  и  $y$  — неизвестные стороны данного треугольника.

$$\text{Тогда } \begin{cases} S = \frac{1}{2} xy \sin \alpha; \\ a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + 2xy \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$(x+y)^2 = a^2 + 2xy \cos \alpha + 2xy = a^2 + 2xy(1 + \cos \alpha) =$$

$$= a^2 + 2 \cdot \frac{2S}{\sin \alpha} \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = a^2 + 4S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow x+y = \sqrt{a^2 + 4S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{a^2 + 4S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}.$$

**12.186.** Пусть  $OA$  — неподвижный радиус окружности с центром в точке  $O$ ;  $B$  — середина радиуса  $OA$ ;  $M$  — произвольная точка окружности. Найти наибольшее значение угла  $OMB$ .

*Решение.*

Пусть  $\angle OMB = \alpha$ ,  $\angle OBM = \beta$  (рис. 12.54).

$$\text{Из } \triangle MOB: \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{OM}{OB} = 2; \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \beta.$$

Наибольшее значение  $\sin \beta$  равно 1, следовательно наибольшее значение  $\sin \alpha$  равно  $1/2$ .

Так как  $OB < OM$ , то  $\alpha < \beta$ , то есть  $\alpha$  не является наибольшим углом треугольника  $MOB$ .



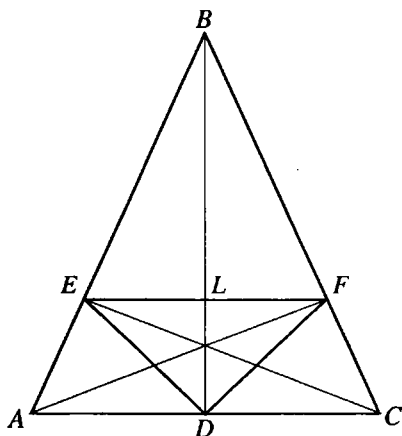


Рис. 12.55

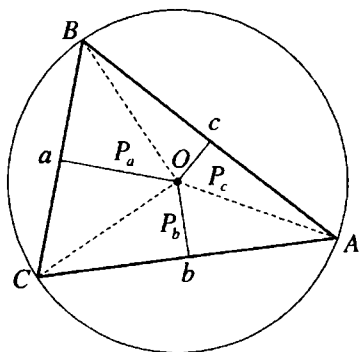


Рис. 12.56

Таким образом,  $0 < \alpha < \pi/2$ , а на промежутке  $(0; \pi/2)$   $y = \sin x$  монотонно возрастает и угол  $\alpha$  принимает наибольшее значение в той же точке, где  $\sin \alpha$  принимает свое наибольшее значение. Отсюда  $\alpha = \pi/6$ .

Ответ:  $\pi/6$ .

**12.187.** В равнобедренном остроугольном треугольнике угол при основании равен  $\alpha$ , а площадь равна  $S$ . Найти площадь треугольника, вершинами которого служат основания высот данного треугольника.

Решение.

В  $\triangle ABC$  (рис. 12.55)  $AB = BC$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ;  $BD$ ,  $AF$ ,  $CE$  — высоты.

Пусть  $AB = a$ , тогда из  $\triangle ADB$  ( $\angle ADB = 90^\circ$ ):  $AD = a \cos \alpha$ ,  $BD = a \sin \alpha$ .

$AC = 2AD = 2a \cos \alpha$ .

В  $\triangle AEC$  ( $\angle AEC = 90^\circ$ ):

$AE = AC \cos \angle BAC = 2a \cos^2 \alpha \Rightarrow BE = AB - AE = a(1 - 2\cos^2 \alpha) = -a \cos 2\alpha$ .

Пусть  $L$  — точка пересечения  $EF$  и  $BD$ . Так как  $\triangle EBF \sim \triangle ABC$ , то

$$\frac{EF}{AC} = \frac{BL}{BD} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow EF = \frac{AC \cdot BE}{AB} = \frac{2a \cos \alpha \cdot (-a \cos 2\alpha)}{a} =$$

$$= -2a \cos \alpha \cos 2\alpha; \quad BL = \frac{BD \cdot BE}{AB} = -a \sin \alpha \cos 2\alpha.$$

$$DL = BD - BL = a \sin \alpha + a \sin \alpha \cos 2\alpha = a \sin \alpha (1 + \cos 2\alpha) =$$

$$= 2a \sin \alpha \cos^2 \alpha.$$

$$S_{\Delta EDF} = \frac{1}{2} EF \cdot DL = -2a^2 \sin \alpha \cos^3 \alpha \cos 2\alpha = -a^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= -\frac{1}{2} a^2 \sin 4\alpha \cos^2 \alpha.$$

$$S = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB^2 \sin \angle ABC = \frac{1}{2} a^2 \sin^2 \alpha.$$

Таким образом  $a^2 = \frac{2S}{\sin 2\alpha} = \frac{S}{\sin \alpha \cos \alpha}.$

$$S_{\Delta EDF} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \sin 4\alpha \cos^2 \alpha = -\frac{1}{2} S \sin 4\alpha \operatorname{ctg} \alpha.$$

Ответ:  $-\frac{1}{2} S \sin 4\alpha \operatorname{ctg} \alpha.$

**12.188.** Пусть  $a, b, c$  — длины сторон остроугольного треугольника;  $A, B, C$  — углы, противолежащие сторонам;  $P_a, P_b, P_c$  — расстояния от центра описанной окружности до соответствующих сторон. В предположении, что  $A < B < C$ , расположить в возрастающем порядке  $P_a, P_b, P_c$ .

*Решение.*

Пусть  $R$  — радиус описанной окружности (рис. 12.56), тогда

$$P_c^2 = R^2 - \frac{c^2}{4}; P_b^2 = R^2 - \frac{b^2}{4}; P_a^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Так как  $A < B < C$ , то  $a < b < c \Rightarrow P_c < P_b < P_a$ .

Ответ:  $P_a > P_b > P_c$ .

**12.189.** Луч, проведенный из вершины равностороннего треугольника, делит его основание в отношении  $m : n$ . Найти тупой угол между лучом и основанием.

*Решение.*

Луч  $BD$  делит сторону  $AC$  равностороннего треугольника  $ABC$  в отношении  $m : n$  (рис. 12.57).

Пусть  $\angle BDC = \alpha$  — острый угол между лучом и основанием и будем

считать, что  $n > m$ . Тогда  $\frac{AD}{DC} = \frac{m}{n}$ .

Если  $AD = mx$ , то  $DC = nx$ ,  $AB = AC = (m + n)x$ .

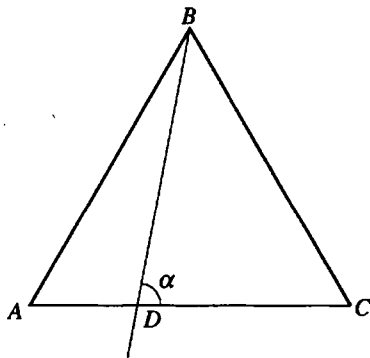


Рис. 12.57

$\angle A = \frac{\pi}{3}, \angle ABD = \alpha - \frac{\pi}{3}$ . По теореме синусов, из  $\triangle ADB$ :

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin \angle ADB} &= \frac{AD}{\sin \angle ABD} \Rightarrow \frac{(m+n)x}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{mx}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin \alpha} \\ &= \frac{m}{m+n} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{m}{m+n} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{m}{m+n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha = 1 - \frac{2m}{m+n} = \frac{n-m}{n+m} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \cdot \frac{n+m}{n-m}. \end{aligned}$$

Отсюда,  $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} \cdot \frac{n+m}{n-m}\right)$  и искомый тупой угол равен

$$\pi - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} \cdot \frac{n+m}{n-m}\right).$$

*Ответ:*  $\pi - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} \cdot \frac{n+m}{n-m}\right)$ .

**12.190.** Через вершину равностороннего треугольника проведена прямая, делящая основание в отношении 2 : 1. Под какими углами она наклонена к боковым сторонам треугольника?

*Решение.*

Прямая  $BD$  делит сторону  $AC$  равностороннего треугольника  $ABC$  в отношении 2 : 1,  $CD : AD = 2 : 1$ .

Пусть  $AD = x$ ,  $\angle ABD = \alpha$ , тогда  $CD = 2x$ ,  $AB = 3x$ ,  $\angle ADB = 120^\circ - \alpha$ . Из  $\triangle ADB$ :

$$\begin{aligned} \frac{\sin \angle ADB}{\sin \angle ABD} &= \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{\sin(120^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = 3 \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha}{\sin \alpha} = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2} = 3 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\angle ABD = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{5}$ ,  $\angle CBD = 60^\circ - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{5}$ .

*Ответ:*  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{5}, 60^\circ - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{5}$ .

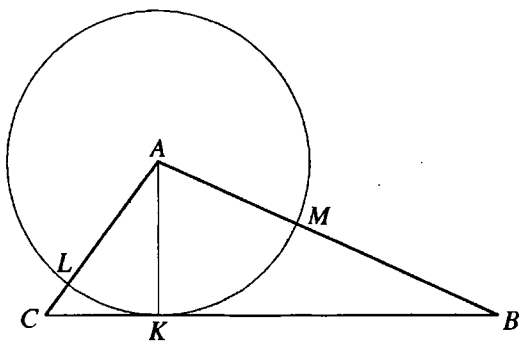


Рис. 12.58

**12.191.** Основание треугольника равно  $a$ , а углы при основании равны  $\alpha$  и  $\beta$  радианам. Из противоположной вершины треугольника радиусом, равным его высоте, проведена окружность. Найти длину дуги этой окружности, заключенной внутри треугольника.

*Решение.*

Пусть в  $\triangle ABC$  (рис. 12.58)  $BC = a$ ,  $\angle C = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $AK$  — высота,  $AK = H$ .

$$\text{В } \triangle AKC \left( \angle AKC = \frac{\pi}{2} \right): CK = H \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\text{Из } \triangle BKA \left( \angle BKA = \frac{\pi}{2} \right): BK = H \operatorname{ctg} \beta.$$

Так как  $CK + BK = BC$ , то  $H \operatorname{ctg} \alpha + H \operatorname{ctg} \beta = a$ ,

$$\frac{H \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = a, H = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Длина дуги  $l = \gamma R$ , где  $\gamma$  — радианная мера дуги,  $R$  — ее радиус;  $\gamma = \angle BAC = \pi - \alpha - \beta$ ,  $R = H$ ,

$$l = a(\pi - \alpha - \beta) \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$\text{Ответ: } a(\pi - \alpha - \beta) \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

**12.192.** Даны две стороны  $a$  и  $b$  треугольника и биссектриса  $l$  угла между ними. Найти этот угол.

*Решение.*

Пусть  $BD$  — биссектриса  $\triangle ABC$ ,  $BD = l$ ,  $BC = a$ ,  $AB = b$  (рис. 12.59),  $\angle ABC = \alpha$ .

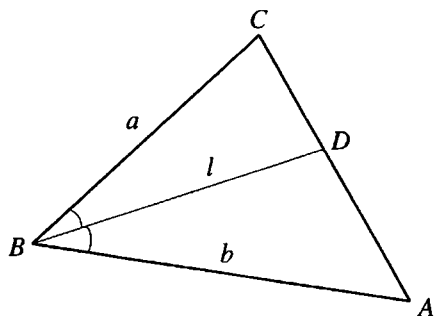


Рис. 12.59

Тогда  $\angle ABD = \angle CBD = \frac{\alpha}{2}$ .

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CBD} \Rightarrow \frac{ab}{2} \sin \alpha = \frac{al}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{bl}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 2ab \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \\ = l \sin \frac{\alpha}{2} \cdot (a+b) \Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{l(a+b)}{2ab}; \alpha = 2 \arccos \frac{l(a+b)}{2ab}.$$

Ответ:  $2 \arccos \frac{l(a+b)}{2ab}$ .

**12.193.** Основание треугольника равно 4, а его медиана равна  $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ . Один из углов при основании равен  $15^\circ$ . Показать, что острый угол между основанием треугольника и его медианой равен  $45^\circ$ .

*Решение.*

Пусть  $BD$  — медиана  $\Delta ABC$ ,  $BD = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ ,  $AC = 4$ ,  $\angle A = 15^\circ$  (рис. 12.60),  $\angle ADB = x$ .

Тогда  $\angle ABD = 180^\circ - (x + 15^\circ)$ .

По теореме синусов  
из  $\Delta ABD$ :

$$\frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{BD}{\sin \angle A} \Rightarrow \frac{2}{\sin(x+15^\circ)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sin 15^\circ} \Leftrightarrow \sin(x+15^\circ) = \frac{2 \sin 15^\circ}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}.$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

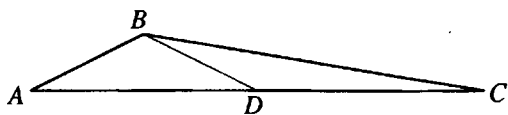


Рис. 12.60

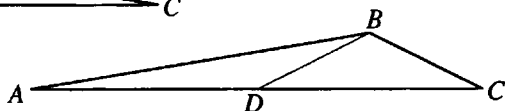


Рис. 12.60,а

$$\text{Отсюда } \sin(x+15^\circ) = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x+15^\circ = 30^\circ \text{ или } x+15^\circ = 150^\circ; x = 15^\circ \text{ или } x = 135^\circ.$$

Таким образом, существует два треугольника, удовлетворяющих данным условиям. В первом из них меньший угол между медианой и основанием треугольника — угол  $ADB$  равен  $15^\circ$  (рис. 12.60), а во втором —  $\angle BDC = 180^\circ - \angle ADB = 45^\circ$  (рис. 12.60, а).

**12.194.** В трапеции меньшее основание равно 2, прилежащие углы — по  $135^\circ$ . Угол между диагоналями, обращенный к основанию, равен  $150^\circ$ . Найти площадь трапеции.

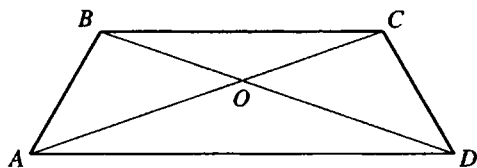


Рис. 12.61

*Решение.*

Пусть в трапеции  $ABCD$   $BC = 2$ ,  $\angle ABC = \angle DCB = 135^\circ$ ,  $O$  — точка пересечения диагоналей,  $\angle BOC = 150^\circ$  (рис. 12.61).

В  $\triangle BOC$ :  $\angle OCB = \angle OBC = 15^\circ$ , тогда  $\angle BAC = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB) = 30^\circ$ .

По теореме синусов из  $\triangle ABC$ :

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{BC}{\sin \angle BAC} \Rightarrow AC = \frac{BC \sin \angle ABC}{\sin \angle BAC} = \frac{2 \sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{2}.$$

$$S_{\triangle ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \angle BOC = \frac{1}{2} AC^2 \sin \angle BOC = \frac{1}{2} (2\sqrt{2})^2 \sin 150^\circ = 2.$$

*Ответ:* 2.

**12.195.** Доказать, что если биссектриса одного из углов треугольника равна произведению заключающих его сторон, деленному на их сумму, то этот угол равен  $120^\circ$ .

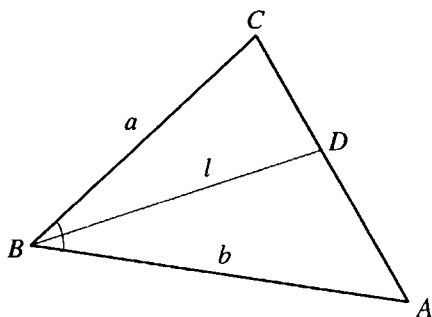


Рис. 12.62

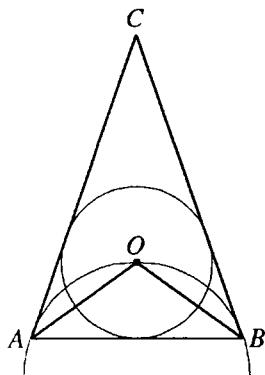


Рис. 12.63

*Решение.*

Пусть  $BD$  — биссектриса  $\triangle ABC$  (рис.12.62),  $BC = a$ ,  $AB = b$ ,  $BD = l$ ,  $\angle ABC = \alpha$ .

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} \Rightarrow \frac{ab}{2} \sin \alpha = \frac{al}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{bl}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ab \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = l(a+b) \sin \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{l(a+b)}{2ab}.$$

По условию  $l = \frac{ab}{a+b}$  и  $0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$ , следовательно  $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ ,

$\frac{\alpha}{2} = 60^\circ$ ,  $\alpha = 120^\circ$ , что и требовалось доказать.

**12.196.** Известно, что в треугольнике  $ABC$   $AB = a$ ,  $\angle C = \alpha$ . Найти радиус окружности, проведенной через вершины  $A$ ,  $B$  и центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр окружности, вписанной в  $\triangle ABC$  (рис.12.63).

$$\angle BAC + \angle ABC = 180^\circ - \alpha.$$

$$\angle AOB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Радиус окружности, описанной около  $\triangle AOB$ :

$$R = \frac{AB}{2 \sin \angle AOB} = \frac{a}{2 \sin \left( 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ:  $\frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$ .

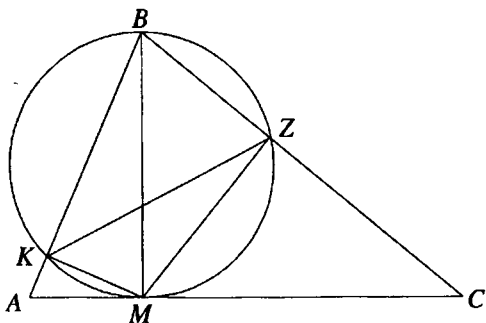


Рис. 12.64

**12.197.** В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BM$  и на ней, как на диаметре, построена окружность, пересекающая сторону  $AB$  в точке  $K$ , а сторону  $BC$  — в точке  $Z$ . Найти отношение площади треугольника  $KZM$  к площади треугольника  $ABC$ , если  $\angle A = \alpha$  и  $\angle C = \beta$ .

*Решение.*

$$\angle ABC = 180^\circ - (\alpha + \beta) \text{ (рис. 12.64)}$$

$\triangle AMB$  и  $\triangle MKB$ ,  $\triangle CMB$  и  $\triangle MZB$  — прямоугольные с общими острыми углами при вершине  $B$ .

Таким образом,  $\angle KMB = \angle A = \alpha$ ,  $\angle ZMB = \angle C = \beta$ ,  $\angle KMZ = \alpha + \beta$ .

Пусть  $BM = 1$ , тогда из  $\triangle AMB$  ( $\angle AMB = 90^\circ$ ):

$$AB = \frac{BM}{\sin \angle A} = \frac{1}{\sin \alpha}; \text{ в } \triangle CMB (\angle CMB = 90^\circ): BC = \frac{BM}{\sin \angle C} = \frac{1}{\sin \beta};$$

Из  $\triangle BKM$  ( $\angle BKM = 90^\circ$ ):  $MK = BM \cos \angle KMB = \cos \alpha$ ;

В  $\triangle BZM$  ( $\angle BZM = 90^\circ$ ):  $MZ = BM \cos \angle ZMB = \cos \beta$ . Отсюда

$$\frac{S_{\triangle KMZ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} MK \cdot MZ \sin \angle KMZ}{\frac{1}{2} BA \cdot BC \sin \angle ABC} = \frac{\cos \alpha \cos \beta \sin(\alpha + \beta)}{\frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\sin \beta} \sin(180^\circ - (\alpha + \beta))}$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta = \frac{1}{4} \sin 2\alpha \sin 2\beta.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{4} \sin 2\alpha \sin 2\beta$ .

**12.198.** В ромб вписана окружность. В образовавшийся криволинейный треугольник (с острым углом) снова вписана окружность. Найти ее радиус, если высота ромба равна  $h$ , а острый угол равен  $\alpha$ .



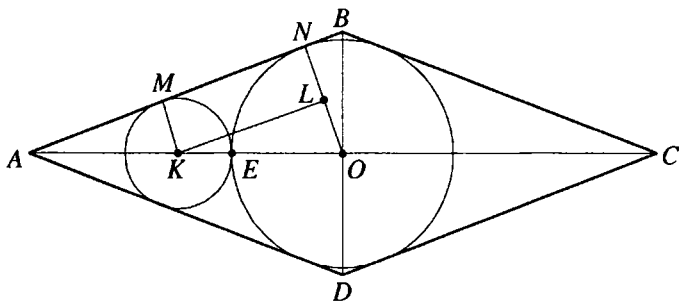


Рис. 12.65

*Решение.*

Пусть в ромбе  $ABCD$  (рис. 12.65)  $\angle BAD = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,  $O$  — точка пересечения диагоналей — центр вписанной окружности,  $K$  — центр окружности, вписанной в криволинейный треугольник.

$N$  и  $M$  — точки касания построенных окружностей со стороной  $AB$  ромба.

Тогда  $KM \perp AB$ ,  $ON \perp AB$ ,  $ON = \frac{h}{2}$ .

Пусть  $MK = r$ . Проведем  $KL \perp ON$ .

Тогда  $KL \parallel AB$ ,  $\angle OKL = \angle OAB = \frac{\alpha}{2}$ ,  $OL = ON - KM = \frac{h}{2} - r$ ,  $OK = \frac{h}{2} + r$ .

В  $\triangle OLK$  ( $\angle OLK = 90^\circ$ ):  $\sin \angle OKL = \frac{OL}{OK}$ .

Тогда  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{h}{2} - r}{\frac{h}{2} + r} \Leftrightarrow \left(\frac{h}{2} + r\right) \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2} - r \Leftrightarrow r \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r = \frac{h}{2} \cdot \frac{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{h}{2} \cdot \frac{1 - \cos \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{h}{2} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right).$$

*Ответ:*  $\frac{h}{2} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$ .

**12.199.** Основание треугольника равно  $a$ , а прилежащие к нему углы содержат  $45^\circ$  и  $15^\circ$ . Из вершины, противоположной основанию,

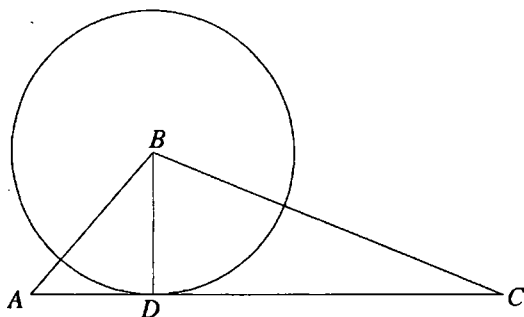


Рис. 12.66

проведена окружность радиусом, равным высоте, опущенной на это основание. Найти площадь части соответствующего круга, заключенную внутри треугольника.

*Решение.*

Пусть в  $\triangle ABC$  (рис. 12.66)  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle C = 15^\circ$ ,  $AC = a$ ,  $BD$  — высота и радиус круга, о котором говорится в условии задачи,  $\angle ABC = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 120^\circ$ .

Таким образом, искомая площадь равна  $1/3$  площади построенного круга.

Пусть  $BD = h$ .

Из  $\triangle ABD$  ( $\angle ADB = 90^\circ$ ,  $\angle A = 45^\circ$ ):  $AD = BD = h$ .

В  $\triangle CDB$  ( $\angle CDB = 90^\circ$ ):  $CD = h \operatorname{ctg} 15^\circ = h \operatorname{tg} 75^\circ$ .

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$AD + CD = AC.$$

$$\text{Отсюда } h + h \operatorname{tg} 75^\circ = a \Rightarrow h = \frac{a}{1 + \operatorname{tg} 75^\circ} = \frac{a}{3 + \sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{a(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{3}}.$$

Искомая площадь

$$S = \frac{1}{3} \pi h^2 = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^2 (\sqrt{3} - 1)^2}{12} = \frac{\pi a^2 (4 - 2\sqrt{3})}{36} = \frac{\pi a^2 (2 - \sqrt{3})}{18}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi a^2 (2 - \sqrt{3})}{18}.$$

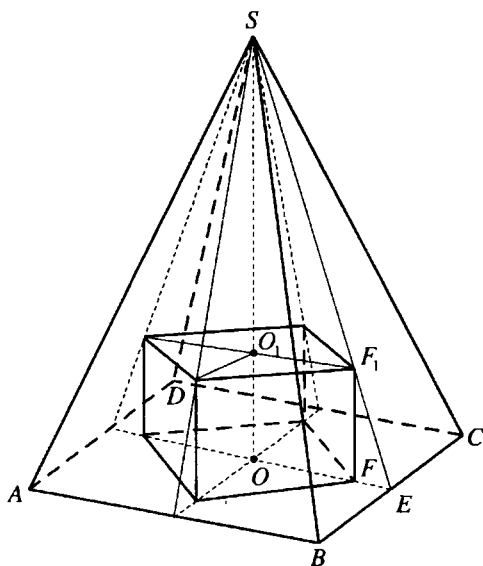


Рис. 12.67

**12.200.** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна  $a$ , боковое ребро составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . В эту пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на апофемах пирамиды, четыре — на основании пирамиды. Найти ребро куба.

*Решение.*

Пусть в правильной пирамиде  $SABCD$  (рис. 12.67)  $AB = a$ ,  $SO$  — высота,  $\angle SCO = \alpha$ ,  $SE$  — апофема,  $F$  и  $F_1$  — вершины куба, о котором говорится в условии задачи. Тогда ребро куба  $FF_1$  перпендикулярно  $OE$ .

$$CO = \frac{a\sqrt{2}}{2}, OE = \frac{a}{2}. \text{ В } \triangle SOC (\angle SOC = \pi/2): SO = CO \operatorname{tg} \angle SOC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Пусть ребро куба равно  $x$ . Тогда  $OF = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ ,  $EF = OE - OF = \frac{a - x\sqrt{2}}{2}$ .

Прямоугольные треугольники  $SOE$  и  $F_1FE$  подобны, следовательно

$$\frac{FF_1}{SO} = \frac{FE}{OE} \Rightarrow \frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha} = \frac{a - x\sqrt{2}}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}{2} (a - x\sqrt{2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}{2(1 + \operatorname{tg} \alpha)}.$$

$$\frac{a\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}{2(1 + \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{a\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}{2\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha\right)} = \frac{a\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{a \sin \alpha}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a \sin \alpha}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$$

**12.201.** Площадь боковой грани правильной двенадцатиугольной пирамиды равна  $S$ . Плоский угол при вершине равен  $\alpha$ . Найти объем пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $C$  — вершина правильной двенадцатиугольной пирамиды (рис. 12.68),  $AB$  — сторона ее основания,  $\angle ACB = \alpha$ ,  $S_{\triangle ACB} = S$ ,  $CO$  — высота пирамиды,  $CA = d$ ,  $\angle CAO = x$ .

$$\text{Тогда } \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha = S, d = \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}}$$

$$\angle CAB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

В  $\triangle AOC$  ( $\angle AOC = 90^\circ$ ):

$$AO = d \cos x, CO = d \sin x.$$

$$S_{\text{осн.}} = 12S_{\triangle AOB} = 12 \cdot \frac{1}{2} AO^2 \sin \angle AOB = 6d^2 \cos^2 x \sin 30^\circ = 3d^2 \cos^2 x.$$

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot CO = d^3 \cos^2 x \sin x.$$

$\angle CAO$  — угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания,  $\angle OAB$  — угол между проекцией бокового ребра на плоскость основания и стороной основания,  $\angle CAB$  — угол между боковым ребром и стороной основания.

Тогда  $\cos \angle CAB = \cos \angle CAO \cdot \cos \angle OAB$ ;

$$\cos x = \frac{\cos \angle CAB}{\cos \angle OAB} = \frac{\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos 75^\circ} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin 15^\circ} \Rightarrow V = d^3 \cos^2 x \sqrt{1 - \cos^2 x} =$$

$$= \frac{2S}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 15^\circ} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 15^\circ}} = \frac{2S \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha \sin^2 15^\circ} \cdot \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}} \times$$

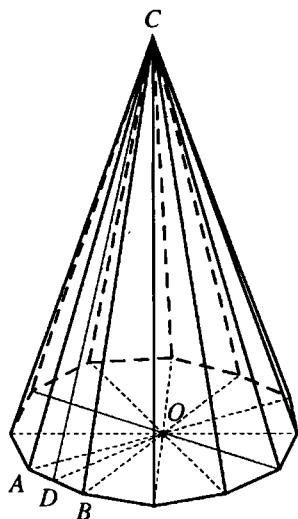


Рис. 12.68

$$\begin{aligned}
 & \times \sqrt{\frac{\sin^2 15^\circ - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 15^\circ}} = \frac{S \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin^3 15^\circ} \cdot \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha} \left( \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} - \frac{1 - \cos \alpha}{2} \right)} = \\
 & = \frac{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sin^3 15^\circ} \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha} \frac{\cos \alpha - \cos 30^\circ}{2}} = \\
 & = \frac{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sin^3 15^\circ} \sqrt{\frac{2S \sin \left( 15^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( 15^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}} = \\
 & = \frac{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin^3 15^\circ} \sqrt{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin \left( 15^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( 15^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{S}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin^3 15^\circ} \sqrt{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin \left( 15^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( 15^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}$ .

**12.202.** В конус помещен шар так, что их поверхности касаются. Радиус шара равен  $R$ , а угол при вершине осевого сечения конуса равен  $2\alpha$ . Найти объем тела, ограниченного поверхностями шара и конуса.

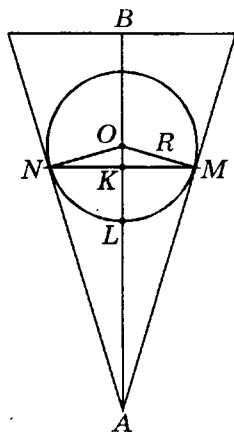


Рис. 12.69

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности конуса и шара (рис. 12.69).

Пусть  $A$  — вершина конуса,  $AB$  — его высота,  $O$  — центр шара,  $O$  принадлежит  $AB$ ,  $N$  и  $M$  — точки касания большого круга шара с образующими конуса,  $K$  — точка пересечения  $AO$  и  $NM$ ,  $L$  — точка пересечения поверхности шара и  $AO$ . Тогда  $ON=OM=OL=R$ ,  $\angle ONA = 90^\circ$ ,  $NK \perp AO$ ,  $K$  — середина  $NM$ ,  $\angle OAN = \angle ONK = \alpha$ .

Искомый объем  $V = V_2 - V_1$ , где  $V_2$  — объем конуса, осевое сечение которого  $\triangle NAM$ ,  $V_1$  — объем сегмента шара, осевое сечение которого — круговой сегмент  $NLM$  с высотой  $KL$ .

В  $\triangle OKN$  ( $\angle OKN = 90^\circ$ ):  $OK = ON \sin \angle ONK = R \sin \alpha$ ;  
 $NK = ON \cos \angle ONK = R \cos \alpha$ .

Из  $\triangle AKN$  ( $\angle AKN = 90^\circ$ ):  $AK = NK \operatorname{ctg} \angle KAN = \frac{R \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$ .

$$KL = OL - OK = R - R \sin \alpha = R(1 - \sin \alpha)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi \cdot NK^2 \cdot AK - \pi \cdot KL^2 \left( ON - \frac{KL}{3} \right) = \frac{1}{3} \pi R^3 \cos^2 \alpha \cdot \frac{R \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \\ &- \pi R^2 (1 - \sin \alpha)^2 \left( R - \frac{R(1 - \sin \alpha)}{3} \right) = \frac{1}{3} \pi R^2 \left( \frac{\cos^4 \alpha}{\sin \alpha} - (1 - \sin \alpha)^2 (2 + \sin \alpha) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \pi R^3 \left( \frac{(1 - \sin^2 \alpha)^2}{\sin \alpha} - (1 - \sin \alpha)^2 (2 + \sin \alpha) \right) = \frac{1}{3} \pi R^3 (1 - \sin \alpha)^2 \left( \frac{(1 + \sin \alpha)^2}{\sin \alpha} - \right. \\ &\left. - (2 + \sin \alpha) \right) = \frac{\pi R^3 (1 - \cos(90^\circ - \alpha))^2}{3 \sin \alpha} (1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha) = \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\sin^4 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\sin^4 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha}$ .

**12.203.** Найти объем и боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если плоскость, проходящая через сторону основания  $a$  и середину ее высоты, наклонена к основанию под углом  $\varphi$ .

*Решение.*

Пусть в правильной пирамиде  $SABC$  (рис. 12.70)  $AB = a$ ,  $SO$  — высота,  $M$  — середина  $SO$ ,  $\triangle AKB$  — сечение из условия задачи,  $D$  — середина  $AB$ .

Тогда  $OD \perp AB$ ,  $OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ .

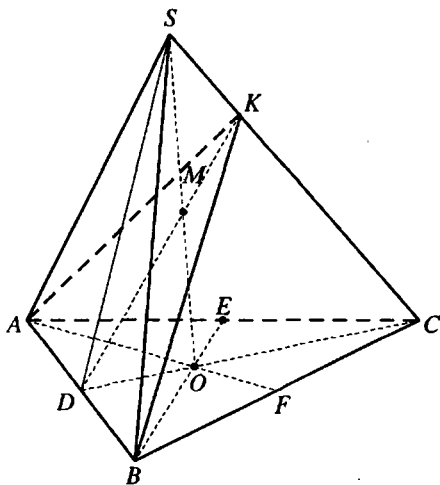


Рис. 12.70

Прямая  $DO$  — проекция прямой  $DM$  на плоскость  $ABC$ . Тогда  $DM \perp AB$ .  
 Таким образом,  $\angle MDO$  — угол наклона секущей плоскости к плоскости основания пирамиды,  $\angle MDO = \varphi$ .

$$\text{В } \triangle DOM (\angle DOM = 90^\circ): MO = DO \operatorname{tg} \angle MDO = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \varphi.$$

$$SO = 2MO = \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \varphi.$$

$$\text{Объем пирамиды: } V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \varphi = \frac{a^3}{12} \operatorname{tg} \varphi.$$

Из  $\triangle DOS (\angle DOS = 90^\circ)$ :

$$SD = \sqrt{DO^2 + SO^2} = a \sqrt{\frac{4 \operatorname{tg}^2 \varphi + 1}{12}} = \frac{a}{6} \sqrt{3(4 \operatorname{tg}^2 \varphi + 1)}.$$

Площадь боковой поверхности

$$S_{\text{б}} = 3S_{\triangle ASB} = \frac{3}{2} AB \cdot SD = \frac{a^2}{4} \sqrt{3(4 \operatorname{tg}^2 \varphi + 1)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^3}{12} \operatorname{tg} \varphi; \frac{a^2}{4} \sqrt{3(4 \operatorname{tg}^2 \varphi + 1)}.$$

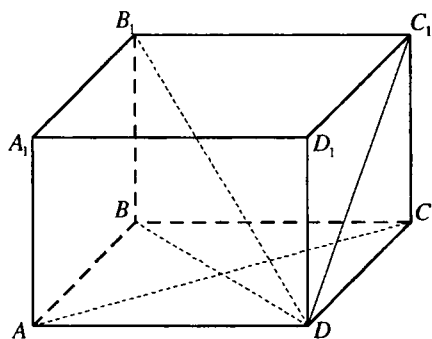


Рис. 12.71

$\angle B_1DC_1 = \alpha$ . В  $\triangle B_1C_1D (\angle B_1C_1D = 90^\circ)$ :  $DC_1 = B_1C_1 \operatorname{ctg} \angle B_1DC_1 = a \operatorname{ctg} \alpha$ .  
 Из  $\triangle DC_1C (\angle C_1CD = 90^\circ)$ :

$$CC_1 = \sqrt{DC_1^2 - CD^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - a^2} = a \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1} = \frac{a \sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Объем призмы } V = S_{ABCD} \cdot CC_1 = \frac{a^3 \sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^3 \sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin \alpha}.$$

**12.204.** Найти объем правильной четырехугольной призмы, если угол между диагональю призмы и боковой гранью равен  $\alpha$ , а сторона основания равна  $a$ .

*Решение.*

В правильной призме  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  (рис. 12.71)  $B_1C_1 = CD = a$ .

$B_1C_1 \perp D_1C_1$ ,  $B_1C_1 \perp C_1C$ . Тогда  $B_1C_1$  перпендикулярно плоскости грани  $DD_1C_1C$  и, следовательно,  $DC_1$  — проекция  $DB_1$  на эту боковую грань призмы и

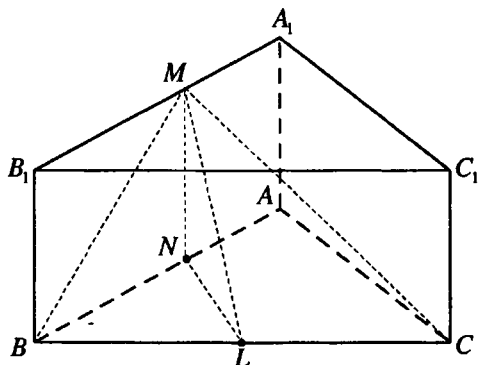


Рис. 12.72

**12.205.** В основании прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ) лежит прямоугольный треугольник  $ABC$ , у которого больший катет  $AB$  равен  $a$ , а противолежащий ему угол  $C$  равен  $\alpha$ . Гипотенуза  $BC$  является диаметром основания конуса, вершина которого лежит на ребре  $A_1B_1$ . Найти высоту конуса, если  $AA_1 = a/2$ .

*Решение.*

Пусть  $M$  — вершина,  $L$  — центр основания,  $MB$  и  $MC$  — образующие конуса (рис. 12.72) из условия задачи. Конус размещается так, что его высота  $ML$  перпендикулярна  $BC$ . Опустим из точки  $M$  перпендикуляр  $MN$  на плоскость  $ABC$ . Тогда  $MN \parallel AA_1$ ,  $MN \parallel AA_1$ ,  $MN = AA_2 = \frac{\alpha}{2}$ ,

$NL$  — проекция  $ML$  на плоскость  $ABC$  и  $NL \perp BC$ .

$$\angle BNL = \angle ACB = \alpha.$$

В  $\triangle BAC$  ( $\angle BAC = 90^\circ$ ):

$$BC = \frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{a}{\sin \alpha}. \quad LB = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

$$\text{В } \triangle BLN \text{ (} \angle BLN = 90^\circ \text{): } LN = BL \operatorname{ctg} \angle BNL = \frac{a \operatorname{ctg} \alpha}{2 \sin \alpha}.$$

Из  $\triangle MNL$  ( $\angle MNL = 90^\circ$ ):

$$ML = \sqrt{LN^2 + MN^2} = \sqrt{\frac{a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4 \sin^2 \alpha} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha}}{2 \sin \alpha}.$$

*Ответ:*  $\frac{a \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha}}{2 \sin \alpha}$ .



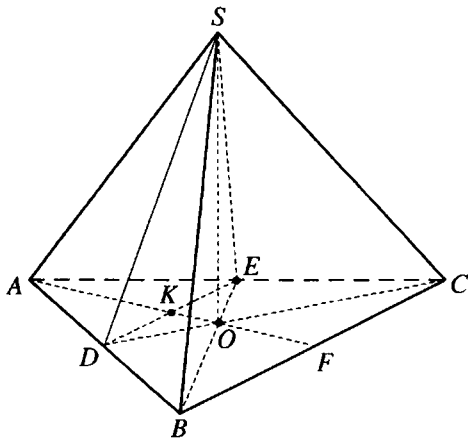


Рис. 12.73

**12.206.** Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведено сечение. Найти площадь сечения и объем пирамиды, если известны сторона  $a$  основания и угол  $\alpha$  между сечением и основанием.

*Решение.*

Пусть  $D$  и  $E$  — середины сторон  $AB$  и  $AC$  основания правильной пирамиды  $SABC$  (рис. 12.73),  $\Delta DSE$  — сечение этой пирамиды,  $SO$  — высота пирамиды,  $K$  — точка пересечения  $AO$  и  $DE$ . Тогда  $OK \perp DE$ ,

$$DE = \frac{a}{2}, AK = \frac{a\sqrt{3}}{4}, OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}, OK = OA - AK = \frac{a\sqrt{3}}{12}.$$

Прямая  $KO$  — проекция  $KS$  на плоскость основания, поэтому,  $KS \perp DE$   $\angle SKO$  — угол между сечением и основанием,  $\angle SKO = \alpha$ .

$\Delta DOE$  — проекция  $\Delta DSE$  на плоскость основания пирамиды, следовательно

$$S_{\Delta DSE} = \frac{S_{\Delta DOE}}{\cos \angle SKO} = \frac{\frac{1}{2} DE \cdot OK}{\cos \alpha} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{48 \cos \alpha}.$$

$$\text{В } \Delta SOK (\angle SOK = 90^\circ): SO = OK \operatorname{tg} \angle SKO = \frac{a\sqrt{3}}{12} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Объем пирамиды: } V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{48}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^2 \sqrt{3}}{48 \cos \alpha}; \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{48}.$$

12.207. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковое ребро опущен перпендикуляр, равный  $p$ . Найти объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABC$  (рис. 12.74),  $OM \perp SA$ ,  $OM = p$ ,  $AL$  — высота  $\triangle ABC$ .

В плоскости  $ABC$  через точку  $O$  проведем  $FK$  параллельно  $BC$ .

Прямая  $AL$  — проекция  $SA$

на плоскость  $ABC$ ,  $AL \perp BC$ . Таким образом,  $SA \perp BC$ .  $SA \perp BC$ ,  $FK \parallel BC$ , отсюда  $SA \perp FK$ .

$SA \perp FK$ ,  $SA \perp OM$ . Следовательно, плоскость  $MFK$  перпендикулярна ребру  $SA$ ,  $O$  — центр правильного  $\triangle ABC$  и  $FK \parallel BC \Rightarrow O$  — середина  $FK \Rightarrow MO$  — высота и медиана  $\triangle FMK \Rightarrow \triangle FMK$  — равнобедренный,  $\angle FMO = \frac{1}{2} \angle FMK = \frac{\alpha}{2}$ .

$$\text{В } \triangle FOM (\angle FOM = 90^\circ): FO = MO \operatorname{tg} \angle FMO = p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\triangle ALC \sim \triangle AOF \text{ и так как } AL = \frac{3}{2} AO, \text{ то } CL = \frac{3}{2} FO = \frac{3p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2}.$$

$$BC = 2CL = 3p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, S_{\triangle ABC} = \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9p^2 \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{4}.$$

Пусть  $\angle SAO = \beta$ .

$$\text{В } \triangle FOM (\angle FOM = 90^\circ): \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{FO}{MO}.$$

$$\text{Из } \triangle AMO (\angle AMO = 90^\circ): \sin \beta = \frac{MO}{AO}.$$

$$\text{Тогда } \sin \beta \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{MO}{AO} \cdot \frac{FO}{MO} = \frac{FO}{AO} = \operatorname{tg} \angle FAO = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

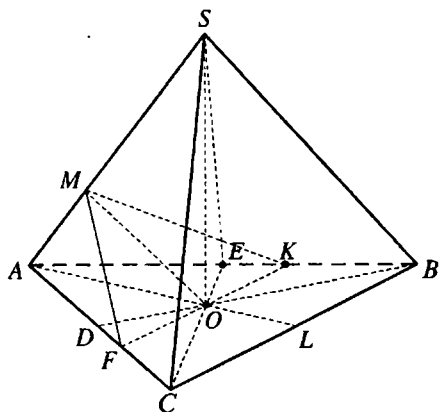


Рис. 12.74

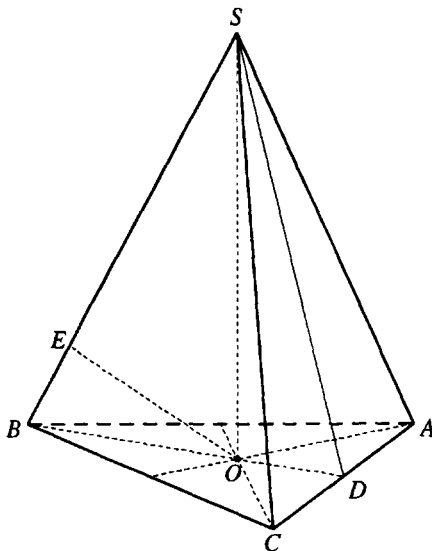


Рис. 12.75

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{\sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

$OM$  — высота прямоугольного  $\triangle AOS \Rightarrow \angle MOS = \angle SAO = \beta$ .

$$\text{В } \triangle SMO (\angle SMO = 90^\circ): SO = \frac{OM}{\cos \angle MOC} = \frac{p \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}.$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{9p^2 \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{4} \cdot \frac{p \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}} = \frac{9p^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}}{4 \sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{9p^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}}{4 \sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}.$$

**12.208.** Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковое ребро опущен перпендикуляр, равный  $p$ . Найти объем пирамиды.

ды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABC$  (рис. 12.75)  $OE \perp BS$ ,  $OE = p$ ,  $D$  — середина  $AC$ . Тогда  $\angle ODS = \alpha$ .

$$\text{Пусть } AC = a. \text{ Тогда } OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}, OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}, S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{В } \Delta DOS (\angle DOS = 90^\circ): SO = OD \operatorname{tg} \angle ODS = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot OS = \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{24}.$$

$$\text{В } \Delta BOS (\angle BOS = 90^\circ): BS = \sqrt{BO^2 + SO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{12} \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$S_{\Delta BOS} = \frac{1}{2} BO \cdot SO = \frac{1}{2} BS \cdot OE \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2\sqrt{3}} \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{6} \operatorname{tg} \alpha = \frac{p\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{2\sqrt{3}};$$

$$a = \frac{\sqrt{3}p\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow V = \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{24} = \frac{\sqrt{3}p^3 \sqrt{(4 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^3}}{8 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{\sqrt{3}p^3 \sqrt{(4 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^3}}{8 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

**12.209.** Найти боковую поверхность и объем прямого параллелепипеда, если его высота равна  $h$ , диагонали составляют с основанием углы  $\alpha$  и  $\beta$ , а основанием служит ромб.

*Решение.*

Пусть ромб  $ABCD$  — основание прямой призмы

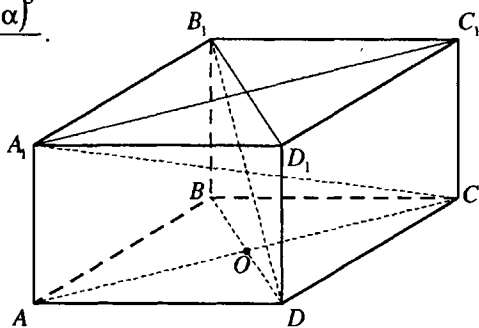


Рис. 12.76

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 12.76),  $AA_1 = BB_1 = h$ ,  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  ромба,  $\angle A_1 CA = \alpha$ ,  $\angle B_1 DB = \beta$ .

В  $\triangle B_1 BD$  ( $\angle B_1 BD = 90^\circ$ ):  $BD = BB_1 \operatorname{ctg} \angle B_1 DB = h \operatorname{ctg} \beta$ .

Из  $\triangle A_1 AC$  ( $\angle A_1 AC = 90^\circ$ ):  $AC = AA_1 \operatorname{ctg} \angle A_1 CA = h \operatorname{ctg} \alpha$ .

Площадь основания призмы  $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} h^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow$  объем

призмы  $V = Sh = \frac{1}{2} h^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$ .

$OA = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} h \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $OD = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} h \operatorname{ctg} \beta$ .

В  $\triangle AOD$  ( $\angle AOD = 90^\circ$ ):  $AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \frac{1}{2} h \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$ .

Боковая поверхность призмы:  $S_6 = 4AD \cdot h = 2h^2 \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$ .

Ответ:  $2h^2 \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$ ;  $\frac{1}{2} h^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$ .

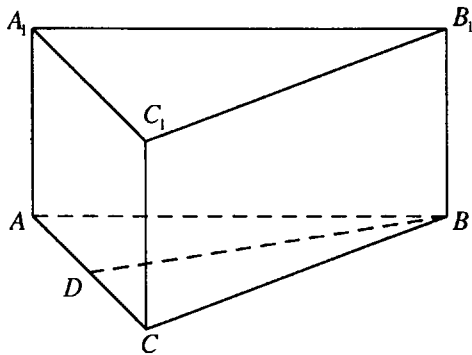


Рис. 12.77

**12.210.** Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно  $a$ , а угол при основании равен  $\alpha$ . Найти объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

*Решение.*

Пусть в  $\triangle ABC$  — основание прямой призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  (рис. 12.77).  $AB = BC$ ,  $AC = a$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $BD$  — высота.

В  $\triangle ADB$  ( $\angle ADB = 90^\circ$ ):  $BD = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$ ,  $AB = \frac{a}{2 \cos \alpha}$ .

Если  $H$  — высота призмы, то площадь ее боковой поверхности равна

$$S_6 = \left( \frac{a}{\cos \alpha} + a \right) H = aH \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2aH \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

Площадь основания призмы  $S_{осн.} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$ .

По условию  $S_6 = 2 S_{осн.}$ , следовательно  $\frac{2aH \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} = \frac{a^2}{2} \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow H = \frac{a \sin \alpha}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Объем призмы  $V = S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{8} a^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

Ответ:  $\frac{1}{8} a^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

**12.211.** Основанием пирамиды служит ромб с острым углом  $\alpha$ . Найти объем пирамиды, если ее боковые грани образуют с основанием один и тот же двугранный угол  $\beta$  и радиус вписанного в нее шара равен  $r$ .

*Решение.*

Пусть ромб  $ABCD$  — основание пирамиды  $SABCD$  (рис. 12.78),  $SO$  — ее высота,  $\angle BCD = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

Из вершины  $S$  пирамиды опустим перпендикуляр  $SE$  на сторону  $CD$  основания. Тогда  $OE \perp CD$  и  $\angle SEO$  — линейный угол двугранного

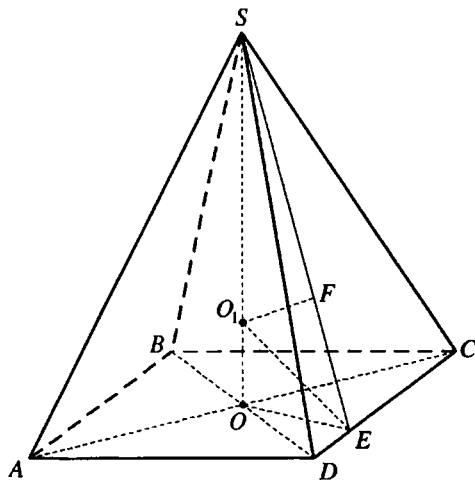


Рис. 12.78

угла, образованного боковой гранью  $CSD$  с основанием,  $\angle SEO = \beta$ . Так как все грани данной пирамиды образуют с основанием один и тот же угол, то точка  $O$  — центр окружности, вписанной в ромб  $ABCD$  — точка пересечения его диагоналей  $AC$  и  $BD$ .

Тогда  $\angle DOE = \angle OCE = \frac{1}{2} \angle BCD = \frac{\alpha}{2}$ .

Пусть  $O_1$  — точка пересечения биссектрисы  $\angle SEO$  и высоты  $SO$

пирамиды. Опустим в плоскости  $SOE$  перпендикуляр  $O_1F$  на прямую  $SE$ . Так как  $DC$  перпендикулярно плоскости  $SOE$ , то плоскости  $SOE$  и  $DSC$  перпендикулярны и, следовательно,  $O_1F$  — перпендикуляр к плоскости  $DSC$ .  $O_1F = O_1O$  и так как грань  $DSC$  выбрана произвольно, то  $O_1$  равноудалена от всех граней пирамиды, то есть  $O_1$  — центр шара, вписанного в данную пирамиду, и  $O_1O = O_1F = r$ .

$$\text{В } \triangle O_1OE (\angle O_1OE = 90^\circ): OE = O_1O \operatorname{ctg} \angle OEO_1 = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle SOE (\angle SOE = 90^\circ): SO = OE \operatorname{tg} \angle SEO = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

$$\text{В } \triangle OEC (\angle OEC = 90^\circ): CO = \frac{OE}{\sin \angle OCE} = \frac{r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Из } \triangle OED (\angle OED = 90^\circ): DO = \frac{OE}{\cos \angle DOE} = \frac{r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Площадь основания пирамиды

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2CO \cdot DO = \frac{2r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{4r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{4r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta}{3 \sin \alpha} = \frac{4r^3 \operatorname{tg} \beta}{3 \sin \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4r^3 \operatorname{tg} \beta}{3 \sin \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2}}.$$

**12.212.** Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину  $b$ ; соответствующие им боковые грани перпендикулярны плоскости основания и образуют между собой угол  $\alpha$ . Угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания также равен  $\alpha$ . Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

*Решение.*

Пусть боковые грани  $SAB$  и  $SAC$  пирамиды  $SABC$  (рис. 12.79) пер-

пендикулярны плоскости  $ABC$  ее основания. Тогда их общее ребро  $SA$  является высотой пирамиды. В  $\triangle ABC$   $AB = AC = b$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .

Если  $E$  — середина  $BC$ , то

$$\angle BAE = \frac{\alpha}{2}, AE \perp BC \Rightarrow SE \perp BC \quad \text{и}$$

$\angle SEA$  — угол наклона грани  $BSC$  к плоскости основания,  $\angle SEA = \alpha$ .

Пусть  $O$  — центр шара, вписанного в данную пирамиду. Так как шар касается граней двугранного угла с ребром  $BC$ , то  $O$  лежит на биссектрисе линейного угла  $SEA$  этого двугранного угла.

Пусть  $M$  и  $K$  — соответственно точки касания шара с гранями  $ABC$

и  $SAB$  пирамиды. Таким образом,  $OM \perp ABC$ ,  $OK \perp SAB$ ,  $OM = OK = r$ , где  $r$  — искомый радиус шара.

В плоскости  $SAB$  проведем перпендикуляр  $KD$  к прямой  $AB$ . Так как плоскости  $SAB$  и  $ABC$  перпендикулярны, то  $KD \perp ABC \Rightarrow KD \perp MD$ . В четырехугольнике  $OKDM$  углы при вершинах  $K, D, M$  — прямые, поэтому он является прямоугольником и так как  $OK = OM$ , то  $OKDM$  — квадрат,  $DM = OM = r$ .

$$\text{В } \triangle AEB (\angle AEB = 90^\circ): AE = AB \cos \angle BAE = b \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle ADM (\angle ADM = 90^\circ): AM = \frac{DM}{\sin \angle BAE} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{В } \triangle OME (\angle OME = 90^\circ): ME = OM \operatorname{ctg} \angle OEM = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$AM + ME = AE \Rightarrow \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{r \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = b \cos \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow r = \frac{b \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}; r = \frac{b \sin \alpha}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{4}}.$$

Ответ:  $\frac{b \sin \alpha}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{4}}$

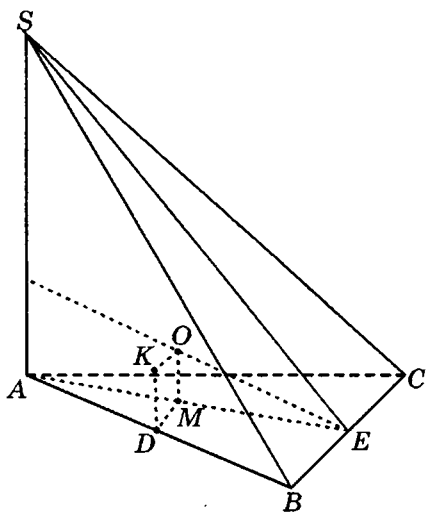


Рис. 12.79



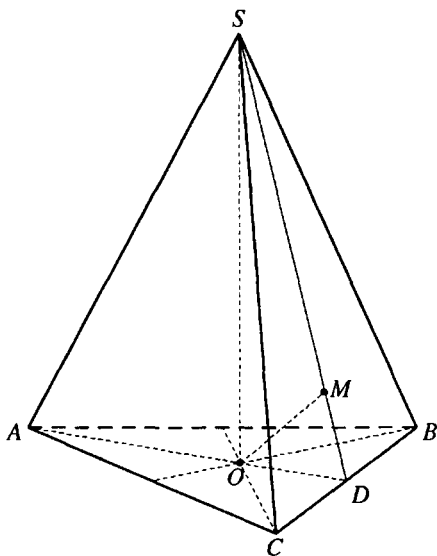


Рис. 12.80

**12.213.** Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковую грань опущен перпендикуляр, равный  $a$ . Найти объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABC$  (рис.12.80),  $\angle SCO = \alpha$ ,  $D$  — середина  $BC$ . Тогда  $AD \perp BC$ ,  $SD \perp BC$  и ребро  $BC$  перпендикулярно плоскости  $ADS$ . Плоскости  $ADS$  и  $BSC$  перпендикулярны.

В плоскости  $ADS$  из точки  $O$  проведем перпендикуляр  $OM$  к  $SD$ . Так как плоскости  $ADS$  и  $BSC$  перпендикулярны,

то  $OM$  перпендикулярен плоскости  $BSC$  и равен  $a$ .

$$\text{Пусть } BC = x, \angle ODS = \varphi \Rightarrow OC = \frac{x\sqrt{3}}{3}, OD = \frac{x\sqrt{3}}{6}, S_{\Delta ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{В } \Delta SOC (\angle SOC = 90^\circ): SO = OC \operatorname{tg} \angle SCO = \frac{x\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Из } \Delta SOD (\angle SOD = 90^\circ): SO = OD \operatorname{tg} \angle ODS = \frac{x\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \varphi.$$

$$\text{Тогда } \frac{x\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha = \frac{x\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \varphi \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{В } \Delta OMD (\angle OMD = 90^\circ):$$

$$\begin{aligned} OD &= \frac{OM}{\sin \angle ODM} = \frac{a}{\sin \varphi} = \frac{a}{\operatorname{tg} \varphi \cos \varphi} = \frac{a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{a\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2 \alpha}}{2 \operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2 \alpha}}{2 \operatorname{tg} \alpha} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}a\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x \sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{12} x^3 \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \frac{1}{12} \frac{3\sqrt{3} a^3 \sqrt{(1+4 \operatorname{tg}^2 \alpha)}}{\operatorname{tg}^3 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3} a^3 \sqrt{(1+4 \operatorname{tg}^2 \alpha)^3}}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{3} a^3 \sqrt{(1+4 \operatorname{tg}^2 \alpha)^3}}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$

**12.214.** Основанием пирамиды служит ромб со стороной  $a$  и острым углом  $\alpha$ . Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углом  $\varphi$ . Найти объем и боковую поверхность пирамиды.

*Решение.*

Пусть ромб  $ABCD$  — основание пирамиды  $SABCD$  (рис. 12.81),  $AB=a$ , острый угол ромба  $\alpha$ .

Тогда площадь ромба  $S = a^2 \sin \alpha$ , а его высота  $h = a \sin \alpha$ .

Боковые грани  $ABS$  и  $CBS$  пирамиды перпендикулярны плоскости основания, следовательно их общее ребро  $SB$  — высота пирамиды. Проведем из точки  $B$  перпендикуляры  $BK$  и  $BM$  к прямым  $AD$  и  $CD$ . Тогда  $BK = BM = h = a \sin \alpha$ ,  $SK \perp AD$ ,  $SM \perp CD$ ,  $\angle SKB = \angle SMB = \varphi$ .

Из  $\Delta SBK$  ( $\angle SBK = 90^\circ$ ):  $BS = BK \operatorname{tg} \angle SKB = a \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi$ .

Объем пирамиды  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot BS = \frac{1}{3} a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi$ .

$\Delta ABD$  и  $\Delta CBD$  — проекции граней  $ASD$  и  $CSD$  на плоскость основания, следовательно  $S_{\Delta ASD} = S_{\Delta CSD} = \frac{S_{\Delta ABD}}{\cos \varphi} = \frac{a^2 \sin \alpha}{2 \cos \varphi}$ .

$$S_{\Delta ASD} = S_{\Delta CSD} = \frac{S_{\Delta ABD}}{\cos \varphi} = \frac{a^2 \sin \alpha}{2 \cos \varphi}.$$

$$S_{\Delta ABS} = S_{\Delta CBS} = \frac{1}{2} BS \cdot AB = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2 \sin \alpha \sin \varphi}{2 \cos \varphi}.$$

Площадь боковой поверхности пирамиды

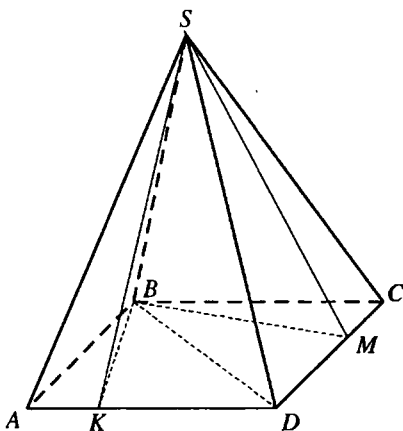


Рис. 12.81

$$S_{\text{бок}} = 2(S_{\Delta ASD} + S_{\Delta ABS}) = \frac{a^2 \sin \alpha}{\cos \varphi} + \frac{a^2 \sin \alpha \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{a^2 \sin \alpha (1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi} =$$

$$= \frac{a^2 \sin \alpha (1 + \cos(90^\circ - \varphi))}{\cos \varphi} = \frac{2a^2 \sin \alpha \cos^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \varphi}.$$

Ответ:  $\frac{1}{3} a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi$ ;  $\frac{2a^2 \sin \alpha \cos^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \varphi}$ .

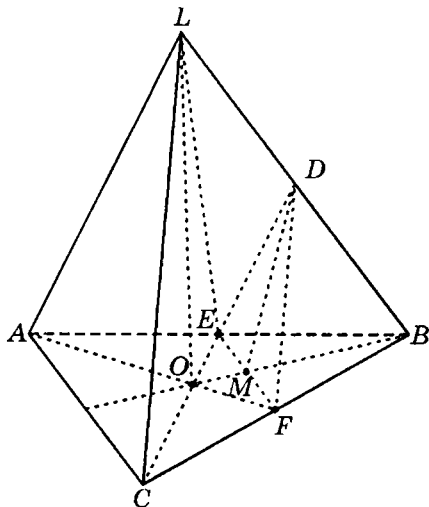


Рис. 12.82

**12.215.** В правильной треугольной пирамиде с углом  $\alpha$  между боковым ребром и стороной основания проведено сечение через середину бокового ребра параллельно боковой грани. Зная площадь  $S$  этого сечения, найти объем пирамиды. Каковы возможные значения  $\alpha$ ?

*Решение.*

Пусть  $D$  — середина бокового ребра  $BL$  правильной пирамиды  $LABC$  (рис. 12.82),  $\Delta EDF$  — проведенное сечение этой пирамиды,  $\angle LAC = \alpha$ .

Так как плоскости  $EDF$  и  $ALC$  параллельны, то  $DE \parallel AL$ ,  $DF \parallel LC$  и так как  $D$  — середина  $BL$ , то  $E$  — середина  $AB$ ,  $F$  — середина  $BC$ ,  $EF \parallel AC$ ,

$DE = DF = \frac{1}{2} AL$ . Так как  $DE \parallel LA$ ,  $EF \parallel AC$ , то  $\angle DEF = \angle LAC = \alpha$ .

Пусть  $LO$  — высота пирамиды  $LABC$ ,  $M$  — точка пересечения  $BO$  и  $EF$ . Тогда  $M$  — середина  $EF$ ,  $DM \perp EF$ .

Если  $AC = a$ , то  $EF = \frac{a}{2}$ ,  $DM = \frac{a}{4} \operatorname{tg} \alpha$ ,  $DE = \frac{a}{4 \cos \alpha}$ .

$$S_{\Delta EDF} = \frac{1}{2} EF \cdot DM \Rightarrow \frac{a^2}{16} \operatorname{tg} \alpha = S, a = 4\sqrt{S \operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}, AL = 2DE = \frac{a}{2 \cos \alpha}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{В } \triangle AOL \left( \angle AOL = \frac{\pi}{2} \right): OL &= \sqrt{AL^2 - AO^2} = a \sqrt{\frac{1}{4 \cos^2 \alpha} - \frac{1}{3}} = \\
 &= a \sqrt{\frac{\frac{3}{4} - \cos^2 \alpha}{3 \cos^2 \alpha}} = \frac{a}{\sqrt{3} \cos \alpha} \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \alpha} = \\
 &= \frac{a}{\sqrt{3} \cos \alpha} \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{3}}{2} - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3} \cos \alpha} \sqrt{\sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right)}.
 \end{aligned}$$

Объем пирамиды

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot OL = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{3} \cos \alpha} \sqrt{\sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right)} = \\
 &= \frac{a^3}{12 \cos \alpha} \sqrt{\sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{64 S \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{\operatorname{Sctg} \alpha \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right)}}{12 \cos \alpha} = \\
 &= \frac{16 \operatorname{Sctg} \alpha}{3} \sqrt{\frac{\operatorname{Sctg} \alpha \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right)}{\cos^2 \alpha}} = \frac{16}{3} \operatorname{Sctg} \alpha \sqrt{\frac{2 S \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin 2\alpha}},
 \end{aligned}$$

где  $\sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right) > 0 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha > 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha < \frac{1}{2}$ , откуда  $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

$$\text{Ответ: } \frac{16}{3} S \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{\frac{2 S \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right)}{\sin 2\alpha}}, \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

**12.216.** Перпендикуляр, опущенный из центра основания конуса на образующую, вращается около оси конуса. Найти угол между его образующей и осью, если поверхность вращения делит объем конуса пополам.

*Решение.*

Пусть  $\triangle ABC$  — осевое сечение данного конуса (рис. 12.83),  $BO$  — его высота,  $OM$  — перпендикуляр, опущенный из центра основания конуса на образующую  $AB$ . В результате вращения  $OM$  около прямой  $BO$  получится конус, осевое сечение которого  $\triangle MOL$ ,  $ML \perp BO$ . Плоскость основания полученного конуса отсекает от данного конуса, осевое сечение которого  $\triangle MBL$ . Точка  $K$  пересечения  $ML$  и  $BO$  — центр общего основания конуса, полученного в результате вращения отрезка  $OM$ , и конуса, отсеченного от данного. Сумма объемов  $V_1$  и  $V_2$  этих конусов равна  $1/2$  объема  $V$  данного конуса.

Пусть  $\angle ABO = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,  $AO = R$ .

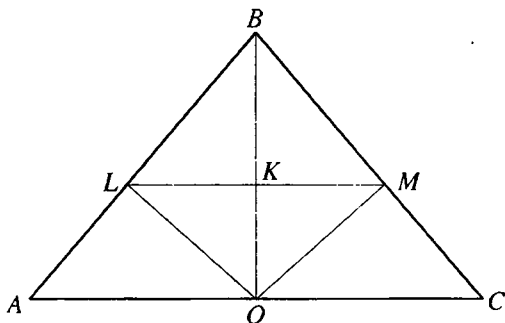


Рис. 12.83

$$\angle KLO = \angle AOL = \angle ABO = \alpha.$$

$$\text{В } \triangle ALO (\angle ALO = 90^\circ): OL = OA \cdot \cos \angle AOL = R \cos \alpha.$$

$$\text{Из } \triangle LKO (\angle LKO = 90^\circ): LK = OL \cdot \cos \angle KLO = R \cos^2 \alpha.$$

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \pi LK^2 \cdot OK + \frac{1}{3} \pi LK^2 \cdot BK = \frac{1}{3} \pi LK^2 (OK + BK) = \frac{1}{3} \pi LK^2 \cdot BO.$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot BO.$$

$$\text{Так как } V_1 + V_2 = \frac{1}{2} V, \text{ то } \frac{1}{3} \pi LK^2 \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot BO; LM^2 = \frac{1}{2} OA^2;$$

$$R^2 \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} R^2; \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}; \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; \alpha = \arccos \left( \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right)$$

$$\text{Ответ: } \arccos \left( \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right)$$

**12.217.** Найти угол между образующей и основанием усеченного конуса, полная поверхность которого вдвое больше поверхности вписанного в него шара.

*Решение.*

Пусть трапеция  $ABCD$ ,  $AB = CD$  (рис. 12.84) — осевое сечение данного усеченного конуса,  $O$  — центр вписанного шара,  $M, N, K$  — точки касания шара с диаметрами  $BC$  и  $AD$  оснований конуса и его образующей  $CD$ .

Если  $r$  и  $R$  — радиусы верхнего и нижнего оснований усеченного конуса,  $l$  — образующая,  $x$  — радиус вписанного шара,  $\angle CDN = \alpha$ , то  $CM = CK = r$ ,  $DN = DK = R$ ,  $l = CD = CK + KD = R + r$ ,  $MN = 2xl$

Полная поверхность усеченного конуса

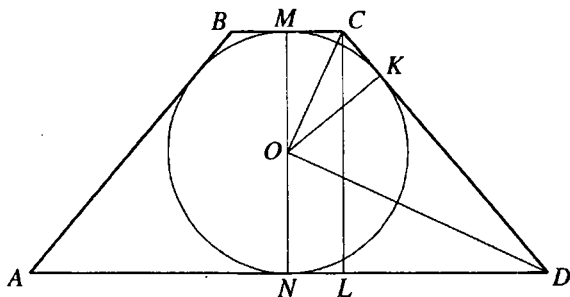


Рис. 12.84

$$S = \pi(R+r)l + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi(l^2 + R^2 + r^2) = \pi(l^2 + (R+r)^2 - 2Rr) = \pi(2l^2 - 2Rr) = 2\pi(l^2 - Rr).$$

Пусть  $CL$  — высота трапеции  $ABCD$ ,  $CL = MN = 2x$ , тогда из

$$\Delta CLD \quad l = CD = \frac{CL}{\sin \angle CDN} = \frac{2x}{\sin \alpha}.$$

$$\angle COD = 90^\circ, OK \perp CD, OK = x, CK \cdot KD = OK^2, Rr = x^2 \Rightarrow S =$$

$$= 2\pi \left( \frac{4x^2}{\sin^2 \alpha} - x^2 \right) = 2\pi x^2 \left( \frac{4}{\sin^2 \alpha} - 1 \right).$$

Поверхность шара  $S_1 = 4\pi x^2$ .

$$\text{Так как } S = 2S_1, \text{ то } 2\pi x^2 \left( \frac{4}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) = 8\pi x^2 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}; \sin \alpha =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}; \alpha = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

**12.218.** Основанием прямой призмы служит треугольник со стороной  $a$  и прилежащими к ней углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Через сторону основания под углом  $\varphi$  к нему проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро. Найти объем полученной треугольной пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $\Delta ABC$  — основание прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  (рис.12.85),  $\angle ACB = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ ,  $BC = a$ ,  $E$  — точка пересечения сечения призмы, проходящего через  $BC$ , с ее боковым ребром  $AA_1$ . Тогда  $AE$  — высота

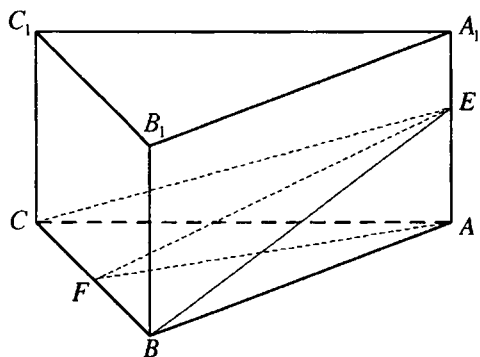


Рис. 12.85

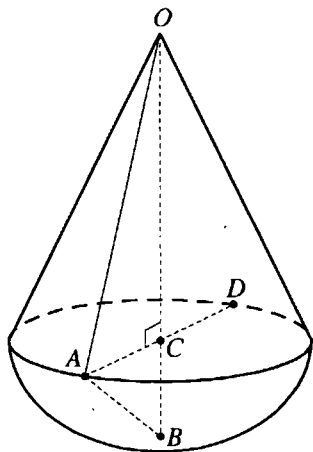


Рис. 12.86

полученной пирамиды и ее объем  $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot EA$ ,  $AF$  — высота  $\Delta ABC$  и проекция  $EF$  на плоскость  $ABC$ . Таким образом  $EF \perp BC$  и  $\angle EFA = \varphi$ .  
 В  $\Delta ABC$ :  $\angle BAC = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ ;

$$AB = \frac{CB \sin \angle ACB}{\sin \angle BAC} = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle ABC =$$

$$= \frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}.$$

Так как  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AF$ , то  $AF = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ .

В  $\Delta EAF$  ( $\angle EAF = 90^\circ$ ):  $EA = AF \operatorname{tg} \angle EFA = \frac{a \sin \alpha \sin \beta \operatorname{tg} \varphi}{\sin(\alpha + \beta)}$ .

Отсюда  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{a \sin \alpha \sin \beta \operatorname{tg} \varphi}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a^3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \operatorname{tg} \varphi}{6 \sin^2(\alpha + \beta)}$ .

Ответ:  $\frac{a^3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \operatorname{tg} \varphi}{6 \sin^2(\alpha + \beta)}$ .

**12.219.** При вращении кругового сектора около одного из крайних радиусов получилось тело, площадь сферической поверхности которого

го равна площади конической поверхности. Найти синус центрального угла кругового сектора.

*Решение.*

В результате вращения получилось тело, состоящее из конуса и шарового сегмента, имеющих общее основание (рис. 12.86): центр  $O$  кругового сектора — вершина конуса, радиус  $OB$ , около которого осуществлялось вращение — ось полученного тела, радиус  $OA$  — образующая конуса,  $B$  — вершина шарового сегмента.

Точка  $C$  — центр основания конуса. Тогда  $\angle ACO = 90^\circ$ ,  $CB$  — высота шарового сегмента,  $\angle AOB$  — центральный угол кругового сектора.

Пусть  $OA = OB = R$ ,  $\angle AOB = \alpha$ , тогда из  $\triangle ACO$ :  $OC = R \cos \alpha$ ,  $CA = R \sin \alpha$ .  
 $BC = OB - OC = R(1 - \cos \alpha)$ .

Площадь конической поверхности  $S_1 = \pi \cdot CA \cdot OA = \pi R^2 \sin \alpha$ .

Площадь поверхности шарового сегмента

$$S_2 = 2\pi \cdot OB \cdot CB = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha).$$

Так как  $S_1 = S_2$ , то  $\pi R^2 \sin \alpha = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha)$ ;  $\sin \alpha = 2(1 - \cos \alpha)$ ;  $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} =$

$$= 2; \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{5}.$$

*Ответ:*  $\frac{4}{5}$ .

**12.220.** Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Через вершину основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость параллельно одной из диагоналей основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды

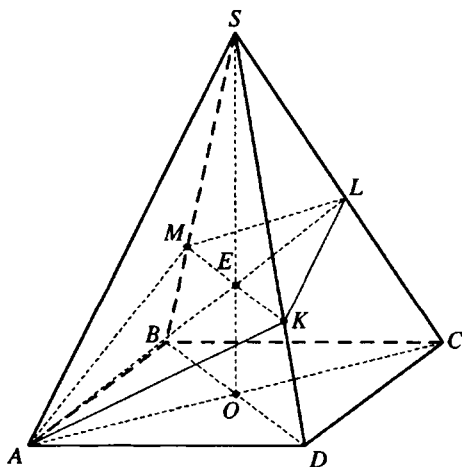


Рис. 12.87



$SABCD$  (рис. 12.87),  $L$  — середина  $SC$ ,  $\angle SCA = \alpha$ ,  $M$  и  $K$  — точки пересечения сечения, проходящего через точки  $A$  и  $L$  параллельно  $BD$  с ребрами  $SB$  и  $SD$ ,  $MK$  — линия пересечения сечения и плоскости  $BSD$ , отсюда  $MK \parallel BD$ .

$BD \perp AC$ ,  $BD \perp SO$ . Таким образом, прямая  $BD$  перпендикулярна плоскости  $ASC$ .

$AL$  — линия пересечения сечения и плоскости  $ASC$ . Тогда  $BD \perp AL$ .

$AL \perp BD$ ,  $AC \perp BD$ ,  $BD$  параллельна прямой пересечения сечения и плоскости основания, которая проходит через точку  $A$ . Отсюда,  $AL$  и  $AC$  перпендикулярны этой прямой и  $\angle LAC$  — искомый угол наклона секущей плоскости к плоскости основания.

Пусть  $\angle LAC = x$ ,  $E$  — точка пересечения медиан  $SO$  и  $AL$  треугольника  $ASC$ . Тогда  $EO = \frac{1}{3}SO$ . Из  $\triangle AOE$  ( $\angle AOE = 90^\circ$ ):  $EO = OA \operatorname{tg} x$ .

В  $\triangle SOC$  ( $\angle SOC = 90^\circ$ ):  $SO = OC \operatorname{tg} \angle SOC = OA \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow OA \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} OA \operatorname{tg} \alpha; \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha; x = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3}.$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3}$ .

**12.221.** Основаниями усеченной пирамиды служат правильные треугольники. Прямая, проходящая через середину одной стороны верхнего основания и середину параллельной ей стороны нижнего основания, перпендикулярна плоскостям оснований. Большее боковое ребро равно  $l$  и составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найти длину отрезка, соединяющего центры верхнего и нижнего оснований.

*Решение.*

Пусть  $O$  и  $O_1$  — центры оснований  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  данной усеченной пирамиды (рис. 12.88),  $D$  — середина  $BC$ ,  $D_1$  — середина  $B_1C_1$ , прямая  $DD_1$  перпендикулярна плоскостям оснований. Точки  $B$  и  $B_1$  симметричны точкам  $C$  и  $C_1$  относительно прямой  $DD_1$  и  $BB_1 = CC_1$ .

Из точки  $A_1$  опустим перпендикуляр  $A_1E$  на плоскость  $ABC$ .

Пусть  $BC = x$ ,  $B_1C_1 = y$ , тогда проекции  $BB_1$  и  $CC_1$  на плоскость будут равны  $\frac{x-y}{2}$  и  $B_1C_1 \perp A_1D_1$ ,  $B_1C_1 \perp DD_1$ , то есть  $B_1C_1$  перпендикулярен плоскости  $AA_1D_1D$  и так как  $B_1D_1 = C_1D_1$ , то  $B$  и  $B_1$  симметричны относительно этой плоскости.

Аналогично, точки  $B$  и  $C$  также симметричны относительно плоскости  $AA_1D_1D$ .

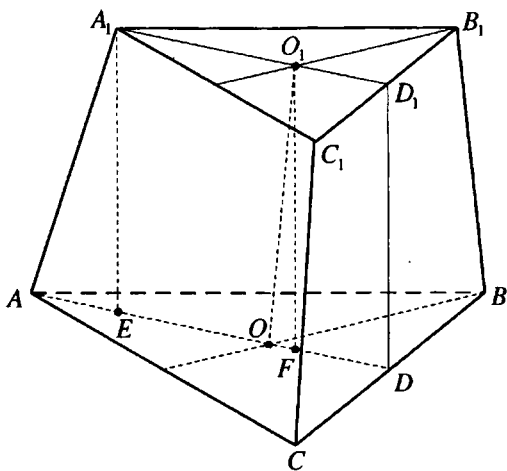


Рис. 12.88

Таким образом, трапеции  $AA_1C_1C$  и  $AA_1B_1B$  симметричны относительно плоскости  $AA_1D_1D$  и, следовательно, равны. Тогда  $\angle A_1AC = \angle A_1AB$  и точка  $E$  находится на биссектрисе  $AD$  угла  $BAC$ .

$$AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}, ED = A_1D_1 = \frac{y\sqrt{3}}{2}, AE = AD - ED = \frac{(x-y)\sqrt{3}}{2}.$$

$AE$  — проекция бокового ребра  $AA_1$  усеченной пирамиды на плоскость  $ABC$ . Так как  $\frac{(x-y)\sqrt{3}}{2} > \frac{x-y}{2}$ , то  $AA_1$  — большее боковое ребро и  $AA_1 = l$ ,  $\angle A_1AE = \alpha$ .

Тогда  $DD_1 = AE = l \sin \alpha$ ,  $AE = l \cos \alpha$ .

Проведем в плоскости  $AA_1D_1DO_1F \parallel A_1E$ . Тогда  $O_1F \perp AD$ ,  $O_1F = A_1E = l \sin \alpha$ .

$$OF = OD - FD = OD - O_1D_1 = \frac{1}{3}(AD - A_1D_1) = \frac{1}{3}AE = \frac{l \cos \alpha}{3}.$$

В  $\triangle OFO_1$  ( $\angle FO_1O = 90^\circ$ ):

$$\begin{aligned} OO_1 &= \sqrt{OF^2 + O_1F^2} = \sqrt{\frac{l^2 \cos^2 \alpha}{9} + l^2 \sin^2 \alpha} = \frac{l}{3} \sqrt{\cos^2 \alpha + 9 \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{l}{3} \sqrt{1 + 8 \sin^2 \alpha} = \frac{l}{3} \sqrt{1 + 4(1 - \cos 2\alpha)} = \frac{l}{3} \sqrt{5 - 4 \cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{l}{3} \sqrt{5 - 4 \cos 2\alpha}$ .

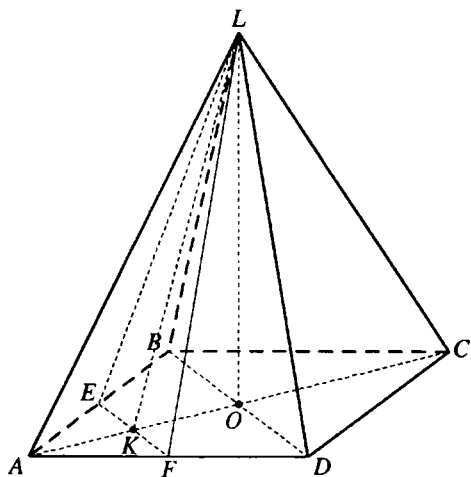


Рис. 12.89

$LO$  — высота пирамиды. Так как боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания, то  $O$  — центр круга, вписанного в ромб, — точка пересечения его диагоналей. Пусть  $E$  — середина  $AB$ ,  $F$  — середина  $AD$ ,  $S_{ELF} = S$ ,  $K$  — точка пересечения  $EF$  и  $AC$ ,  $AB = a$ .

$EF \parallel BD, EF = \frac{1}{2} BD = BO = a \sin \frac{\alpha}{2}, EF \perp KO, K$  — середина  $EF$ .  $KO$  — проекция  $KL$  на плоскость основания. Тогда  $KL \perp EF$ ,  $\angle LKO$  — угол между плоскостью  $ELF$  сечения и плоскостью основания пирамиды,  $\angle LKO = \beta$ .  $KO = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} a \cos \frac{\alpha}{2}$ .

$$\text{В } \triangle KOL (\angle KOL = 90^\circ): KL = \frac{KO}{\cos \angle LKO} = \frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \beta}.$$

$$S_{\triangle ELF} = \frac{1}{2} EF \cdot LK \Rightarrow \frac{1}{2} a \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \beta} = S; \frac{a^2 \sin \alpha}{8 \cos \beta} = S; a = 2 \sqrt{\frac{2S \cos \beta}{\sin \alpha}}.$$

Ответ:  $2 \sqrt{\frac{2S \cos \beta}{\sin \alpha}}$ .

**12.223.** Основанием пирамиды служит ромб с острым углом  $\alpha$ . Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол  $\beta$ .

**12.222.** В основании пирамиды лежит ромб, один из углов которого равен  $\alpha$ . Боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. Через середины двух смежных сторон основания и вершину пирамиды проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол  $\beta$ . Площадь полученного сечения равна  $S$ . Найти сторону ромба.

Решение.

Пусть ромб  $ABCD$  — основание пирамиды  $LABCD$  (рис. 12.89),  $\angle BAD = \alpha$ ,

Площадь сечения, проведенного через большую диагональ основания и вершину пирамиды, равна  $S$ . Найти объем пирамиды.

*Решение.*

Пусть ромб  $ABCD$  — основание пирамиды  $LABCD$  (рис. 12.90),  $\angle BCD = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,  $LO$  — высота пирамиды. Все боковые грани имеют с плоскостью основания один и тот же угол, поэтому  $O$  — центр круга, вписанного в ромб, — точка пересечения диагоналей ромба.

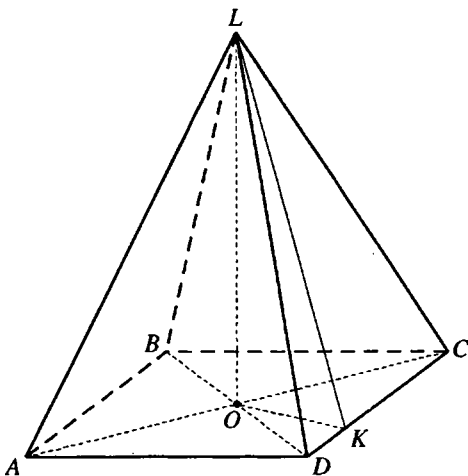


Рис. 12.90

$\angle BCD$  острый, поэтому

$AC$  — большая диагональ ромба,  $S_{\triangle ALC} = S$ .

В плоскости  $DLC$  опустим перпендикуляр  $LK$  на  $CD$ . Тогда  $OK \perp CD$   $\angle LKO = \beta$ .

Плоскость  $ALC$  делит данную пирамиду на две равных пирамиды  $DALC$  и  $BALC$  с общим основанием  $ALC$ .

$DO \perp AC$ ,  $DO \perp LO$ . Отсюда  $DO$  перпендикулярен плоскости  $ALC$  и является высотой пирамиды  $DALC$ .

$$\text{Объем данной пирамиды } V = 2V_{DALC} = \frac{2}{3} S \cdot DO.$$

$$\text{Пусть } DO = a, \angle DOK = \angle DCO = \frac{1}{2} \angle BCD = \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Тогда } OK = a \cos \frac{\alpha}{2}, OC = a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, MO = a \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

$$S = \frac{1}{2} LO \cdot AC = LO \cdot OC \Rightarrow a \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta \cdot a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = S; a = \sqrt{\frac{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \beta}{\cos \frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{S \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \beta}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow V = \frac{2S \sqrt{S \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \beta}}{3 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2S\sqrt{S\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta}}{3\cos\frac{\alpha}{2}}$$

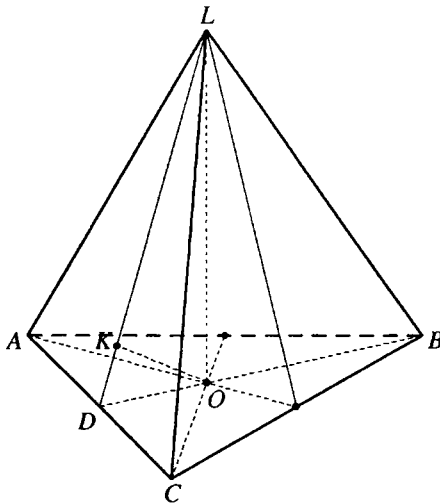


Рис. 12.91

**12.224.** В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен  $\alpha$ , боковая поверхность равна  $S$ . Найти расстояние от центра основания до боковой грани.

*Решение.*

Пусть  $LO$  — высота правильной пирамиды  $LABC$  (рис. 12.91). Проведем в грани  $ALC$  перпендикуляр  $LD$  на  $AC$ . Тогда  $OD \perp AC$ ,  $\angle LDO = \alpha$ , сторона  $AC$  перпендикулярна плоскости  $LDO$ , плоскости  $LDO$  и  $ALC$  перпендикулярны.

В плоскости  $LDO$  проведем перпендикуляр  $OK$  на  $LD$ . Тогда  $OK$  перпендикулярен плоскости  $ALC$  и его длина есть расстояние

от точки  $O$  до грани  $ALC$ . Так как пирамида правильная, то все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания и  $S_{\Delta ABC} = S \cos \alpha$ .

$$\text{Если } AC = a, \text{ то } S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = S \cos \alpha, a = 2\sqrt{\frac{S \cos \alpha}{\sqrt{3}}}.$$

$$OD = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}.$$

$$\text{Из } \triangle OKD (\angle OKD = 90^\circ): OK = OD \sin \angle ODK = \frac{\sin \alpha}{3} \sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sin \alpha}{3} \sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}.$$

**12.225.** Высота правильной треугольной пирамиды равна  $H$ . Боковая грань составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Через сторону основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения.

*Решение.*

Пусть  $MO$  — высота правильной пирамиды  $MABC$  (рис. 12.92),  $MO = H$ ,  $F$  — середина  $BC$ . Тогда  $AF \perp BC$ ,  $MF \perp BC$ ,  $\angle AFM = \alpha$ .

В  $\triangle MOF$  ( $\angle MOF = 90^\circ$ ):  $OF = H \operatorname{ctg} \alpha$ .  $K$  — середина  $AM$ . В плоскости  $AMF$  проведем  $KL \parallel MO$ , тогда  $KL \perp AF$  и  $KL$  — средняя линия  $\triangle AOM$ .

$$KL = \frac{1}{2} MO = \frac{H}{2}, AL = LO.$$

Так как  $AO = 2OF$ , то  $AL = LO = OF$ ,  $LF = 2OF = 2H \operatorname{ctg} \alpha$ .

Пусть  $LF$  — проекция  $KF$  на плоскость  $ABC$ ,  $LF \perp BC$ , тогда  $KF \perp BC$ .

В  $\triangle BFO$  ( $\angle BFO = 90^\circ$ ):

$$BF = OF \operatorname{ctg} \angle OBF = H \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} 30^\circ = H\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha.$$

В  $\triangle KLF$  ( $\angle KLF = 90^\circ$ ):

$$KF = \sqrt{KL^2 + LF^2} = \sqrt{\frac{H^2}{4} + 4H^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{H}{2} \sqrt{1 + 16 \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

$$S_{\triangle BKC} = \frac{1}{2} BC \cdot KF = BF \cdot KF = \frac{1}{2} H^2 \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{1 + 16 \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{2} H^2 \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{1 + 16 \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ .

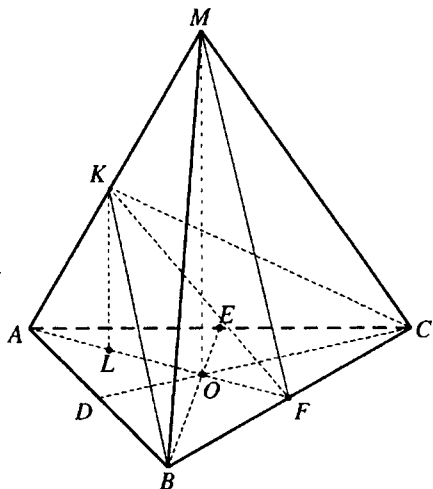


Рис. 12.92

**12.226.** В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник, у которого площадь равна  $S$  и угол при вершине равен  $\alpha$ . Найти объем пирамиды, если угол между каждым боковым ребром и высотой пирамиды равен  $\beta$ .

*Решение.*

Пусть  $DO$  — высота пирамиды  $DABC$  (рис. 12.93),  $\angle ADO = \angle BDO = \angle CDO = \beta$ ,  $AB = BC$ ,  $\angle ABC = \alpha$ ,  $S_{\triangle ABC} = S$ .

$\triangle AOM = \triangle BOM = \triangle COM \Rightarrow OA = OB = OC$ ,  $O$  — центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ ,  $OA$  — ее радиус.

Если  $OA = R$ , то  $AB = BC = 2R \sin \angle BAC = 2R \sin \left( 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2R \cos \frac{\alpha}{2}$ .

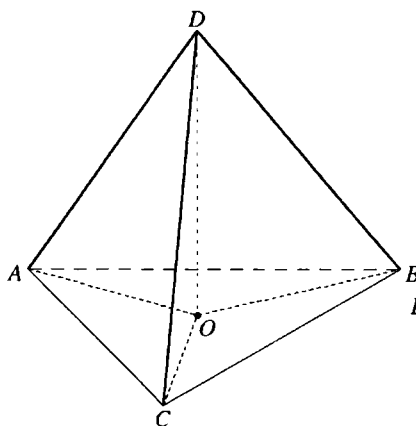


Рис. 12.93

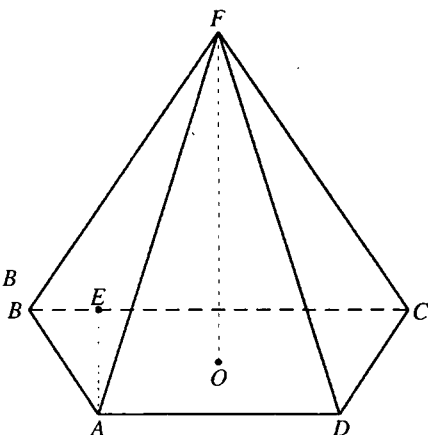


Рис. 12.94

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB^2 \sin \angle ABC \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha = S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}} = \frac{\sqrt{2S \sin \alpha}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}.$$

В  $\Delta AOD$  ( $\angle AOD = 90^\circ$ ):

$$DO = OA \operatorname{ctg} \angle ADO = \frac{\sqrt{2S \sin \alpha} \operatorname{ctg} \beta}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}.$$

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot DO = \frac{S \operatorname{ctg} \beta \sqrt{2S \sin \alpha}}{6 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}.$$

Ответ:  $\frac{S \operatorname{ctg} \beta \sqrt{2S \sin \alpha}}{6 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}.$

**12.227.** Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона равна  $a$ , а острый угол равен  $\alpha$ . Все боковые грани образуют с основанием пирамиды один и тот же угол  $\beta$ . Найти полную поверхность пирамиды.

*Решение.*

Пусть трапеция  $ABCD$  — основание пирамиды  $FABCD$  (рис. 12.94),  $FO$  — высота,  $AB = CD = a$ ,  $\angle ABC = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

Так как все боковые грани пирамиды образуют с основанием один и тот же угол  $\beta$ , то точка  $O$  равноудалена от всех сторон трапеции  $ABCD$  и является центром окружности, вписанной в эту трапецию. Отсюда  $AD + BC = AB + CD = 2a$ .

Если  $AE$  — высота трапеции  $ABCD$ , то  $AE = a \sin \alpha$ .

Площадь трапеции  $ABCD$   $S = \frac{AD + BC}{2} \cdot AE = a^2 \sin \alpha$ , а площадь

боковой поверхности пирамиды  $S_{бок.} = \frac{S}{\cos \beta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_n = S + S_6 = S + \frac{S}{\cos \beta} = \frac{S(1 + \cos \beta)}{\cos \beta} = \frac{2a^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \beta}.$$

Ответ:  $\frac{2a^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \beta}$ .

**12.228.** Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен  $\alpha$ , боковая поверхность пирамиды равна  $S$ . Найти расстояние от центра основания до середины апофемы боковой грани.

*Решение.*

Пусть  $FO$  — высота правильной пирамиды  $FABC$  (рис. 12.95),  $D$  — середина  $AC$ . Тогда  $FD \perp AC$ ,  $OD \perp AC$ ,  $\angle FDO = \alpha$ .

Если  $E$  — середина апофемы  $FD$ , то  $OE$  — медиана прямо-угольного  $\triangle FOD$ , проведенная

к гипотенузе,  $OE = \frac{1}{2} FD$ .

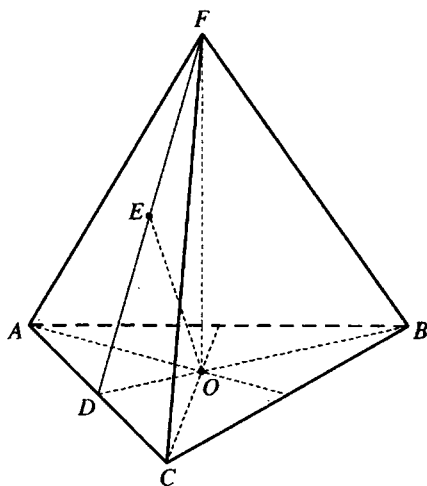


Рис. 12.95

$$S_{\triangle ABC} = S \cos \alpha.$$

Если  $AC = a$ , то

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = S \cos \alpha \Rightarrow a = 2 \sqrt{\frac{S \cos \alpha}{\sqrt{3}}}.$$

$$OD = \frac{a\sqrt{3}}{6} = 2 \sqrt{\frac{S \cos \alpha}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3} \sqrt{S\sqrt{3} \cos \alpha}.$$



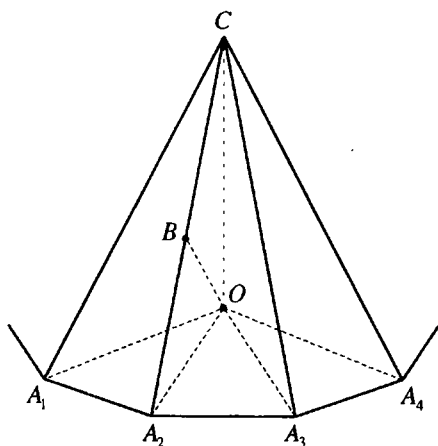


Рис. 12.96

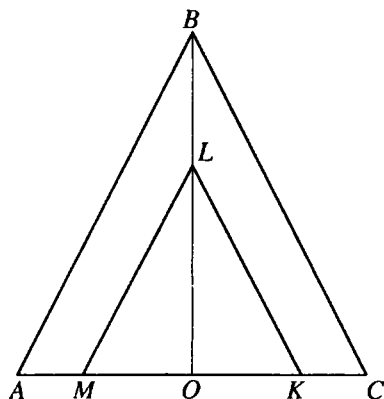


Рис. 12.97

В  $\triangle FOD$  ( $\angle FOD = 90^\circ$ ):

$$FD = \frac{OD}{\cos \angle FDO} = \frac{\sqrt{S\sqrt{3} \cos \alpha}}{3 \cos \alpha} \Rightarrow OE = \frac{\sqrt{S\sqrt{3} \cos \alpha}}{6 \cos \alpha}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{S\sqrt{3} \cos \alpha}}{6 \cos \alpha}$ .

**12.229.** Плоский угол при вершине правильной  $n$ -угольной пирамиды равен  $\alpha$ . Отрезок прямой, соединяющий центр основания пирамиды с серединой бокового ребра, равен  $a$ . Найти полную поверхность пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $CO$  — высота правильной пирамиды  $CA_1A_2\dots A_n$  (рис. 12.96),  $\angle A_1CA_2 = \alpha$ ,  $B$  — середина  $CA_2$ ,  $OB = a$ .

$OB$  — медиана прямоугольного  $\angle COA_2$ , проведенная к гипотенузе,

следовательно  $CA_2 = 2a$ ,  $S_{\triangle A_1CA_2} = \frac{1}{2} A_1C^2 \sin \alpha = 2a^2 \sin \alpha$ .

Площадь боковой поверхности пирамиды

$$S_1 = nS_{\triangle A_2CA_1} = 2na^2 \sin \alpha.$$

Если  $\angle CA_2A_1$  — угол между прямой  $A_1A_2$ , лежащей в плоскости основания пирамиды и наклонной  $CA_2$  к этой плоскости,  $OA_2$  — проекция  $CA_2$  на эту плоскость, то  $\cos \angle CA_2A_1 = \cos \angle OA_2A_1 \cdot \cos \angle CA_2O \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) \cos \angle CA_2O \Rightarrow \cos \angle CA_2O = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

В  $\Delta A_2OC$  ( $\angle A_2OC = \frac{\pi}{2}$ ):

$$OA_2 = CA_2 \cos \angle CA_2O = \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\pi}{n}} \Rightarrow S_{\Delta A_1OA_2} = \frac{1}{2} OA_2^2 \sin \angle A_1OA_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} = 4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$$

Площадь основания пирамиды

$$S_2 = n S_{\Delta A_1OA_2} = 4a^2 n \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$$

Тогда площадь полной поверхности пирамиды

$$S = S_1 + S_2 = 2na^2 \sin \alpha + 4na^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} =$$

$$= 4na^2 \sin \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \right) = \frac{4na^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{n} \right)}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

Ответ: 
$$\frac{4na^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{n} \right)}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

**12.230.** Два конуса имеют концентрические основания и один и тот же угол, равный  $\alpha$ , между высотой и образующей. Радиус основания внешнего конуса равен  $R$ . Боковая поверхность внутреннего конуса в два раза меньше полной поверхности внешнего конуса. Найти объем внутреннего конуса.

*Решение.*

Пусть  $\Delta ABC$  — осевое сечение внешнего конуса (рис. 12.97),  $\Delta MLK$  — осевое сечение внутреннего конуса,  $O$  — общий центр их оснований,  $OA = R$ ,  $\angle ABO = \angle MLO = \alpha$ .

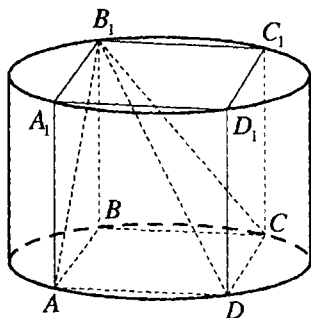


Рис. 12.98

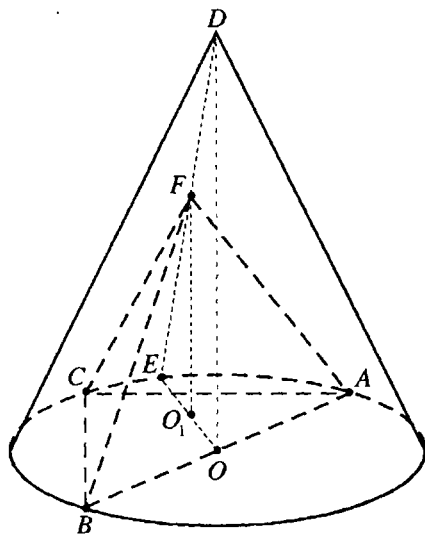


Рис. 12.99

Образующая внешнего конуса  $l_1 = AB = \frac{R}{\sin \alpha}$ , его полная поверхность

$$S_1 = \pi R(R + l_1) = \pi R \left( R + \frac{R}{\sin \alpha} \right) = \frac{\pi R^2 (1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\pi R^2 \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)}{\sin \alpha} = \frac{2\pi R^2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha}.$$

Если радиус внутреннего конуса  $OM = r$ , то его образующая

$$l_2 = ML = \frac{r}{\sin \alpha}, \text{ а его боковая поверхность } S_2 = \pi r l_2 = \frac{\pi r^2}{\sin \alpha}.$$

$$\text{По условию } S_2 = \frac{1}{2} S_1 \Rightarrow \frac{\pi r^2}{\sin \alpha} = \frac{\pi R^2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha} \Rightarrow r = R \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Высота внутреннего конуса  $h = LO = r \operatorname{ctg} \alpha$ , а его объем

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3} \pi R^3 \cos^3 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Ответ:  $\frac{1}{3} \pi R^3 \cos^3 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{ctg} \alpha.$

**12.231.** В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого составляет с прилежащими к ней сторонами основания углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Найти отношение объема параллелепипеда к объему цилиндра.

*Решение.*

Пусть в прямоугольном параллелепипеде  $AB_1C_1D_1$  (рис. 12.98), вписанном в цилиндр,  $\angle B_1DA = \alpha$ ,  $\angle B_1DC = \beta$ ,  $AD = a$ ,  $CD = b$ , радиус основания цилиндра  $R$ , общая высота цилиндра и параллелепипеда  $H$ ,  $B_1D = d$ ,  $AB$  — проекция  $AB_1$  на плоскость основания параллелепипеда,  $AB \perp AD$ . Тогда  $AB_1 \perp AD$ .

В  $\triangle B_1AD$  ( $\angle B_1AD = 90^\circ$ ):  $a = d \cos \alpha$ , и так как  $B_1C \perp CD$ , то из  $\triangle B_1CD$ :  $b = d \cos \beta$ .

Объем параллелепипеда  $V_1 = abH = d^2 \cos \alpha \cos \beta H$ .

$$BD^2 = (2R)^2 = 4R^2 = a^2 + b^2 = d^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta).$$

Объем цилиндра

$$V_2 = \pi R^2 H = \frac{1}{4} \pi d^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{d^2 \cos \alpha \cos \beta H}{\frac{1}{4} \pi d^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) H} = \frac{4 \cos \alpha \cos \beta}{\pi (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)}.$$

Ответ:  $\frac{4 \cos \alpha \cos \beta}{\pi (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)}.$

**12.232.** Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом  $\alpha$ . Этот треугольник вписан в основание конуса. Вершина пирамиды совпадает с серединой одной из образующих конуса. Найти отношение объема конуса к объему призмы.

*Решение.*

Пусть в треугольнике  $ABC$ , являющемся основанием пирамиды  $FABC$  (рис. 12.99),  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $O$  — центр основания,  $D$  — вершина конуса, в который вписана данная пирамида. Тогда  $O$  — центр

круга, описанного около прямоугольного  $\triangle ABC$ . Отсюда,  $O$  — середина гипотенузы  $AB$ .

Если  $F$  — середина образующей  $DE$  конуса,  $FO_1$  — высота пирамиды  $FABC$ , то  $FO_1$  — средняя линия  $\triangle DOE$  и  $FO_1 = \frac{1}{2}DO$ .

Пусть  $DO = H$ ,  $OA = R$ , тогда  $AB = 2R$ ,  $AC = 2R\cos\alpha$ ,  $BC = 2R\sin\alpha$ ,  
 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 2R^2 \sin\alpha \cos\alpha = R^2 \sin 2\alpha$ .

Объем конуса  $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ .

Объем пирамиды  $V_2 = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot FO_1 = \frac{1}{6}R^2 H \sin 2\alpha$ .

Тогда  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\frac{1}{6}R^2 H \sin 2\alpha} = \frac{2\pi}{\sin 2\alpha}$ .

Ответ:  $\frac{2\pi}{\sin 2\alpha}$ .

**12.233.** В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб; вершины его верхнего основания лежат на боковых ребрах, вершины нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Найти отношение объема куба к объему пирамиды, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABCD$  (рис.12.100),  $\angle SAO = \alpha$ ,  $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$  — куб из условия задачи,  $MNKL$  — его нижнее,  $M_1 N_1 K_1 L_1$  — его верхнее основание,  $O_1$  — точка пересечения  $SO$  и  $M_1 K_1$ .

Пусть ребро куба равно  $a$ .

$M_1 K_1 \parallel AC$ ,  $\angle SM_1 O_1 = \angle SAO = \alpha$ .

Тогда объем куба  $V_1 = a^3$ ,  $M_1 O_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ,  $SO_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg}\alpha$ .

$SO = SO_1 + O_1 O = a + \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg}\alpha (\sqrt{2} \operatorname{ctg}\alpha + 1)$

В  $\triangle SOA$  ( $\angle SOA = 90^\circ$ ):

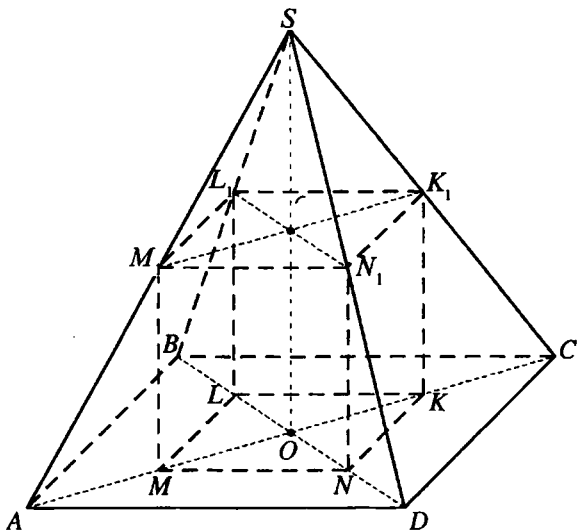


Рис. 12.100

$$AO = SO \operatorname{ctg} \angle SAO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha (\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha + 1) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{\sqrt{2}} (\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC^2 = 2AO^2 = a^2 (\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha + 1)^2.$$

Объем пирамиды

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} a^2 (\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha + 1)^2 \cdot \frac{a(\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha + 1)}{\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha} = \\ &= \frac{a^3 (\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha + 1)^3}{3\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \frac{V_1}{V_2} = \frac{3\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha}{(\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha + 1)^3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha}{(\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha + 1)^3}.$$

**12.234.** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна  $a$ ; боковая грань составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найти радиус описанного шара.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABCD$  (рис. 12.101),  $AB = a$ ,  $M$  — середина  $CD$ . Тогда  $OM \perp CD$ ,  $SM \perp CD$ ,  $\angle SMO = \alpha$ .

Радиус  $R$  шара будем искать как радиус круга, описанного около  $\triangle ASC$ .

Если  $\angle ASC = x$ , то

$$R = \frac{AC}{2 \sin \angle ASC} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin x}.$$

В  $\triangle SOM$  ( $\angle SOM = 90^\circ$ ):  $SO = OM \operatorname{tg} \angle SMO = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$ .

В  $\triangle SOA$  ( $\angle SOA = 90^\circ$ ):  $\operatorname{tg} \angle ASO = \frac{AO}{SO} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha}{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R &= \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin x} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{2\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{a(\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha)}{4 \operatorname{ctg} \alpha \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{a(1 + \cos^2 \alpha)}{4 \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{a \left( 1 + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right)}{2 \sin 2\alpha} = \frac{a(3 + \cos 2\alpha)}{4 \sin 2\alpha}. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\frac{a(3 + \cos 2\alpha)}{4 \sin 2\alpha}$ .

**12.235.** Величина угла между боковым ребром правильной четырехугольной пирамиды и плоскостью основания равна величине плоского угла при вершине пирамиды. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABCD$  (рис. 12.102),  $\angle SDO = \angle CSD$ ,  $E$  — середина  $CD$ . Тогда  $OE \perp CD$ ,  $SE \perp CD$ ,  $\angle SEO$  — искомый угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

Если  $OE = 1$ ,  $SO = H$ , то  $CD = 2$ ,  $OC = \sqrt{2}$ .

Пусть  $DF$  — высота  $\triangle DSC$ , тогда  $\triangle SOD = \triangle DFS$  — по гипотенузе и острому углу и  $DF = SO = H$ .

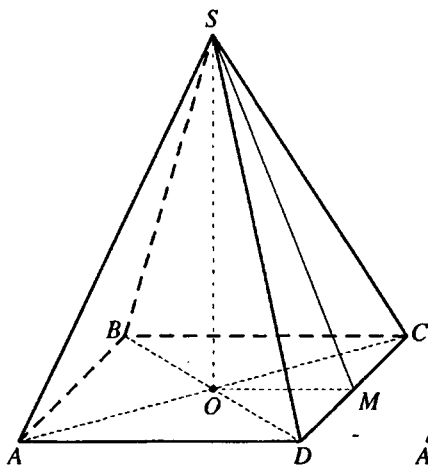


Рис. 12.101

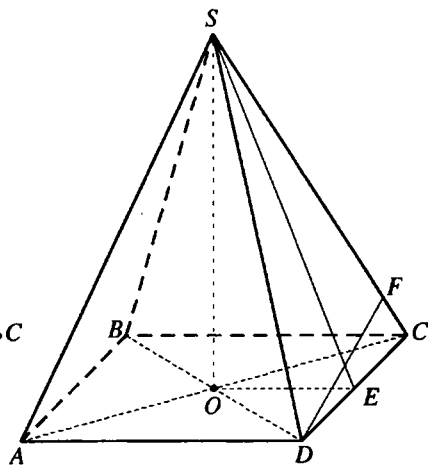


Рис. 12.102

$$\text{В } \triangle SOE (\angle SOE = 90^\circ): SE = \sqrt{OE^2 + SO^2} = \sqrt{1 + H^2}.$$

$$\text{Из } \triangle SOC (\angle SOC = 90^\circ): SC = \sqrt{OC^2 + SO^2} = \sqrt{2 + H^2}.$$

$$S_{\triangle CSD} = \frac{1}{2} SC \cdot DF = \frac{1}{2} CD \cdot SE \Rightarrow SC \cdot DF = CD \cdot SE \Rightarrow H\sqrt{2 + H^2} = 2\sqrt{1 + H^2} \Leftrightarrow H^2(2 + H^2) = 4 + 4H^2 \Leftrightarrow H^4 - 2H^2 - 4 = 0; H^2 = 1 \pm \sqrt{5}.$$

$$\text{Так как } H_2 > 0, \text{ то } H^2 = 1 + \sqrt{5}; H = \sqrt{1 + \sqrt{5}}.$$

$$\text{В } \triangle SOE (\angle SOE = 90^\circ):$$

$$\operatorname{tg} \angle SEO = \frac{SO}{OE} = H = \sqrt{1 + \sqrt{5}} \Rightarrow \angle SEO = \operatorname{arctg} \sqrt{1 + \sqrt{5}}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \sqrt{1 + \sqrt{5}}.$$

**12.236.** Найти отношение объема шарового сегмента к объему всего шара, если дуга в осевом сечении сегмента соответствует центральному углу, равному  $\alpha$ .

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение данного шара,  $O$  — его центр,  $\angle AOC = \alpha$ ,  $K$  — вершина сегмента,  $D$  — точка пересечения  $AC$  и радиуса  $OK$ ,  $KD$  — высота сегмента (рис. 12.103).

$$\text{Если } R \text{ — радиус данного шара, то его объем } V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3.$$



В  $\triangle ADO$  ( $\angle ADO = 90^\circ$ ):

$$DO = OA \cos \angle AOD = R \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow KD = OK - OD = R - R \cos \frac{\alpha}{2} = R \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

Объем сегмента

$$V_2 = \pi \cdot KD^2 \cdot \left( R - \frac{1}{3} KD \right) = \pi R^2 \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 \cdot \left( R - \frac{1}{3} R \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \sin^4 \frac{\alpha}{4} \left( 3 - \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \sin^4 \frac{\alpha}{4} \left( 2 + \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

Отсюда  $\frac{V_2}{V_1} = \sin^4 \frac{\alpha}{4} \left( 2 + \cos \frac{\alpha}{2} \right)$ .

Ответ:  $\sin^4 \frac{\alpha}{4} \left( 2 + \cos \frac{\alpha}{2} \right)$ .

**12.237.** Гипотенуза прямоугольного треугольника равна  $c$ , его острый угол равен  $\alpha$ . Треугольник вращается вокруг биссектрисы внешнего прямого угла. Найти объем тела вращения.

*Решение.*

Пусть в  $\triangle ACB$   $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $AB = c$  (рис. 12.104). Тогда  $AC = c \cos \alpha$ ,  $BC = c \sin \alpha$ .

При вращении  $\triangle ACB$  вокруг биссектрисы  $O_1 O_2$  получится тело, осевое сечение которого показано на рис. 12.104.

Объем  $V$  этого тела равен разности объема  $V_1$  усеченного конуса, осевое сечение которого — трапеция  $ABB_1 A_1$ , и суммы объемов  $V_2$  и  $V_3$  конусов, осевые сечения которых — треугольники  $ACA_1$  и  $BCB_1$ .

$$\begin{aligned} \angle ACA_1 = \angle BCB_1 = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \angle O_1 BC = \angle O_2 AC = \frac{\pi}{4}, CO_2 = O_2 A = \\ &= \frac{c \cos \alpha}{\sqrt{2}}, CO_1 = O_1 B = \frac{c \sin \alpha}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Если  $O_2 A = R$ ,  $O_1 B = r$ , то

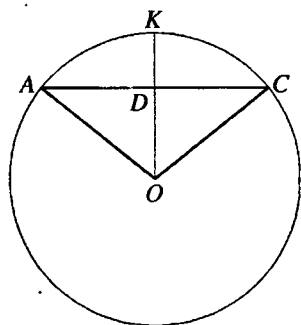


Рис. 12.103

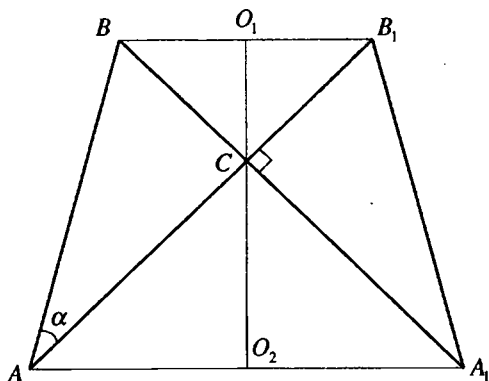


Рис. 12.104

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 - (V_2 + V_3) = \frac{1}{3} \pi \cdot O_1 O_2 (R^2 + Rr + r^2) - \left( \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot CO_2 + \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot CO_1 \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \pi (R+r) (R^2 + Rr + r^2) - \frac{1}{3} \pi (R^3 + r^3) = \frac{1}{3} \pi (R+r) (R^2 + Rr + r^2 - \\
 &- (R^2 - Rr + r^2)) = \frac{2}{3} \pi (R+r) Rr = \frac{2}{3} \pi \left( \frac{c \cos \alpha}{\sqrt{2}} + \frac{c \sin \alpha}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{c \cos \alpha}{\sqrt{2}} \cdot \frac{c \sin \alpha}{\sqrt{2}} = \\
 &= \frac{c^3}{6} \pi \sin 2\alpha \cdot \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\pi c^3}{6} \sin 2\alpha \sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{\pi c^3}{6} \sin 2\alpha \sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)$

**12.238.** В усеченный конус вписан шар. Сумма длин диаметров верхнего и нижнего оснований конуса в пять раз больше длины радиуса шара. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.

*Решение.*

Пусть равнобедренная трапеция  $ABCD$  — осевое сечение данного усеченного конуса,  $E$  и  $F$  — центры его нижнего и верхнего оснований,  $O$  — центр вписанного шара,  $EF$  — его диаметр и высота трапеции  $ABCD$  (рис. 12.105). Если  $R$  — радиус шара, то  $EF = 2R$ ,  $AD + BC = 5R$ .

$$BC + AD = AB + CD = 2CD \Rightarrow CD = \frac{5R}{2}.$$

$CK$  — высота трапеции  $ABCD$ ,  $CK = EF = 2R$ .

$\angle CDK$  — угол между образующей  $CD$  конуса и плоскостью основания.

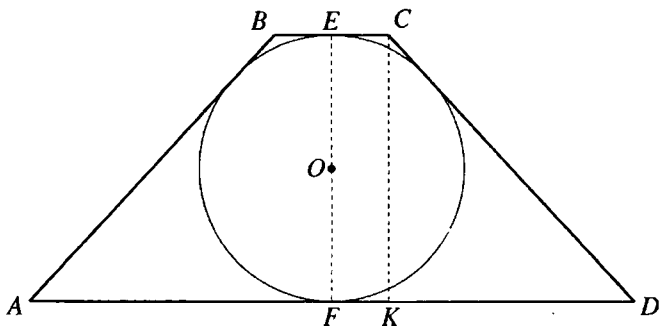


Рис. 12.105

Из  $\triangle CKD$  ( $\angle CKD = 90^\circ$ ):  $\sin \angle CDK = \frac{CK}{CD} = \frac{4}{5}$ ;  $\angle CDK = \arcsin \frac{4}{5}$ .

Ответ:  $\arcsin \frac{4}{5}$ .

**12.239.** Отношение поверхности шара, вписанного в конус, к площади основания равно  $k$ . Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения  $k$ .

*Решение.*

Пусть  $\triangle ABC$  — осевое сечение конуса (рис. 12.106),  $D$  — центр его основания,  $BD$  — высота,  $O$  — центр вписанного шара,  $\angle BAD$  — угол между образующей конуса и плоскостью его основания,  $\angle BAD = \alpha$ ,  $DA = R$ ,  $OD = r$ .

$$\angle OAD = \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{\alpha}{2} \text{ и } r = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Поверхность шара } S_1 = 4\pi r^2 = 4\pi R^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Площадь основания конуса } S_2 = \pi R^2.$$

$$\text{Тогда } \frac{S_1}{S_2} = 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = k \Rightarrow 4 \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = k \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4 - k}{4 + k}.$$

Так как  $\alpha$  — острый угол, то  $0 < \cos \alpha < 1$ .

$$\text{Тогда } 0 < \frac{4 - k}{4 + k} < 1; 0 < k < 4.$$

Ответ:  $\frac{4 - k}{4 + k}; 0 < k < 4$ .

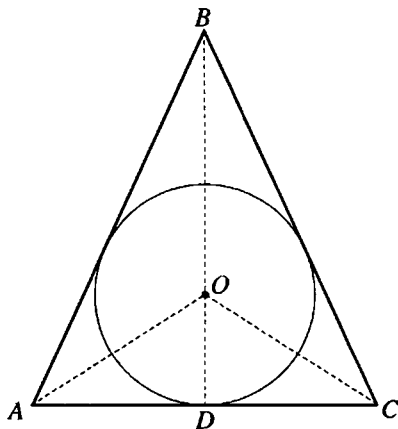


Рис. 12.106

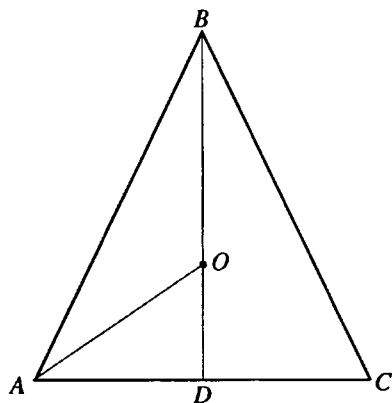


Рис. 12.107

**12.240.** Отношение объема шара, вписанного в конус, к объему описанного шара равно  $k$ . Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения  $k$ .

*Решение.*

Пусть  $\triangle ABC$  — осевое сечение конуса,  $D$  — центр его основания,  $BD$  — высота,  $O$  — центр вписанного шара (рис. 12.107),  $\angle BAD$  — искомый угол между образующей  $BA$  конуса и плоскостью его основания.

$\angle BAO = \alpha$ ,  $r$  и  $R$  — радиусы вписанного и описанного шаров.

В  $\triangle ADO$  ( $\angle ADO = 90^\circ$ ):

$$DA = DO \operatorname{ctg} \angle OAD = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \quad AC = 2r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Радиус круга, описанного около треугольника  $ABC$ ,

$$R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{2r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2 \sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}.$$

Объемы двух шаров относятся как кубы их радиусов.

Таким образом,

$$\frac{r^3}{R^3} = k \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \sqrt[3]{k} \Leftrightarrow \frac{r \sin 2\alpha}{r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \sqrt[3]{k} \Leftrightarrow \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \sqrt[3]{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha = \sqrt[3]{k} \Leftrightarrow 2(1 - \cos \alpha) \cos \alpha = \sqrt[3]{k} \Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha -$$

$$- 2 \cos \alpha + \sqrt[3]{k} = 0;$$

$$\cos \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\sqrt[3]{k}}}{2}; \alpha = \arccos \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\sqrt[3]{k}}}{2}$$

Так как  $k > 0$  и  $1 - 2\sqrt[3]{k} \geq 0$ , то  $0 < k \leq \frac{1}{8}$ .

Ответ:  $\arccos \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\sqrt[3]{k}}}{2}, 0 < k \leq \frac{1}{8}$ .

**12.241.** В шар, радиус которого равен  $R$ , вписан конус; в этот конус вписан цилиндр с квадратным осевым сечением. Найти полную поверхность цилиндра, если угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен  $\alpha$ .

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел.  $BC$  — образующая конуса,  $FE$  — образующая цилиндра,  $D$  — центр основания конуса и нижнего основания цилиндра,  $K$  — центр верхнего основания цилиндра,  $\angle BCD = \alpha$  (рис. 12.108).

Если радиус основания цилиндра равен  $r$ , то  $FE = 2r$ , а площадь полной поверхности цилиндра  $S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot FE = 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2$ .

Радиус данного шара является радиусом окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

$$\text{Отсюда } AC = 2R \sin \angle ABC = 2R \sin(180^\circ - 2\alpha) = 2R \sin 2\alpha,$$

$$CD = R \sin 2\alpha.$$

В  $\triangle FEC$  ( $\angle FEC = 90^\circ$ ):

$$CE = FE \operatorname{ctg} \angle ECF = 2r \operatorname{ctg} \alpha, CD = CE + ED = 2r \operatorname{ctg} \alpha + r = r(2 \operatorname{ctg} \alpha + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(2 \operatorname{ctg} \alpha + 1) = R \sin 2\alpha \Leftrightarrow r = \frac{R \sin 2\alpha}{1 + 2 \operatorname{ctg} \alpha}; S = \frac{6\pi R^2 \sin^2 2\alpha}{(1 + 2 \operatorname{ctg} \alpha)^2}.$$

Ответ:  $\frac{6\pi R^2 \sin^2 2\alpha}{(1 + 2 \operatorname{ctg} \alpha)^2}$ .

**12.242.** В полушар вписано тело, состоящее из цилиндра и поставленного на него конуса. Нижнее основание цилиндра лежит в плоскости большого круга полушара; верхнее основание цилиндра совпадает с основанием конуса и касается поверхности шара. Вершина конуса лежит на поверхности шара. Образующая конуса составляет с плоскостью его основания угол  $\alpha$ . Найти отношение объема тела к объему полушара.

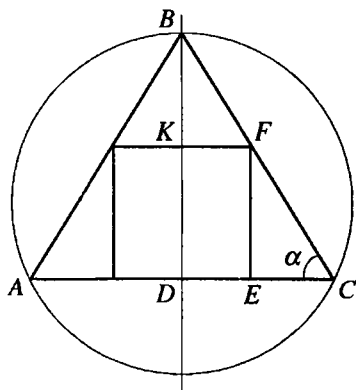


Рис. 12.108

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел.  $O$  — центр полушара и нижнего основания цилиндра,  $F$  — центр верхнего основания цилиндра и основания конуса,  $E$  — вершина конуса,  $\angle EBF = \alpha$ , (рис. 12.109).

Пусть  $FB = r$ . Тогда  $EF = r \operatorname{tg} \alpha$ .

$OB = OE$  — радиусы данного полушара, следовательно

$$\angle BOE = \pi - 2\angle BEF = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\alpha.$$

$$\text{В } \triangle BFO \left(\angle BFO = \frac{\pi}{2}\right): OF = r \operatorname{ctg} 2\alpha; OB = \frac{r}{\sin 2\alpha}.$$

$$\text{Объем конуса } V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot FB^2 \cdot EF = \frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Объем цилиндра } V_2 = \pi \cdot FB^2 \cdot OF = \pi r^3 \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{tg} \alpha + \pi r^3 \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\pi r^3}{3} (\operatorname{tg} \alpha + 3 \operatorname{ctg} 2\alpha) =$$

$$= \frac{\pi r^3}{3} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha + 2 \operatorname{ctg} 2\alpha) = \frac{\pi r^3}{3} \left( \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha \sin 2\alpha} + \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \right) =$$

$$= \frac{\pi r^3 (1 + 2 \cos 2\alpha)}{3 \sin 2\alpha} = \frac{2\pi r^3 \left(\frac{1}{2} + \cos 2\alpha\right)}{3 \sin 2\alpha} = \frac{2\pi r^3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos 2\alpha\right)}{3 \sin 2\alpha} =$$

$$= \frac{4\pi r^3 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{3 \sin 2\alpha}.$$

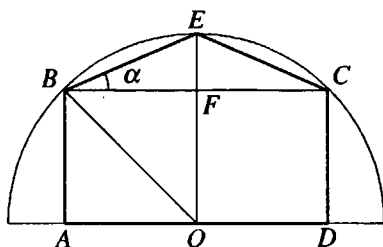


Рис. 12.109

$$\text{Объем полушара } V_3 = \frac{2}{3} \pi \cdot OB^3 = \frac{2\pi r^3}{3 \sin^3 2\alpha}.$$

$$\text{Таким образом } \frac{V_1 + V_2}{V_3} = 2 \sin^2 2\alpha \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Ответ: } 2 \sin^2 2\alpha \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$$

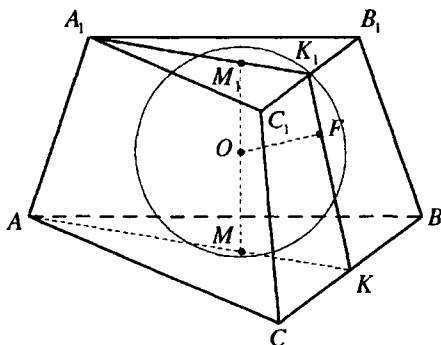


Рис. 12.110

середина  $BC$ ,  $K_1$  — середина  $B_1C_1$ .  $\angle K_1KM = \alpha$ , точка  $F$  касания шара с гранью  $BCC_1B_1$  находится на  $K_1K$ .

Рассмотрим сечение данной совокупности тел плоскостью  $AA_1K_1K$  (рис. 12.110, а).

$$\angle MKO = \frac{1}{2} \angle K_1KM = \frac{\alpha}{2}; \angle M_1K_1O = \frac{1}{2} \angle M_1K_1F = \frac{1}{2} (180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Пусть радиус шара  $OM = OM_1 = r$ ,  $BC = a$ ,  $B_1C_1 = b$ .

$$\text{В } \triangle OMK (\angle OMK = 90^\circ): MK = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{3} \cdot MK = 2\sqrt{3}r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{В } \triangle OM_1K_1 (\angle OM_1K_1 = 90^\circ): M_1K_1 &= r \operatorname{ctg} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow b = \\ &= 2\sqrt{3} \cdot M_1K_1 = 2\sqrt{3}r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

**12.243.** Боковая грань правильной усеченной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найти отношение полной поверхности пирамиды к поверхности вписанного в нее шара.

*Решение.*

Пусть  $M$  — центр нижнего,  $M_1$  — центр верхнего оснований правильной усеченной пирамиды  $ABCA_1B_1C_1$  (рис. 12.110),  $O$  — центр вписанного в нее шара,  $O$  находится на  $MM_1$ ,  $K$  —

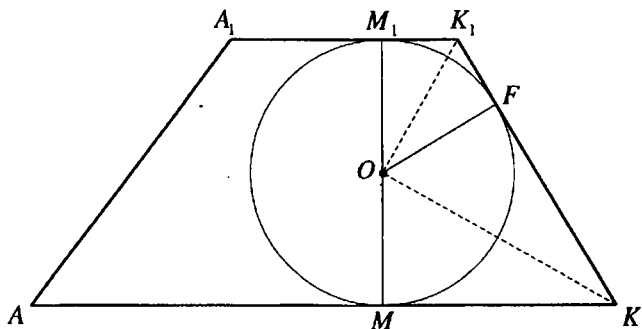


Рис. 12.110,а

$$\begin{aligned}
 K_1K &= K_1F + FK = K_1M_1 + KM = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = r \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) = \\
 &= \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2r}{\sin \alpha}.
 \end{aligned}$$

Площадь боковой поверхности

$$\begin{aligned}
 S_{\text{бок.}} &= \frac{3}{2}(a+b) \cdot K_1K = \frac{3}{2} \left( 2\sqrt{3}r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{3}r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \frac{2r}{\sin \alpha} = \\
 &= \frac{6\sqrt{3}r^2 \left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha} = \frac{12\sqrt{3}r^2}{\sin^2 \alpha}.
 \end{aligned}$$

Площадь полной поверхности усеченной пирамиды

$$\begin{aligned}
 S &= S_{\text{бок.}} + S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{12\sqrt{3}r^2}{\sin^2 \alpha} + 3\sqrt{3}r^2 \left( \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \\
 &= \frac{12\sqrt{3}r^2}{\sin^2 \alpha} + 3\sqrt{3}r^2 \cdot \frac{\cos^4 \frac{\alpha}{2} + \sin^4 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \\
 &= \frac{12\sqrt{3}r^2}{\sin^2 \alpha} + 12\sqrt{3}r^2 \cdot \frac{\left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^2 - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha} = \\
 &= \frac{12\sqrt{3}r^2 \left( 2 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right)}{\sin^2 \alpha} = \frac{6\sqrt{3}r^2 (4 - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha}.
 \end{aligned}$$



Поверхность шара  $S_{ш} = 4\pi r^2$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{S}{S_{ш}} &= \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \frac{4 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \left( \frac{4}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} (4(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - 1) = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} (4 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 3) \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} (4 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 3)$

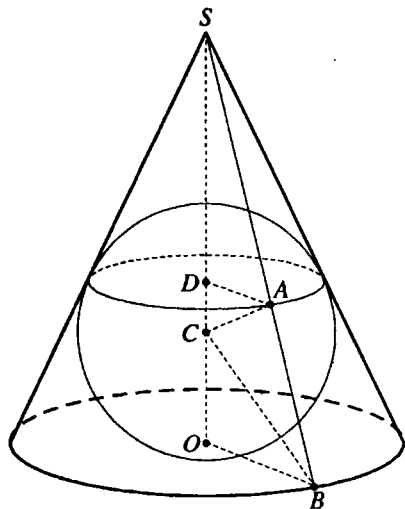


Рис. 12.111

шара  $CO = CA = R$ ,  $A$  — точка касания прямой  $SB$  и поверхности шара. Тогда  $CA \perp SB$ ,  $\triangle COB = \triangle CAB$  по катету и гипотенузе.

Таким образом  $\angle ACB = \angle OCB = \alpha$ ,  $\angle DCA = 180^\circ - 2\alpha$ ,  $\angle OBS = 2 \angle OBC = 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ - 2\alpha$ .

$$\text{В } \triangle CDA (\angle CDA = 90^\circ): R = \frac{r}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{r}{\sin 2\alpha},$$

$$\text{В } \triangle COB (\angle COB = 90^\circ): OB = CO \operatorname{tg} \angle OCB = R \operatorname{tg} \alpha.$$

Из  $\triangle SOB$  ( $\angle SOB = 90^\circ$ ):

$$SO = OB \operatorname{tg} \angle OBS = R \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(180^\circ - 2\alpha) = -R \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Объем конуса:

**12.244.** В конус вписан шар. Радиус круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса равен  $r$ . Прямая, проходящая через центр шара и произвольную точку окружности основания конуса, составляет с высотой конуса угол  $\alpha$ . Найти объем конуса.

*Решение.*

Пусть  $S$  — вершина конуса,  $O$  — центр его основания (точка касания вписанного шара с плоскостью основания),  $C$  — центр шара,  $D$  — центр круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса,  $AD$  — радиус этого шара,  $AD = r$ ,  $SB$  — образующая конуса, на которой находится точка  $A$ ,  $\angle OCB = \alpha$  (рис. 12.111), радиус

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot OB^2 \cdot SO = -\frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^3}{\sin^3 2\alpha} \cdot \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg} 2\alpha =$$

$$= -\frac{\pi r^3 \sin^3 \alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{24 \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha \cos^3 \alpha} = -\frac{\pi r^3 \operatorname{tg} 2\alpha}{24 \cos^6 \alpha}.$$

Ответ:  $-\frac{\pi r^3 \operatorname{tg} 2\alpha}{24 \cos^6 \alpha}$ .

**12.245.** Отношение объема конуса к объему вписанного в него шара равно  $k$ . Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса и допустимые значения  $k$ .

*Решение.*

Пусть  $\triangle ABC$  — осевое сечение данного конуса (рис. 12.112),  $D$  — центр его основания,  $O$  — центр вписанного шара,  $\angle BAD$  — искомый угол между образующей и плоскостью основания конуса,  $\angle BAD = \alpha$ , радиус основания конуса  $OA = R$ .

В  $\triangle ADB$  ( $\angle ADB = 90^\circ$ ):

$$BD = AD \operatorname{tg} \angle BAD = R \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\angle OAD = \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{\alpha}{2}.$$

В  $\triangle ADO$  ( $\angle ADO = 90^\circ$ ):  $DO = AD \operatorname{tg} \angle OAD = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

Объем конуса  $V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot OB = \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{tg} \alpha$ ,

объем шара  $V_2 = \frac{4}{3} \pi \cdot DO^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{4 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}} = k; \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{4 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} - 2k \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 = 0; \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 2k}}{2k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k^2 - 2k \geq 0, \\ k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow k \geq 2.$$

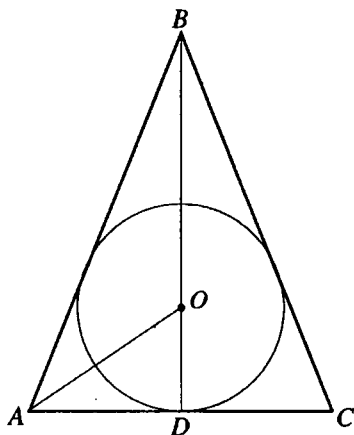


Рис. 12.112

$$\text{Отсюда } \alpha = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 2k}}{2k}}.$$

$$\text{Ответ: } 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 2k}}{2k}}; k \geq 2.$$

**12.246.** Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания, если боковая поверхность конуса равна сумме площадей основания и осевого сечения.

*Решение.*

Пусть  $R$  — радиус основания,  $l$  — образующая,  $H$  — высота данного конуса,  $\alpha$  — искомый угол между его образующей и плоскостью основания.

$$\text{Тогда } H = R \operatorname{tg} \alpha, l = \frac{R}{\cos \alpha}.$$

Площадь боковой поверхности конуса  $S_1 = \pi R l = \frac{\pi R^2}{\cos \alpha}$ . Площадь осевого

сечения  $S_2 = \pi R^2$ , площадь осевого сечения  $S_3 = RH = R^2 \operatorname{tg} \alpha$ .

Так как  $S_1 = S_2 + S_3$ , то  $\frac{\pi R^2}{\cos \alpha} = \pi R^2 + R^2 \operatorname{tg} \alpha$ :

$$\pi = \pi \cos \alpha + \sin \alpha; \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \pi; \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pi; \alpha = 2 \operatorname{arctg} \pi.$$

*Ответ:*  $2 \operatorname{arctg} \pi$ .

**12.247.** Угол между высотой и образующей конуса равен  $\alpha$ . В конус вписана правильная треугольная призма; нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса. Боковые грани призмы — квадраты. Найти отношение боковых поверхностей призмы и конуса.

*Решение.*

Пусть  $S$  — вершина,  $O$  — центр основания данного конуса,  $SA$  — образующая конуса, проходящая через вершину  $C$  вписанной правильной призмы (рис. 12.113),  $\angle ASO = \alpha$ . Боковое ребро  $CB$  призмы параллельно  $SO$ , поэтому  $\angle ACB = \angle ASO = \alpha$ .

Если ребро призмы равно 1, то площадь ее боковой поверхности

$$S_1 = 3, OB = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ В } \triangle CBA \left( \angle CBA = \frac{\pi}{2} \right): BA = CB \operatorname{tg} \angle ACB = \operatorname{tg} \alpha.$$



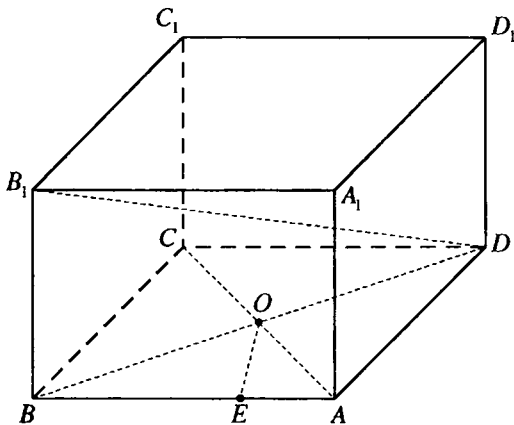


Рис. 12.114

**12.248.** Около шара описана прямая призма, основанием которой служит ромб. Большая диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найти острый угол ромба.

*Решение.*

Пусть ромб  $ABCD$  — основание данной прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ , описанной около шара (рис. 12.114), и радиус шара равен  $R$ . Тогда высота призмы  $BB_1 = 2R$ .

Если  $B_1D$  — большая диагональ призмы, то  $\angle B_1DB = \alpha$  и  $BD$  — большая диагональ основания  $\Rightarrow \angle ABC$  — искомый острый угол ромба.

В  $\triangle B_1BD$ :  $BD = 2R \operatorname{ctg} \alpha$ .

Если через середину высоты призмы провести перпендикулярное сечение, то получится ромб, равный основанию призмы, в который будет вписан большой круг данного шара. Отсюда, радиус шара равен радиусу круга, вписанного в ромб  $ABCD$ .

Центр этого круга — точка  $O$  пересечения диагоналей ромба.

$E$  — точка касания этого круга со стороной  $AB$  ромба.

Тогда  $OE \perp AB$ ,  $OE = R$ .  $BO = \frac{1}{2} BD = R \operatorname{ctg} \alpha$ . В  $\triangle BEO$  ( $\angle BEO = 90^\circ$ ):

$$\sin \angle OBE = \frac{OE}{OB} = \frac{R}{R \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\angle OBE = \arcsin(\operatorname{tg} \alpha)$$

$$\angle ABC = 2\angle OBE = 2 \arcsin(\operatorname{tg} \alpha).$$

*Ответ:*  $2 \arcsin(\operatorname{tg} \alpha)$ .

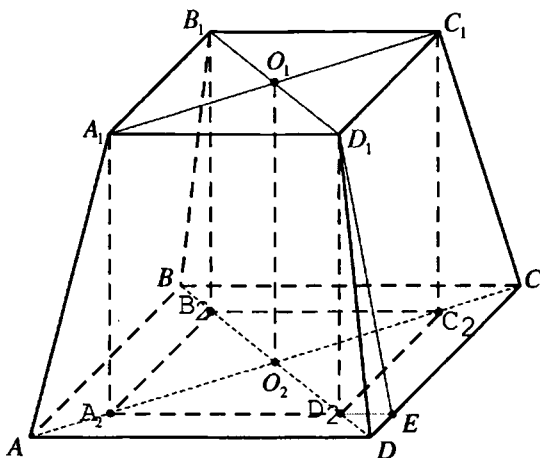


Рис. 12.115

**12.249.** Боковое ребро правильной усеченной четырехугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед так, что верхнее его основание совпадает с верхним основанием пирамиды, а нижнее основание лежит в плоскости нижнего основания пирамиды. Найти отношение боковых поверхностей пирамиды и параллелепипеда, если диагональ параллелепипеда составляет с его основанием угол  $\beta$ .

*Решение.*

Пусть в правильной усеченной пирамиде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 12.115)  $\angle D_1 D B = \alpha$ .  $A_1 B_1 C_1 D_1 A_2 B_2 C_2 A_2$  — вписанный прямоугольный параллелепипед  $\angle B_1 D_2 B_2 = \beta$ .

Положим боковое ребро параллелепипеда равным 1, тогда из  $\Delta B_1 B_2 D_2$  ( $\angle B_1 B_2 D_2 = 90^\circ$ ):  $B_2 D_2 = B_1 B_2 \operatorname{ctg} \angle B_1 D_2 B_2 = \operatorname{ctg} \beta$ ,

$$C_2 D_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \beta.$$

Боковая поверхность параллелепипеда

$$S_1 = 4 C_2 D_2 \cdot D_1 D_2 = 2\sqrt{2} \operatorname{ctg} \beta.$$

$$\text{В } \Delta D_1 D_2 D \text{ (} \angle D_1 D_2 D = 90^\circ \text{): } D_2 D = D_1 D_2 \operatorname{ctg} \angle D_1 D D_2 = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$BD = B_2 D_2 + 2 D_2 D = \operatorname{ctg} \beta + 2 \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow DC = \frac{1}{\sqrt{2}} BD = \frac{\operatorname{ctg} \beta + 2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{2}}.$$

Если  $D_1 E$  — высота трапеции  $DD_1 C_1 C$ , то  $D_2 E \perp CD$ .

Из равнобедренного прямоугольного  $\Delta D_2ED$ :

$$D_2E = \frac{1}{\sqrt{2}} D_2D = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \alpha.$$

В  $\Delta D_1D_2E$  ( $\angle D_1D_2E = 90^\circ$ ):

$$D_1E = \sqrt{D_1D_2^2 + D_2E^2} = \sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\sqrt{2}}.$$

Площадь боковой поверхности пирамиды

$$\begin{aligned} S_2 &= 4S_{DD_1C_1C} = 4 \cdot \frac{CD \cdot C_1D_1}{2} \cdot D_1E = 2 \left( \frac{\operatorname{ctg} \beta + 2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\sqrt{2}} = \\ &= 2(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha) \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}} = 2 \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta) \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha \sin \beta}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \frac{S_2}{S_1} = \frac{2 \sin(\alpha + \beta) \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha \sin \beta} : 2\sqrt{2} \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sqrt{2(1 + \sin^2 \alpha)}}{2 \sin^2 \alpha \cos \beta}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sin(\alpha + \beta) \sqrt{2(1 + \sin^2 \alpha)}}{2 \sin^2 \alpha \cos \beta}.$$

**12.250.** В конус помещена пирамида; основание пирамиды вписано в основание конуса, а вершина пирамиды лежит на одной из образующих конуса. Все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Основанием пирамиды служит равнобедренный

треугольник с углом  $\alpha$  ( $\alpha \geq \frac{\pi}{3}$ ) при вершине. Найти отношение объемов конуса и пирамиды.

*Решение.*  
Пусть  $MO$  — высота данного конуса, центр  $O$  основания конуса — центр круга, описанного около основания  $ABC$  пирамиды  $DABC$  (рис. 12.116),  $AB = BC$ ,

$\angle ABC = \alpha$ ,  $\alpha \geq \frac{\pi}{3}$ .

$DK$  — высота пирамиды и, так

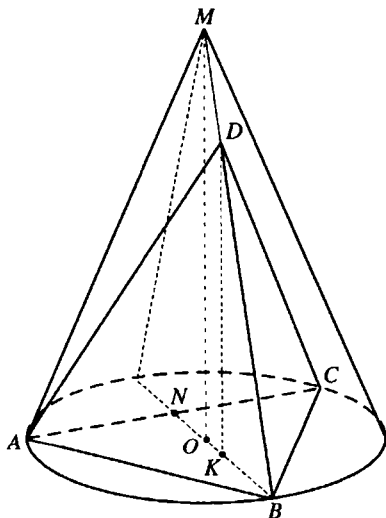


Рис. 12.116

как все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания,  $K$  — центр окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ .

Так как в треугольнике  $ABC$   $AB = BC$ , то точки  $O$  и  $K$  принадлежат прямой  $BN$ , где  $N$  — середина  $AC$ .

$MO \parallel DK$ , так как прямые  $MO$  и  $DK$  перпендикулярны плоскости основания конуса и пирамиды.

Пересечением плоскости  $MOB$ , проходящей через две параллельные прямые  $MO$  и  $DK$ , и боковой поверхности конуса является отрезок  $MB$  — образующая конуса. Следовательно, точка  $D$  этой плоскости, лежащая на боковой поверхности конуса, принадлежит образующей  $MB$ .

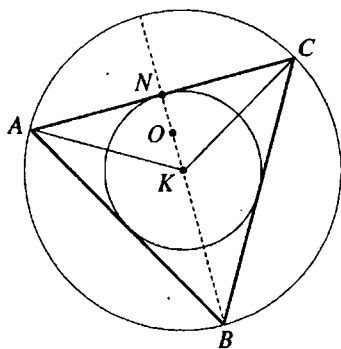


Рис. 12.116,а

$$\triangle MOB \sim \triangle DKB. \text{ Тогда } \frac{MO}{DK} = \frac{OB}{BK}.$$

Пусть радиус основания конуса  $OB = R$ .

$$\text{Тогда } AB = BC = 2R \sin \angle BAC = 2R \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = 2R \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AB^2 \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha = \\ &= 2R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{В } \triangle BKC \text{ (рис. 12.116, а): } \angle CBK = \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle BCK = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{\pi - \alpha}{4},$$

$$\angle BKC = \pi - (\angle CBK + \angle BCK) = \pi - \frac{\pi + \alpha}{4}.$$

$$\frac{BK}{\sin \angle BCK} = \frac{BC}{\sin \angle BKC};$$

$$BK = \frac{BC \sin \angle BCK}{\sin \angle BKC} = \frac{2R \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi - \alpha}{4}}{\sin \left( \pi - \frac{\pi + \alpha}{4} \right)} = \frac{2R \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi - \alpha}{4}}{\sin \frac{\pi + \alpha}{4}} =$$



$$= \frac{2R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\pi + \alpha}{4}}{\sin \frac{\pi + \alpha}{4}} = 2R \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi + \alpha}{4}.$$

Объем конуса  $V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot MO$ .

Объем пирамиды  $V_2 = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot DK$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{\pi R^2 \cdot MO}{S_{\Delta ABC} \cdot DK} = \frac{\pi R^2 \cdot OB}{2R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \cdot BK} = \\ &= \frac{\pi R^3}{4R^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi + \alpha}{4} \sin \alpha} = \frac{\pi \operatorname{tg} \frac{\pi + \alpha}{4}}{4 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{\pi \operatorname{tg} \frac{\pi + \alpha}{4}}{4 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}$ .

**12.251.** Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, делит высоту пирамиды в отношении  $m : n$ , считая от вершины пирамиды. Найти угол между двумя смежными боковыми гранями.

*Решение.*

Центр шара  $M$ , вписанного в правильную пирамиду  $SABCD$ , находится на высоте  $SO$  (рис. 12.117)  $SM : MO = m : n$ .

$OC \perp BD$ ,  $OC$  — проекция  $SC$  на основание пирамиды. Тогда  $SC \perp BD$ .

В плоскости  $SDC$  проведем  $DK \perp SC$ .

Так как  $DK \perp SC$ ,  $BD \perp SC$ , то плоскость  $BKD$  перпендикулярна  $SC$  и  $\angle BDK$  — искомый угол между смежными боковыми гранями  $BSC$  и  $DSC$ .

Пусть  $\angle BKD = \alpha$ ,  $\angle DCK = \beta$ .

Так как пирамида правильная, то  $\Delta DKC = \Delta BKC$  — по гипотенузе и острому углу и  $DK = BK$ , а  $KO$  — медиана, биссектриса и высота треугольника  $BKD$ .

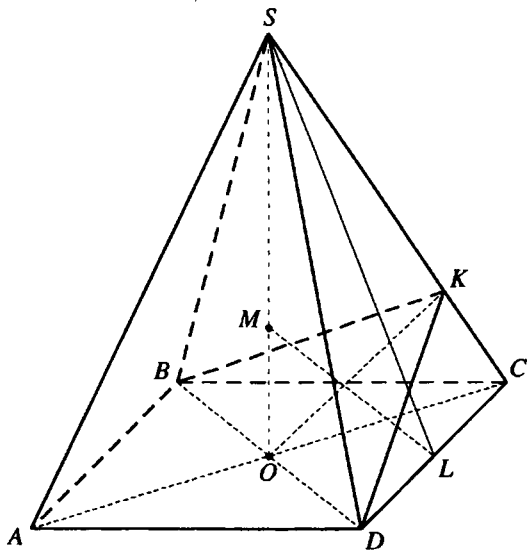


Рис. 12.117

Пусть  $L$  — середина  $CD$ , тогда  $LM$  — биссектриса  $\angle SLO$  и  $OL : SL = OM : SM = n : m$ .

Так как  $CL = OL$ , то  $\operatorname{ctg} \beta = \frac{CL}{SL} = \frac{OL}{SL} = \frac{n}{m}$ .

$$\sin \beta = \frac{DK}{DC}; \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{OD}{DK}. \text{ Тогда } \sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta = \frac{OD}{DC} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta &= \frac{1}{2}; (1 - \cos \alpha) \sin^2 \beta = 1; \cos \alpha = 1 - \frac{1}{\sin^2 \beta} = \\ &= -\operatorname{ctg}^2 \beta = -\frac{n^2}{m^2} \Rightarrow \alpha = \arccos \left( -\frac{n^2}{m^2} \right) = \pi - \arccos \frac{n^2}{m^2}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\pi - \arccos \frac{n^2}{m^2}$ .

**12.252.** Отношение стороны основания правильной  $n$ -угольной пирамиды к радиусу описанного шара равно  $k$ . Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания и допустимые значения  $k$ .

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр шара, описанного около правильной пирамиды  $SA_1A_2\dots A_n$  с высотой  $SB$  (рис. 12.118). Проведем из точки  $O$  перпендикуляр  $OD$  на боковое ребро  $SA_1$  пирамиды. Точка  $O$  лежит на  $SO$ .  $\angle SA_1B$  — искомый угол между боковым ребром и плоскостью основания. Пусть  $\angle SA_1B = \alpha$ .

Независимо от того, лежит ли точка  $O$  на отрезке  $BS$ , его продолжению за точку  $B$  или совпадает с точкой  $B$ , прямоугольные треугольники  $A_1SB$  и  $ODS$  имеют общий острый угол  $\angle SOD = \angle SA_1B = \alpha$ .

Если  $C$  — середина  $A_1A_2$ , то  $\angle A_1BC = \frac{\pi}{n}$ .

Пусть  $A_1S = a$ ,  $SO = OA_1 = R$ , тогда из

$$\triangle SDO \left( \angle SDO = \frac{\pi}{2} \right): SD = SO \sin \angle SOD = R \sin \alpha.$$

Так как  $\triangle A_1OS$  — равнобедренный, то  $A_1S = 2SD = 2R \sin \alpha$ .

$$\text{В } \triangle A_1BS \left( \angle A_1BS = \frac{\pi}{2} \right): A_1B = A_1S \cos \angle SA_1B = 2R \sin \alpha \cos \alpha = R \sin 2\alpha.$$

$$\text{Из } \triangle A_1CB \left( \angle A_1CB = \frac{\pi}{2} \right): A_1B = \frac{A_1C}{\sin \angle A_1BC} = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \Rightarrow R \sin 2\alpha = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

$$\text{Так как } \frac{a}{R} = k, \text{ то } R \sin 2\alpha = \frac{kR}{2 \sin \frac{\pi}{n}}; \sin 2\alpha = \frac{k}{2 \sin \frac{\pi}{n}}; \alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{k}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

$$\text{При этом } \frac{k}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \leq 1 \Rightarrow k \leq 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

$$\text{Так как по условию задачи } k > 0, \text{ то } \alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{k}{2 \sin \frac{\pi}{n}}, 0 < k \leq 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \arcsin \frac{k}{2 \sin \frac{\pi}{n}}, 0 < k \leq 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

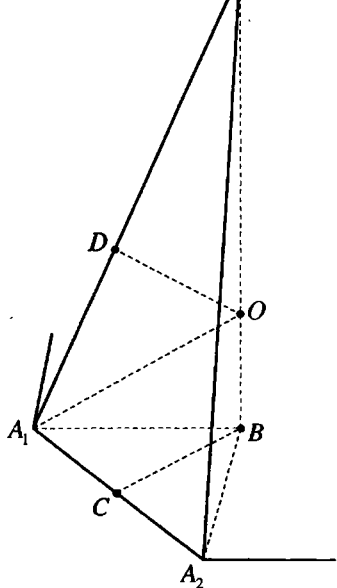


Рис. 12.118

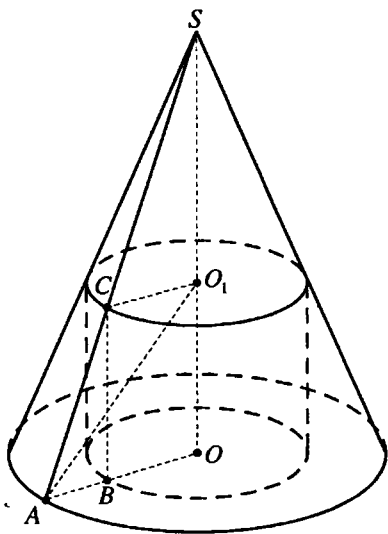


Рис. 12.119

**12.253.** В конус вписан цилиндр; нижнее основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса. Прямая, проходящая через центр верхнего основания цилиндра и точку на окружности основания конуса, составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найти отношение объемов конуса и цилиндра, если угол между образующей и высотой конуса равен  $\beta$ .

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр оснований данного конуса и вписанного в него цилиндра,  $O_1$  — центр верхнего основания цилиндра,  $SA$  — образующая конуса,  $CB$  — образующая цилиндра,  $\angle ASO = \beta$ ,  $\angle O_1AO = \alpha$ , (рис. 12.119).

Если радиус основания конуса  $OA = 1$ , то из  $\triangle AOS$  ( $\angle AOS = 90^\circ$ ):  $SO = OA \operatorname{ctg} \angle ASO = \operatorname{ctg} \beta$ .

$$\text{Объем конуса } V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \pi \operatorname{ctg} \beta.$$

$$\text{В } \triangle O_1OA (\angle O_1OA = 90^\circ): O_1O = OA \operatorname{tg} \angle O_1AO = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$BC = OO_1 = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\angle ACB = \angle ASO = \beta.$$

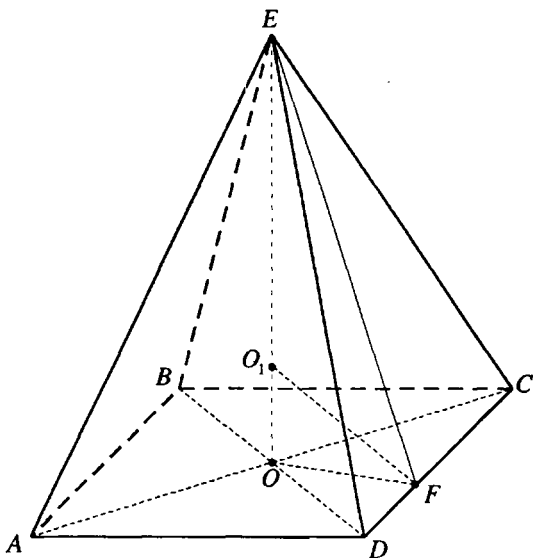


Рис. 12.120

Из  $\triangle ABC$  ( $\angle ABC = 90^\circ$ ):  $AB = BC \operatorname{tg} \angle ACB = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ .

$$OB = OA - AB = 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

$$\text{Объем цилиндра } V_2 = \pi \cdot OB^2 \cdot OO_1 = \frac{\pi \cos^2(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}.$$

$$\text{Тогда } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\operatorname{ctg} \beta \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{3 \cos^2(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos^3 \alpha \cos^3 \beta}{3 \sin \alpha \sin \beta \cos^2(\alpha + \beta)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\cos^3 \alpha \cos^3 \beta}{3 \sin \alpha \sin \beta \cos^2(\alpha + \beta)}.$$

**12.254.** Основанием пирамиды служит ромб с острым углом  $\alpha$ . Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол  $\beta$ . Найти радиус шара, вписанного в пирамиду, если объем пирамиды равен  $V$ .

*Решение.*

Пусть ромб  $ABCD$  — основание пирамиды  $EABCD$ ,  $\angle BCD = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,  $EO$  — ее высота (рис. 12.120). Так как все боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол  $\beta$ , то точка  $O$  — центр круга, вписанного в ромб  $ABCD$ , — точка пересечения его диагоналей, а точки высоты  $EO$  равноудалены от боковых граней пирамиды.

В плоскости  $CED$  опустим перпендикуляр  $EF$  на  $CD$ .  $OF$  — это проекция  $EO$  на плоскость основания. Тогда  $OF \perp CD$  и  $\angle EFO$  — угол наклона грани  $CED$  к плоскости основания,  $\angle EFO = \beta$ .

Если  $O_1$  — точка пересечения биссектрисы  $\angle EFO$  с высотой пирамиды, то  $O_1$  — центр шара, вписанного в пирамиду,  $O_1O$  — его радиус.

Пусть  $CD = a$ , тогда из

$$\triangle COD (\angle COD = 90^\circ): CO = CD \cos \angle OCD = a \cos \frac{\alpha}{2}.$$

В  $\triangle OFC$  ( $\angle OFC = 90^\circ$ ):

$$OF = OC \sin \angle OCD = a \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} a \sin \alpha.$$

$$\text{В } \triangle EOF (\angle EOF = 90^\circ): EO = OF \operatorname{tg} \angle EFO = \frac{1}{2} a \sin \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Площадь основания пирамиды  $S = CD^2 \sin \angle BCD = a^2 \sin \alpha$ .

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S \cdot EO = \frac{1}{6} a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta \Rightarrow a = \frac{\sqrt[3]{6V \sin \alpha \operatorname{ctg} \beta}}{\sin \alpha}.$$

В  $\triangle O_1OF$  ( $\angle O_1OF = 90^\circ$ ):

$$OO_1 = OF \operatorname{tg} \angle FO_1O = \frac{1}{2} a \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \sqrt[3]{6V \sin \alpha \operatorname{ctg} \beta}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \sqrt[3]{6V \sin \alpha \operatorname{ctg} \beta}.$$

**12.255.** Две грани треугольника пирамиды — равные между собой прямоугольные треугольники с общим катетом, равным  $d$ . Угол между этими гранями равен  $\alpha$ . Две другие грани пирамиды образуют двугранный угол  $\beta$ . Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

*Решение.*

Пусть грани  $SAB$  и  $SAC$  пирамиды  $SABC$  (рис. 12.121) равны,  $\angle SAB = \angle SAC = 90^\circ$ ,  $SA = d$ . Тогда отрезок  $SA$  перпендикулярен

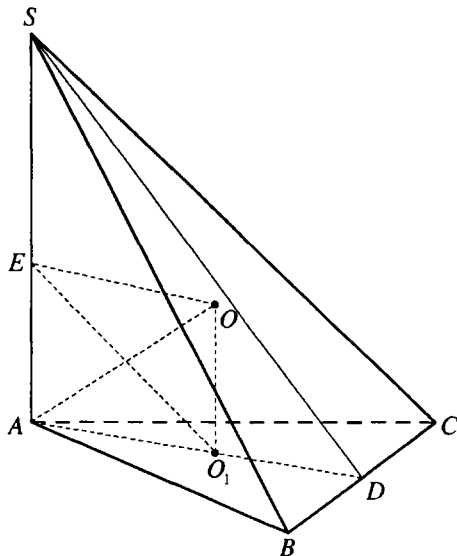


Рис. 12.121

плоскости основания пирамиды и является высотой пирамиды,  $\triangle BAC$  — равнобедренный. Если  $D$  — это середина  $BC$ , то  $AD \perp BC$ ,  $DS \perp BC$ ,  $\angle SDA$  — линейный угол двугранного угла, образованного гранями  $BSC$  и  $BAC$  пирамиды,  $\angle SDA = \beta$ .  $BA \perp SA$ ,  $CA \perp SA \Rightarrow \angle BAC$  — угол между гранями  $SAB$  и  $SAC$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .

$O_1$  — центр круга, описанного около  $\triangle ABC$ ,  $E$  — середина  $SA$ ,

$$EA = \frac{d}{2}.$$

Центр  $O$  шара, описанного около пирамиды, — точка пересечения перпендикуляра, восстановленного к плоскости  $ABC$  в точке  $O_1$  и серединного перпендикуляра отрезка  $SA$ , лежащего в плоскости  $SAD$ ,  $OA$  — радиус шара.

В четырехугольнике  $AEOO_1$  углы при вершинах  $A$ ,  $E$ ,  $O_1$  — прямые, поэтому  $AEOO_1$  — прямоугольник и  $OA = EO_1$ .

В  $\triangle SAD$  ( $\angle SAD = 90^\circ$ ):  $AD = SA \operatorname{ctg} \angle SDA = d \operatorname{ctg} \beta$ .

В  $\triangle ADB$  ( $\angle ADB = 90^\circ$ ):  $BD = AD \operatorname{tg} \angle BAD = d \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

$BC = 2BD = 2d \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

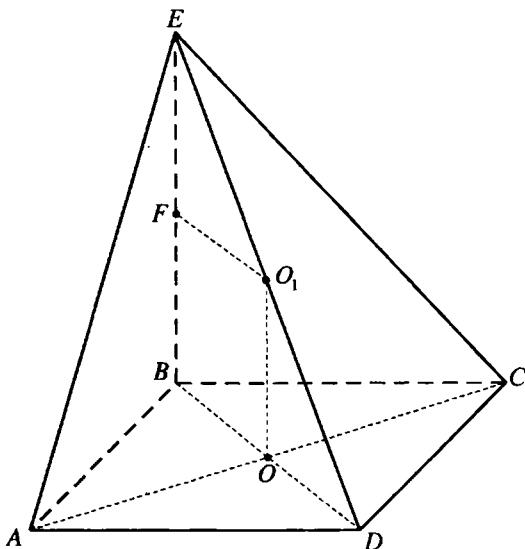


Рис. 12.122

$O_1A$  — радиус круга, описанного около  $\triangle ABC$ . Тогда

$$O_1A = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{2d \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \alpha} = \frac{d \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{d \operatorname{ctg} \beta}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

В  $\triangle EAO_1$  ( $\angle EAO_1 = 90^\circ$ ):

$$EO_1 = \sqrt{EA^2 + AO_1^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{d^2 \operatorname{ctg}^2 \beta}{4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{d}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^4 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^2 \beta}$$

Отвеч:  $\frac{d}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^4 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^2 \beta}$ .

**12.256.** Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен  $\alpha$ . Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, а наибольшее ребро составляет с плоско-



стью основания угол  $\beta$ . Радиус шара, описанного около пирамиды, равен  $R$ . Найти объем пирамиды.

*Решение.*

Пусть прямоугольник  $ABCD$  — основание пирамиды  $EABCD$  (рис. 12.122), угол между его диагоналями равен  $\alpha$ , боковое ребро  $EB$  перпендикулярно плоскости основания пирамиды и является его высотой,  $AB$ ,  $CB$ ,  $DB$  — проекции боковых ребер  $AE$ ,  $EC$ ,  $DE$  на плоскость основания,  $DB > AB$ ,  $DB > CB \Rightarrow DE$  — наибольшее боковое ребро и  $\angle EDB = \beta$ .

Точки  $O_1$  — середина  $ED$ , точка  $O$  пересечения диагоналей прямоугольника — середина  $BD$ . Таким образом  $OO_1$  — средняя линия  $\triangle EDB$  и  $OO_1 \parallel BE$ . Тогда прямая  $OO_1$  перпендикулярна плоскости основания и ее точки равноудалены от вершин основания. Так как  $O_1$  удалена от вершины пирамиды на расстояние  $O_1E = O_1D$ , то  $O_1$  равноудалена от всех вершин пирамиды и является центром описанного шара,  $O_1D = O_1E = R$ .

В  $\triangle EBD$  ( $\angle EBD = 90^\circ$ ):

$$EB = ED \sin \angle EDB = 2R \sin \beta;$$

$$BD = ED \cos \angle EDB = 2R \cos \beta.$$

Площадь основания пирамиды  $S = \frac{1}{2} BD^2 \sin \alpha = 2R^2 \cos^2 \beta \sin \alpha$ .

Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot EB = \frac{2}{3} R^2 \cos^2 \beta \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta = \frac{2}{3} R^3 \sin 2\beta \cos \beta \sin \alpha.$$

*Ответ:*  $\frac{2}{3} R^3 \sin 2\beta \cos \beta \sin \alpha$ .

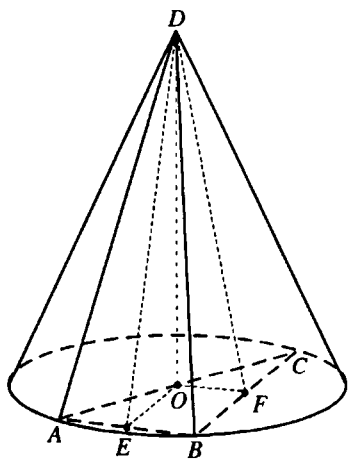


Рис. 12.123

**12.257.** Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, вписанный в основание конуса. Вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса. Боковые грани пирамиды, содержащие катеты основания, составляют с плоскостью основания углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Найти отношение объемов пирамиды и конуса.

*Решение.*

Пусть  $DO$  — общая высота данных пирамиды  $DABC$  и конуса (рис. 12.123). Так как  $O$  — центр круга,

описанного около прямоугольного треугольника  $ABC$ , то  $O$  — середина гипотенузы  $AC$ .

Проведем в плоскости основания из точки  $O$  перпендикуляры  $OE$  и  $OF$  на катеты  $AB$  и  $BC$ .

$OE$  и  $OF$  — проекции  $DE$  и  $DF$  на плоскость основания. Тогда  $DE \perp AB$ ,  $DF \perp BC$ ,  $\angle DEO$  и  $\angle DFO$  — углы наклона боковых граней  $DAB$  и  $BDC$  к плоскости основания,  $\angle DEO = \beta$ ,  $\angle DFO = \alpha$ .

Если  $DO = a$ , то из  $\triangle DOE$  ( $\angle DOE = 90^\circ$ ):  $EO = DO \operatorname{ctg} \angle DEO = a \operatorname{ctg} \beta$ .

Из  $\triangle DOF$  ( $\angle DOF = 90^\circ$ ):  $FO = DO \operatorname{ctg} \angle DFO = a \operatorname{ctg} \alpha$ .

$AB = 2 \cdot FO = 2a \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $BC = 2 \cdot EO = 2a \operatorname{ctg} \beta$ .

В  $\triangle ABC$  ( $\angle ABC = 90^\circ$ ):  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$ .

Площадь основания пирамиды  $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 2a^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$ , а

ее объем  $V_1 = \frac{1}{3} S \cdot DO = \frac{2}{3} a^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$ .

Радиус основания конуса  $R = \frac{1}{2} AC = a \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}$ , его объем

$V_2 = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot DO = \frac{1}{3} \pi a^3 (\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta)$ .

Таким образом,  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}{\pi (\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta)}$ .

Ответ:  $\frac{2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}{\pi (\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta)}$ .

**12.258.** Сторона квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна  $a$ . В пирамиду вписана правильная четырехугольная призма; вершины верхнего основания лежат на боковых ребрах, вершины нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол  $\varphi$ . Найти объем призмы, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть  $EO$  — высота правильной пирамиды  $EABCD$ ,  $AD = a$ ,  $\angle ECA = \alpha$ ,  $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$  — правильная призма,  $\angle M_1 KM = \varphi$  (рис. 12.124). Вершины нижнего основания призмы принадлежат диагоналям квадрата  $ABCD$ .

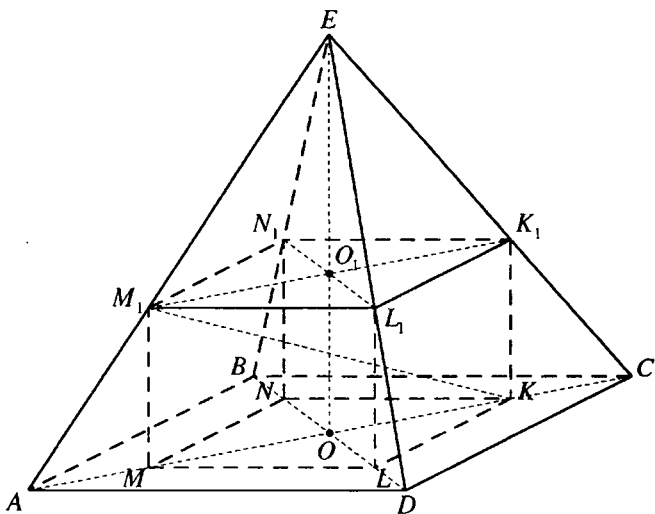


Рис. 12.124

Если  $MN = b$ , то  $MK = b\sqrt{2}$ .

$\triangle AMM_1 = \triangle CKK_1$  — по катету и острому углу ( $MM_1 = KK_1$ ,  $\angle M_1AM = \angle K_1CK = \alpha$ ).

$$\text{Отсюда } CK = \frac{AC - MK}{2} = \frac{(a - b)\sqrt{2}}{2}.$$

В  $\triangle M_1MK$  ( $\angle M_1MK = 90^\circ$ ):  $MM_1 = MK \operatorname{tg} \angle M_1KM = b\sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi$ .

В  $\triangle K_1KC$  ( $\angle K_1KC = 90^\circ$ ):  $CK = K_1K \operatorname{ctg} \angle K_1CK = b\sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a - b}{2} = b \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \alpha; \quad b = \frac{a}{1 + 2 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{a \operatorname{ctg} \varphi}{\operatorname{ctg} \varphi + 2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Объем призмы

$$\begin{aligned} V &= S_{MNKL} \cdot MM_1 = b^3 \sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{a^3 \operatorname{ctg}^3 \varphi}{(\operatorname{ctg} \varphi + 2 \operatorname{ctg} \alpha)^3} \cdot \sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi = \\ &= \frac{a^3 \sqrt{2} \operatorname{ctg}^2 \varphi}{(\operatorname{ctg} \varphi + 2 \operatorname{ctg} \alpha)^3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^3 \sqrt{2} \operatorname{ctg}^2 \varphi}{(\operatorname{ctg} \varphi + 2 \operatorname{ctg} \alpha)^3}.$$

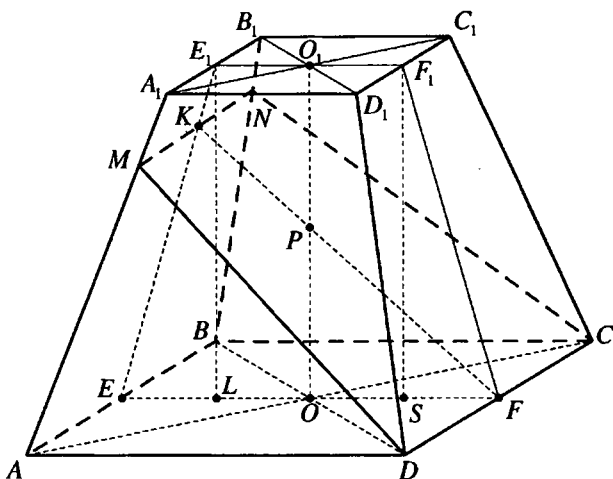


Рис. 12.125

**12.259.** Сторона нижнего основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна  $a$ , сторона верхнего основания равна  $b$ . Боковая грань составляет с плоскостью основания угла  $\alpha$ . Через сторону нижнего основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований, проведена плоскость, пересекающая противоположную боковую грань по некоторой прямой. Найти расстояние от этой прямой до нижнего основания.

*Решение.*

Пусть точка  $P$  — середина отрезка  $OO_1$ , соединяющего центры оснований правильной усеченной пирамиды  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $AD = a$ ,  $A_1 D_1 = b$  (рис. 12.125),  $MN$  — прямая, по которой плоскость, проходящая через сторону  $CD$  нижнего основания и точку  $P$ , пересекает плоскость грани  $AA_1 B_1 B$ . Так как  $CD \parallel AB$ , то  $MN \parallel AB$  и прямая  $MN$  параллельна плоскости основания.

$E$  — середина  $AB$ ,  $E_1$  — середина  $A_1 B_1$ ,  $F$  — середина  $CD$ ,  $F_1$  — середина  $C_1 D_1$ . Тогда плоскость четырехугольника  $EE_1 F_1 F$  перпендикулярна плоскости основания,  $\angle E_1 E O = \angle F_1 F O = \alpha$ .

$K$  — точка пересечения  $MN$  и  $EE_1$ . Длина перпендикуляра  $KL$ , опущенного из точки  $K$  на нижнее основание, — искомое расстояние.

Проведем из точки  $F_1$  перпендикуляр  $F_1 S$  на нижнее основание.

$$SF = \frac{EF - E_1 F_1}{2} = \frac{a - b}{2}.$$

$$\text{В } \Delta F_1SF (\angle F_1SF = 90^\circ): F_1S = SF \operatorname{tg} \angle F_1FS = \frac{a-b}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$OP = \frac{1}{2} OO_1 = \frac{1}{2} F_1S = \frac{a-b}{4} \operatorname{tg} \alpha.$$

Если  $KL = x$ , то из

$$\Delta KLE (\angle KLE = 90^\circ): EL = KL \operatorname{ctg} \angle KEL = x \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$LF = EF - EL = a - x \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\Delta KLF \sim \Delta POF \Rightarrow$$

$$\Delta KLF \sim \Delta POF \Rightarrow \frac{KL}{LF} = \frac{PO}{OF}; \frac{x}{a - x \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\frac{a-b}{4} \operatorname{tg} \alpha}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ax = (a - x \operatorname{ctg} \alpha)(a - b) \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow 2ax = a^2 \operatorname{tg} \alpha - ab \operatorname{tg} \alpha - ax + bx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(3a - b) = a(a - b) \operatorname{tg} \alpha; x = \frac{a(a - b) \operatorname{tg} \alpha}{3a - b}.$$

Ответ:  $\frac{a(a - b) \operatorname{tg} \alpha}{3a - b}$ .

**12.260.** Две боковые грани усеченной треугольной пирамиды — равные прямоугольные трапеции с острым углом  $\alpha$  и общей меньшей боковой стороной. Двугранный угол между этими гранями равен  $\beta$ . Найти угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания.

*Решение.*

Пусть общее боковое ребро  $AA_1$  равных боковых граней  $AA_1C_1C$  и  $AA_1B_1B$  усеченной пирамиды  $ABCA_1B_1C_1$  (рис. 12.126) перпендикулярно плоскости  $ABC$ , а  $\angle BAC$  — линейный угол двугранного угла между этими гранями,  $\angle BAC = \beta$ ,  $D$  — середина  $BC$ . Тогда, так как  $AC = AB$ ,

$$\angle DAB = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\beta}{2}, AD \perp BC.$$

Если  $SABC$  — полная пирамида, соответствующая данной усеченной и  $AD$  — проекция  $SD$  на плоскость  $ABC$ , то  $SD \perp BC$  и  $\angle SDA$  — искомый угол между боковой гранью  $BB_1C_1C$  и плоскостью основания.

$$\angle ABS = \angle ACS = \alpha.$$

Если  $AB = x$ , то из

$$\Delta SAB (\angle SAB = 90^\circ): SA = AB \operatorname{tg} \angle ABS = x \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{В } \Delta ADB (\angle ADB = 90^\circ): AD = AB \cos \angle DAB = x \cos \frac{\beta}{2}.$$

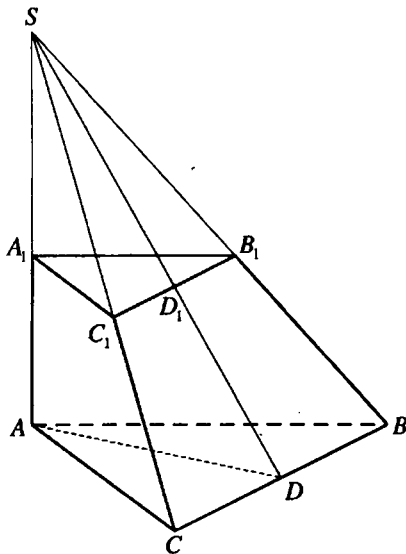


Рис. 12.126

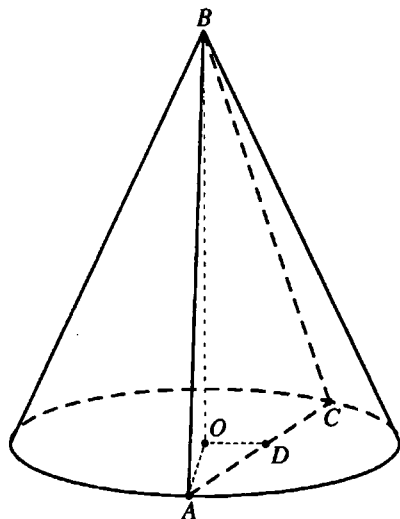


Рис. 12.127

$$\text{В } \triangle SAD (\angle SAD = 90^\circ): \operatorname{tg} \angle SDA = \frac{AS}{AD} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{\beta}{\cos \frac{\beta}{2}}}; \angle SDA = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{\beta}{\cos \frac{\beta}{2}}}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{\beta}{\cos \frac{\beta}{2}}}.$$

**12.261.** Через две образующие конуса, угол между которыми равен  $\alpha$ , проведена плоскость. Площадь сечения относится к полной поверхности конуса как  $2 : \pi$ . Найти угол между образующей и высотой конуса.

*Решение.*

Пусть  $BO$  — высота конуса,  $\triangle ABC$  — сечение конуса,  $\angle ABC = \alpha$ , (рис. 12.127),  $AB = d$ .

Тогда площадь сечения

$$S_1 = \frac{1}{2} AB^2 \sin \angle ABC = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha.$$

Если искомый угол  $ABC$  равен  $\beta$ , то из

$$\triangle AOB (\angle AOB = 90^\circ): AO = d \sin \beta.$$

Площадь полной поверхности конуса

$$S_2 = \pi \cdot OA^2 + \pi \cdot OA \cdot AB = \pi d^2 (1 + \sin \beta) \sin \beta.$$

$$\text{Тогда } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} d^2 \sin \alpha}{\pi d^2 (1 + \sin \beta) \sin \beta} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{2\pi(1 + \sin \beta) \sin \beta} = \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^2 \beta + 4 \sin \beta - \sin \alpha = 0,$$

$$\sin \beta = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \sin \alpha}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 + \cos(90^\circ - \alpha)}}{4} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{2 \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2} \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{2}.$$

Учитывая, что угол  $\beta$  острый,  $\sin \beta > 0 \Rightarrow$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2} \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos 45^\circ \right) = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{4} \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right);$$

$$\beta = \arcsin\left(\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{4} \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)\right).$$

$$\text{Ответ: } \arcsin\left(\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{4} \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)\right).$$

**12.262.** Боковая грань правильной четырехугольной усеченной пирамиды составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Плоскость, проведенная через сторону нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол  $\beta$ . Боковая поверхность пирамиды равна  $S$ . Найти стороны верхнего и нижнего оснований.

*Решение.*

Пусть трапеция  $DA_1B_1C_1$  — сечение правильной усеченной пирамиды  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  (рис. 12.128), точки  $E, E', F, F'$  — середины соответственно отрезков  $AB, A_1B_1, C_1D_1, CD$ .

Тогда  $E_1E \perp AB, EF \perp AB, \angle E_1EF = \alpha$  и плоскость трапеции  $EE_1F_1F$  перпендикулярна плоскостям оснований усеченной пирамиды.

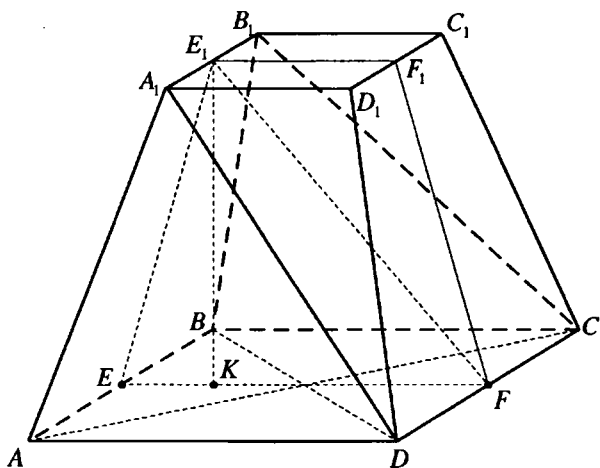


Рис. 12.128

$E_1K$  — высота трапеции  $EE_1F_1F$ .

$KF \perp CD$ ,  $KF$  — проекция  $E_1F_1$  на плоскость квадрата  $ABCD$ . Тогда  $E_1F_1 \perp CD$ ,  $\angle E_1FK = \beta$ .

Если  $CD = a$ ,  $C_1D_1 = b$ ,

$$EK = \frac{EF - E_1F_1}{2} = \frac{a - b}{2}; \quad KF = \frac{EF + E_1F_1}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

В  $\triangle E_1KE$  ( $\angle E_1KE = 90^\circ$ ):

$$EE_1 = \frac{EK}{\cos \alpha} = \frac{a - b}{2 \cos \alpha}; \quad E_1K = EK \operatorname{tg} \angle E_1EK = \frac{a - b}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

В  $\triangle E_1KF$  ( $\angle E_1KF = 90^\circ$ ):  $E_1K = KF \operatorname{tg} \angle E_1FK = \frac{a + b}{2} \operatorname{tg} \beta$ ,

таким образом  $\frac{a - b}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a + b}{2} \operatorname{tg} \beta$ ;  $a(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) = b(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$

$$\frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{b \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad b = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды

$$S = 4 \cdot \frac{a + b}{2} \cdot \frac{a - b}{2 \cos \alpha} = \frac{a^2 - b^2}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{a^2 - \frac{a^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}}{\cos \alpha} = S;$$



$$\begin{aligned}
 S &= a^2 \cdot \frac{\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin^2(\alpha + \beta)} \Leftrightarrow a^2 \cdot \frac{\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha + 2\beta)}{2 \cos \alpha \sin^2(\alpha + \beta)} = \\
 &= S \Leftrightarrow a^2 \cdot \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{\cos \alpha \sin^2(\alpha + \beta)} = S \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{S \cos \alpha \sin^2(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \cos \alpha \sin 2\beta}} = \\
 &= \sin(\alpha + \beta) \sqrt{\frac{S}{2 \sin \alpha \sin 2\beta}} \cdot b = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \sin(\alpha - \beta) \sqrt{\frac{S}{2 \sin \alpha \sin 2\beta}}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \sin(\alpha + \beta) \sqrt{\frac{S}{2 \sin \alpha \sin 2\beta}}; \sin(\alpha - \beta) \sqrt{\frac{S}{2 \sin \alpha \sin 2\beta}}.$$

**12.263.** Высота правильной треугольной усеченной пирамиды равна  $H$  и является средним пропорциональным между сторонами оснований. Боковое ребро составляет с основанием угол  $\alpha$ . Найти объем пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $a$  и  $b$  — стороны оснований данной усеченной пирамиды, причем  $a > b$ .

$$\text{Тогда } H = \left( \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{b\sqrt{3}}{3} \right) \operatorname{tg} \alpha = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha, \quad a-b = H\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\text{площади оснований } S_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad S_2 = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}, \quad H^2 = ab.$$

Объем усеченной пирамиды

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{H}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{H}{3} \left( \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{ab\sqrt{3}}{4} \right) = \\
 &= \frac{H\sqrt{3}}{12} (a^2 + b^2 + ab) = \frac{H\sqrt{3}}{12} ((a-b)^2 + 3ab) = \\
 &= \frac{H\sqrt{3}}{12} (3H^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 3H^2) = \frac{H^3 \sqrt{3}}{4} (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) = \frac{H^3 \sqrt{3}}{4 \sin^2 \alpha}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{H^3 \sqrt{3}}{4 \sin^2 \alpha}.$$

**12.264.** Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся как  $m : n$  ( $m > n$ ). Высота пирамиды равна  $H$ . Боковое ребро составляет с плоскостью оснований угол  $\alpha$ . Найти боковую поверхность пирамиды.

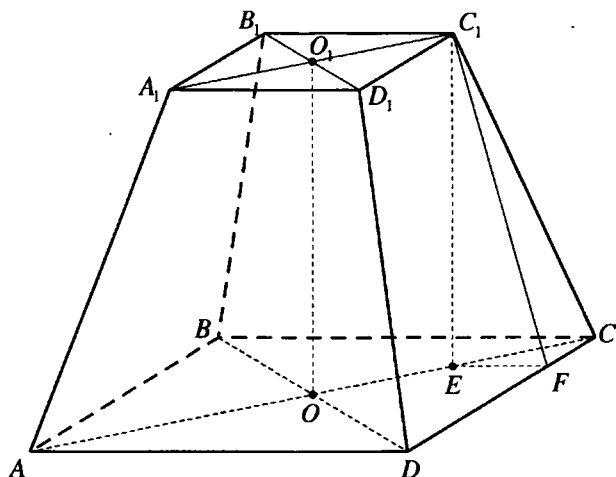


Рис. 12.129

*Решение.*

Пусть сторона верхнего основания усеченной пирамиды равна  $nx$ . Тогда сторона нижнего основания равна  $mx$ .

Если  $C_1E$  — высота правильной усеченной пирамиды  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  (рис. 12.129),  $C_1E = H$ , то точка  $E$  принадлежит диагонали  $AC$  квадрата  $ABCD$ ,  $\angle C_1CE = \alpha$ .

$$\text{В } \triangle C_1EC (\angle C_1EC = 90^\circ): CC_1 = \frac{H}{\sin \alpha}; CE = H \operatorname{ctg} \alpha.$$

Пусть  $C_1F$  — высота боковой грани  $CC_1D_1D$ .

$$\text{Тогда в } \triangle EFC \angle EFC = 90^\circ, EF = CF = \frac{EC\sqrt{2}}{2} = \frac{H\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha}{2},$$

$$CF = \frac{CD - C_1D_1}{2} = \frac{(m-n)x}{2} \Rightarrow \frac{(m-n)x}{2} = \frac{H\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha}{2};$$

$$x = \frac{H\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha}{m-n}.$$

В  $\triangle C_1FC (\angle C_1FC = 90^\circ)$ :

$$\begin{aligned} C_1F &= \sqrt{C_1C^2 - CF^2} = \sqrt{\frac{H^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{H^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{2}} = \\ &= \frac{H}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{H}{\sqrt{2}} \sqrt{2(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{H}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды

$$S = 4 \cdot \frac{CD + C_1D_1}{2} \cdot C_1F = 2(mx + nx) \cdot \frac{H}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} =$$

$$= 2(m+n) \cdot \frac{H\sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha}{m-n} \cdot \frac{H}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{2(m+n)H^2 \operatorname{ctg} \alpha}{m-n} \sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

Ответ:  $\frac{2(m+n)H^2 \operatorname{ctg} \alpha}{m-n} \sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$

**12.265.** Через вершину конуса проведена плоскость, делящая окружность основания в отношении  $p : q$ . Эта плоскость отстоит от центра основания конуса на расстоянии  $a$  и составляет с высотой конуса угол  $\alpha$ . Найти объем конуса.

*Решение.*

Пусть  $BO$  — высота конуса,  $\triangle ABC$  — сечение конуса,  $\angle AOC = \frac{360^\circ q}{p+q}$

(рис. 12.130),  $D$  — середина  $AC$ , тогда  $OD \perp AC$ ,  $\angle AOD = \frac{180^\circ q}{p+q}$ ,  $BD \perp AC$ .

Проведем из точки  $O$  перпендикуляр  $OE$  на плоскость  $ABC$ ,  $OE = a$ ,  $DE$  — проекция  $DO$  на плоскость  $ABC$ ,  $DO \perp AC$ . Тогда  $DE \perp AC$ . Таким образом, точка  $E$  на отрезке  $BD$ , прямая  $BD$  — проекция прямой  $BO$  на плоскость  $ABC$ ,  $\angle OBD = \alpha$ .

В  $\triangle BEO$  ( $\angle BEO = 90^\circ$ ):  $BO = \frac{OE}{\sin \angle OBD} = \frac{a}{\sin \alpha}.$

В  $\triangle BOD$  ( $\angle BOD = 90^\circ$ ):  $OD = BO \operatorname{tg} \angle OBD = \frac{a}{\cos \alpha}.$

В  $\triangle ADO$  ( $\angle ADO = 90^\circ$ ):  $OA = \frac{OD}{\cos \angle AOD} = \frac{a}{\cos \alpha \cos \frac{180^\circ q}{p+q}}.$

Объем конуса

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot BO = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^2}{\cos^2 \alpha \cos^2 \frac{180^\circ q}{p+q}} \cdot \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{2\pi a^3}{3 \sin 2\alpha \cos \alpha \cos^2 \frac{180^\circ q}{p+q}}.$$

Ответ:  $\frac{2\pi a^3}{3 \sin 2\alpha \cos^2 \frac{180^\circ q}{p+q} \cdot \cos \alpha}.$

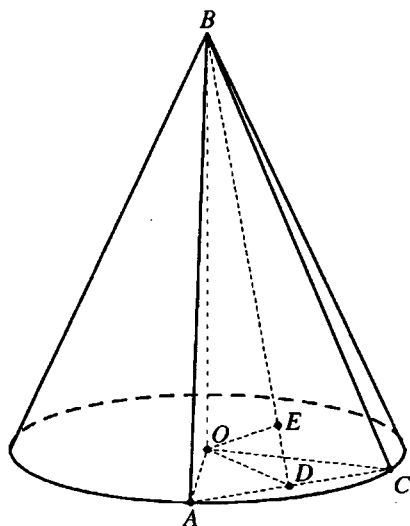


Рис. 12.130

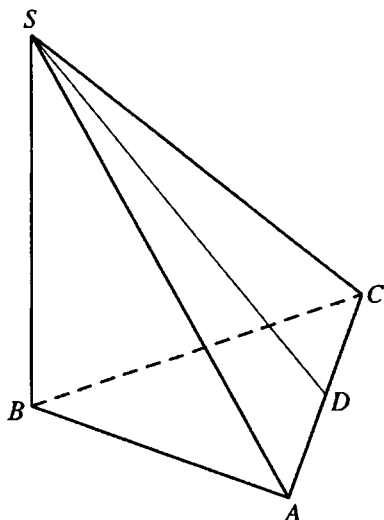


Рис. 12.131

**12.266.** Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Сумма двух неравных между собой плоских углов при вершине равна  $\frac{\pi}{2}$ . Найти эти углы.

*Решение.*

Пусть грани  $SBA$  и  $SBC$  пирамиды  $SABC$  перпендикулярны плоскости  $ABC$  основания (рис. 12.131),  $\triangle ABC$  — равносторонний. Тогда  $\triangle SBA = \triangle SBC$  — по двум катетам и  $\angle ASB = \angle CSB$ ,  $AS = SC$ .

Если  $\angle ASC = \alpha$ , то  $\angle ASB = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

$D$  — середина  $AC$ .

В  $\triangle ADS$  ( $\angle ADS = \frac{\pi}{2}$ ):  $AD = AS \sin \frac{\alpha}{2}$ .

В  $\triangle ABS$  ( $\angle ABS = \frac{\pi}{2}$ ):  $AB = AS \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ .

Так как  $AB = 2AD$ , то  $AS \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2AS \sin \frac{\alpha}{2}$ ;  $\cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ .

$0 < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} > 0, \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \Rightarrow \cos \alpha = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ ;

$$\cos^2 \alpha = 2(1 - \cos \alpha), \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 2 = 0; \cos \alpha = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Учитывая, что  $0 < \cos \alpha < 1$ , имеем  $\cos \alpha = \sqrt{3} - 1, \alpha = \arccos(\sqrt{3} - 1)$

$$\angle ASB = \frac{\pi}{2} - \arccos(\sqrt{3} - 1)$$

Ответ:  $\arccos(\sqrt{3} - 1); \frac{\pi}{2} - \arccos(\sqrt{3} - 1)$

**12.267.** Отношение полной поверхности конуса к площади его осевого сечения равно  $k$ . Найти угол между высотой и образующей конуса и допустимые значения  $k$ .

*Решение.*

Пусть  $\alpha$  — угол между высотой и образующей конуса,  $l$  — образующая,  $r$  — радиус основания конуса.

Тогда  $r = l \sin \alpha$  и площадь полной поверхности конуса

$$S_1 = \pi r^2 + \pi r l = \pi l^2 \sin^2 \alpha + \pi l^2 \sin \alpha = \pi l^2 \sin \alpha (\sin \alpha + 1)$$

Угол при вершине осевого сечения равен  $2\alpha$  и площадь сечения

$$S_2 = \frac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha.$$

Таким образом

$$k = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi l^2 \sin \alpha (\sin \alpha + 1)}{\frac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha} = \frac{\pi (\sin \alpha + 1)}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{k}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\pi}{k} \Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\pi}{k} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{k} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} =$$

$$= -\operatorname{arctg} \frac{\pi}{k} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\pi}{k},$$

где  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}; 0 < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) < 1; 0 < \frac{\pi}{k} < 1; k > \pi.$

Ответ:  $\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\pi}{k}, k > \pi.$

**12.268.** Одна из граней треугольной призмы, вписанной в цилиндр, проходит через ось цилиндра. Диагональ этой грани составляет с приле-

жащими к ней сторонами основания призмы углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Найти объем призмы, если высота цилиндра равна  $H$ .

*Решение.*

Пусть грань  $AA_1B_1B$  призмы  $ABCA_1B_1C_1$  проходит через ось  $OO_1$  цилиндра, в который она вписана (рис. 12.132),  $AA_1 = H$ ,  $\angle ABA_1 = \alpha$ ,  $\angle CBA_1 = \beta$ , центр  $O$  основания цилиндра является серединой стороны  $AB$  треугольника  $ABC$ , вписанного в это основание. Отсюда  $\angle ACB = 90^\circ$ .

$AC$  — проекция  $A_1C_1$  на плоскость  $ABC$ ,  $AC \perp BC$ . Значит,  $A_1C \perp BC$ .

В  $\triangle A_1AB$  ( $\angle A_1AB = 90^\circ$ ):

$$AB = AA_1 \operatorname{ctg} \angle ABA_1 = H \operatorname{ctg} \alpha; A_1B = \frac{AA_1}{\sin \angle ABA_1} = \frac{H}{\sin \alpha}.$$

В  $\triangle A_1CB$  ( $\angle A_1CB = 90^\circ$ ):  $BC = A_1B \cos \angle CBA_1 = \frac{H \cos \beta}{\sin \alpha}$ .

Из  $\triangle ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ):

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{H^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{H^2 \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha}} = \frac{H}{\sin \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} = \\ &= \frac{H}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\beta}{2}} = \frac{H}{\sin \alpha} \sqrt{\sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}. \end{aligned}$$

Объем призмы:

$$\begin{aligned} V &= S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{\sin \alpha} \sqrt{\sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)} \times \\ &\times \frac{H \cos \beta}{\sin \alpha} \cdot H = \frac{H^3 \cos \beta}{2 \sin^2 \alpha} \sqrt{\sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{H^3 \cos \beta}{2 \sin^2 \alpha} \sqrt{\sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}$ .

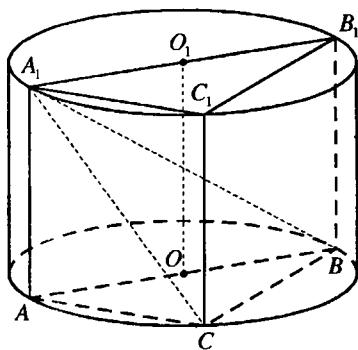


Рис. 12.132

**12.269.** Две вершины равностороннего треугольника со стороной  $a$  лежат на окружности верхнего основания цилиндра, а третья вершина — на окружности нижнего основания. Плоскость треугольника составляет с образующей цилиндра угол  $\alpha$ . Найти боковую поверхность цилиндра.

Решение.

Пусть сторона  $BC$  равностороннего треугольника  $ABC$  (рис. 12.133) лежит на верхнем основании цилиндра, вершина  $A$  на окружности нижнего основания,  $BC = a$ ,  $AM$  — образующая цилиндра,  $K$  — середина  $BC$ . Тогда  $BM = CM$ ,  $MK \perp BC$ ,  $AK \perp BC$ . Отсюда, прямая  $BC$  перпендикулярна плоскости  $AMK$ , значит, плоскости  $AMK$  и  $ABC$  перпендикулярны.

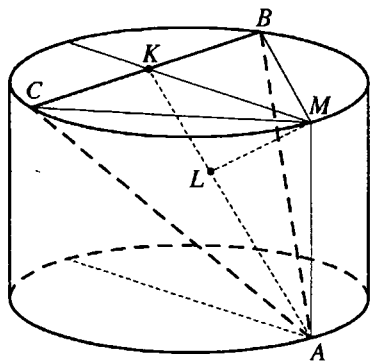


Рис. 12.133

В плоскости  $AMK$  проведен перпендикуляр  $ML$  на  $AK$ . Тогда  $AK$  — проекция прямой  $AM$  на плоскость  $ABC$  и  $\angle MAK = \alpha$ .

$$AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

В  $\triangle AMK$  ( $\angle AMK = 90^\circ$ ):

$$AM = AK \cos \angle MAK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos \alpha; \quad MK = AK \sin \angle MAK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \sin \alpha.$$

В  $\triangle AMB$  ( $\angle AMB = 90^\circ$ ):

$$\begin{aligned} BM^2 &= AB^2 - AM^2 = a^2 - \frac{3a^2}{4} \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{4} (4 - 3 \cos^2 \alpha) = \\ &= \frac{a^2}{4} (1 + 3 \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

Радиус круга, описанного около  $\triangle BMC$ :

$$\begin{aligned} R &= \frac{BM \cdot CM \cdot BC}{4S_{\triangle BMC}} = \frac{BM^2 \cdot BC}{4 \cdot \frac{1}{2} BC \cdot MK} = \frac{BM^2}{2MK} = \frac{\frac{a^2}{4} (1 + 3 \sin^2 \alpha)}{a\sqrt{3} \sin \alpha} = \\ &= \frac{a(3 \sin^2 \alpha + 1)}{4\sqrt{3} \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Площадь боковой поверхности цилиндра

$$S = 2\pi R \cdot AM = 2\pi \cdot \frac{a(3 \sin^2 \alpha + 1)}{4\sqrt{3} \sin \alpha} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = \frac{1}{4} \pi a^2 \operatorname{ctg} \alpha (3 \sin^2 \alpha + 1).$$

Ответ:  $\frac{1}{4} \pi a^2 \operatorname{ctg} \alpha (3 \sin^2 \alpha + 1).$

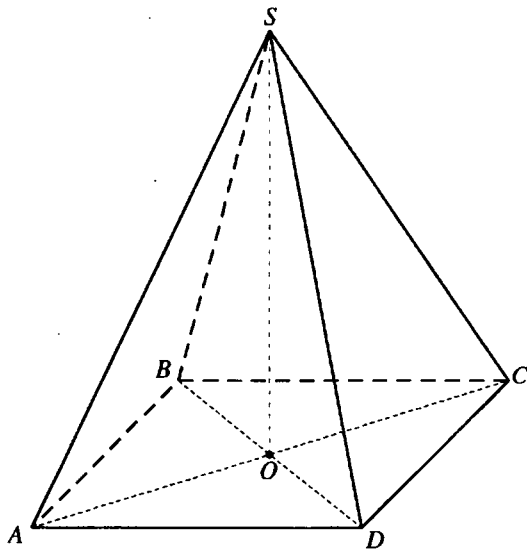


Рис. 12.134

**12.270.** Найти плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если он равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABCD$  (рис. 12.134),  $\angle SDO = \angle CSD$ ,  $\angle SDO = \angle CSD = \alpha$ .

Тогда  $\angle SDC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ .

$SO$  — наклонная к плоскости основания пирамиды,  $OD$  — ее проекция на эту плоскость,  $CD$  — прямая, лежащая в этой плоскости.

Получаем

$$\cos \angle SDC = \cos \angle SDO \cdot \cos \angle ODC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \left( 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \alpha \cos 45^\circ \Rightarrow \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha.$$

Так как угол  $\alpha$  острый, то  $\cos \alpha > 0$ ,  $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$  и

$$\cos^2 \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \cos^2 \alpha = 1 - \cos \alpha; \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0;$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \alpha = \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$



Ответ:  $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

12.271. Отрезок прямой, соединяющий точку окружности верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, равен  $l$  и составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найти расстояние от этой прямой до оси цилиндра, если осевое сечение цилиндра есть квадрат. Каковы возможные значения  $\alpha$ ?

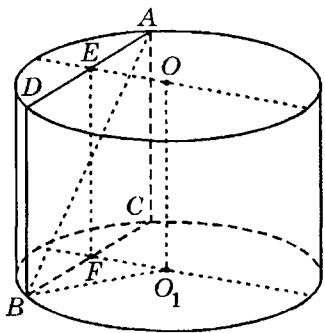


Рис. 12.135

*Решение.*

Пусть  $OO_1$  — ось данного цилиндра,  $AB$  — отрезок, о котором говорится в условии задачи (рис. 12.135),  $AB = l$ .

Прямые  $AB$  и  $OO_1$  — скрещивающиеся. Проведем через  $AB$  плоскость, параллельную  $OO_1$ . Сечение  $ABCD$  цилиндра этой плоскостью — прямоугольник. Если  $F$  — середина  $BC$ , то отрезок  $O_1F$  — перпендикуляр к плоскости сечения и его длина — искомое расстояние.

Пусть  $BC$  — проекция  $BA$  на плоскость основания цилиндра,  $\angle ABC = \alpha$ .

В  $\triangle ACB$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ):

$$AC = AB \cos \angle ABC = l \sin \alpha; \quad BC = AB \cos \angle ABC = l \cos \alpha.$$

Так как осевое сечение цилиндра — квадрат, то радиус его основания

$$O_1B = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} l \sin \alpha. \quad \text{В } \triangle BFO_1 (\angle BFO_1 = 90^\circ):$$

$$OF = \sqrt{O_1B^2 - BF^2} = \sqrt{\frac{1}{4} l^2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{4} l^2 \cos^2 \alpha} = \frac{l}{2} \sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Учитывая, что  $\cos 2\alpha < 0$ , имеем  $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$ , т.е.  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ .

Ответ:  $\frac{l}{2} \sqrt{-\cos 2\alpha}$ ;  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ .

12.272. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Каждое из боковых ребер равно  $l$  и составляет с прилежащими сторонами основания углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Найти объем пирамиды.

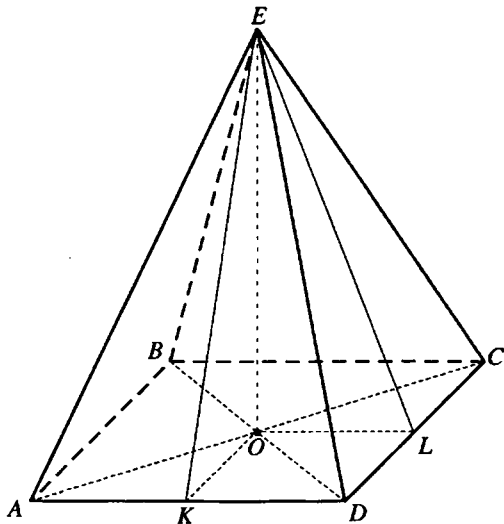


Рис. 12.136

*Решение.*

Пусть прямоугольник  $ABCD$  — основание пирамиды  $EABCD$  (рис. 12.136),  $EO$  — ее высота. Так как  $EA = EB = EC = ED = l$ , то  $O$  — центр окружности, описанной около основания, — точка пересечения диагоналей прямоугольника  $ABCD$ .

$\angle ADE = \alpha$ ,  $\angle CDE = \beta$ .

Если  $K$  — середина  $AD$ ,  $L$  — середина  $CD$ , то  $EK \perp AD$ ,  $EL \perp CD$ ,  $OL = KD$ .

В  $\triangle EKD$  ( $\angle EKD = 90^\circ$ ):  $EK = l \sin \alpha$ ,  $KD = l \cos \alpha$ .

В  $\triangle ELD$  ( $\angle ELD = 90^\circ$ ):  $DL = l \cos \beta$ .

Площадь основания пирамиды

$$S = AD \cdot CD = 2l \cos \alpha \cdot 2l \cos \beta = 4l^2 \cos \alpha \cos \beta.$$

В  $\triangle EOL$  ( $\angle EOL = 90^\circ$ ):

$$\begin{aligned} EO &= \sqrt{EL^2 - OL^2} = l \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta} = l \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\beta}{2}} = \\ &= l \sqrt{-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S \cdot EO = \frac{4}{3} l^3 \cos \alpha \cos \beta \sqrt{-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

*Ответ:*  $\frac{4}{3} l^3 \cos \alpha \cos \beta \sqrt{-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}$ .

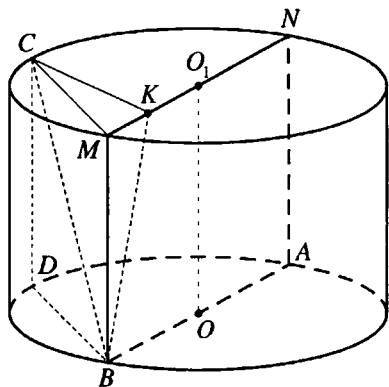


Рис. 12.137

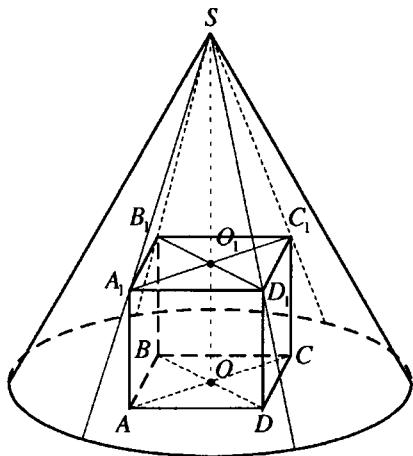


Рис. 12.138

**12.273.** Точка  $A$  лежит на окружности верхнего основания цилиндра, точка  $B$  — на окружности нижнего основания. Прямая  $AB$  составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ , а с плоскостью осевого сечения, проведенного через точку  $B$ , — угол  $\beta$ . Найти объем цилиндра, если длина отрезка  $AB$  равна  $l$ .

*Решение.*

Пусть  $O$  и  $O_1$  — центры верхнего и нижнего оснований цилиндра,  $CD$  — его образующая (рис. 12.137), тогда  $BD$  — проекция  $BC$  на плоскость нижнего основания и  $\angle CBD = \alpha$ .

Плоскость осевого сечения  $BMNA$  перпендикулярна плоскостям оснований. Проведем перпендикуляр  $CK$  на  $MN$ , тогда  $BK$  — проекция  $BC$  на плоскость осевого сечения и  $\angle CBK = \beta$ .

$MN$  — диаметр верхнего основания цилиндра, поэтому  $\angle MCN = 90^\circ$ .

В  $\triangle CDB$  ( $\angle CDB = 90^\circ$ ):  $CD = l \sin \alpha$ ;  $BD = l \cos \alpha$ .

В  $\triangle CKB$  ( $\angle CKB = 90^\circ$ ):  $CK = l \sin \beta$ .

$CM = BD = l \cos \alpha$ .

В  $\triangle CKM$  ( $\angle CKM = 90^\circ$ ):

$$MK = \sqrt{CM^2 - CK^2} = l \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta} = l \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2}} =$$

$$= l \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

В  $\triangle MCN$  ( $\angle MCN = 90^\circ$ ,  $CK$  — высота):

$$CM^2 = MK \cdot MN; MN = \frac{CM^2}{MK} = \frac{l \cos^2 \alpha}{\sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}}.$$

Радиус основания цилиндра

$$R = \frac{1}{2} MN = \frac{l \cos^2 \alpha}{2\sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}},$$

высота цилиндра  $H = CD = l \sin \alpha$ .

Объем цилиндра

$$V = \pi R^2 H = \frac{\pi l^3 \cos^4 \alpha \sin \alpha}{4 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} = \frac{\pi l^3 \sin 2\alpha \cos^3 \alpha}{8 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

*Ответ:* 
$$\frac{\pi l^3 \sin 2\alpha \cos^3 \alpha}{8 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

**12.274.** В конус вписан куб (одна из граней куба лежит в плоскости основания конуса). Отношение высоты конуса к ребру куба равно  $k$ . Найти угол между образующей и высотой конуса.

*Решение.*

Пусть ребро куба равно  $a$  (рис. 12.138).

Тогда  $O_1C_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ,  $SO = ka$ ,  $SO_1 = SO - OO_1 = a(k-1)$ .

В  $\triangle SO_1C_1$  ( $\angle SO_1C_1 = 90^\circ$ ):

$$\operatorname{ctg} \angle O_1SC_1 = \frac{SO_1}{O_1C_1} = \frac{a(k-1)}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}(k-1);$$

$$\angle O_1SC_1 = \operatorname{arccctg}(\sqrt{2}(k-1)).$$

*Ответ:*  $\operatorname{arccctg}(\sqrt{2}(k-1)).$

**12.275.** Основанием пирамиды служит прямоугольник. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, две другие составляют с ней углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Найти боковую поверхность пирамиды, если высота пирамиды равна  $H$ .

*Решение.*

Пусть прямоугольник  $ABCD$  — основание пирамиды  $KACBD$  (рис. 12.139).

Боковые грани  $ABK$  и  $CBK$  перпендикулярны плоскости основания пирамиды, их общее ребро  $KB$  — высота пирамиды,  $KB = H$ .

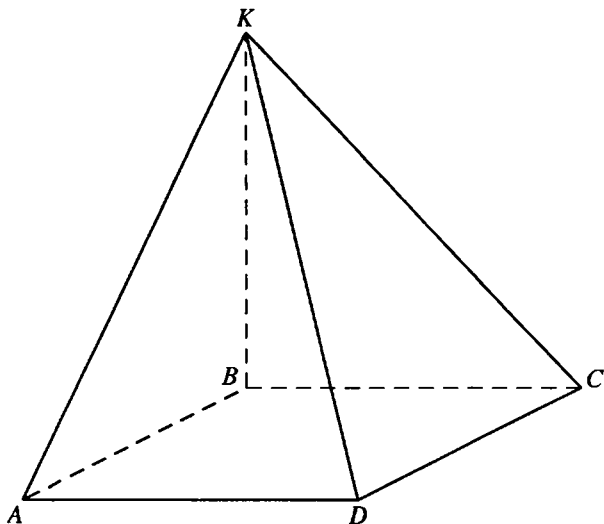


Рис. 12.139

$BA$  и  $BC$  — проекции боковых ребер  $KA$  и  $KC$  на плоскость основания,  $BA \perp AD$ ,  $BC \perp CD$ . Отсюда,  $KA \perp AD$ ,  $KC \perp CD$ ,  $\angle KAB$  и  $\angle KCB$  — углы наклона боковых граней  $KAD$  и  $KCD$  к плоскости основания,  $\angle KAB = \alpha$ ,  $\angle KCB = \beta$ .

$$\text{В } \triangle ABK \text{ } (\angle ABK = 90^\circ): AB = H \operatorname{ctg} \alpha, AK = \frac{H}{\sin \alpha}.$$

$$\text{В } \triangle CBK \text{ } (\angle CBK = 90^\circ): BC = H \operatorname{ctg} \beta, KC = \frac{H}{\sin \beta}.$$

Боковая поверхность пирамиды

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle ABK} + S_{\triangle CBK} + S_{\triangle DAK} + S_{\triangle DCK} = \frac{1}{2} AB \cdot KB + \frac{1}{2} BC \cdot KB + \frac{1}{2} AK \cdot AD + \\ &+ \frac{1}{2} KC \cdot CD = \frac{H^2}{2} \left( \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\sin \alpha} + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sin \beta} \right) = \frac{H^2}{2} \left( \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} + \right. \\ &+ \left. \frac{\cos \beta + \cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta} \right) = \frac{H^2}{2 \sin \alpha \sin \beta} \left( 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \frac{H^2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \alpha \sin \beta} \left( \sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \frac{H^2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \alpha \sin \beta} \left( \sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{2H^2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right) \sin\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin \alpha \sin \beta} =$$

$$= \frac{2H^2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Ответ: 
$$\frac{2H^2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

**12.276.** Одна из сторон основания прямой треугольной призмы равна  $a$ , а прилежащие к ней углы равны  $\alpha$  и  $\beta$ . Найти боковую поверхность призмы, если ее объем равен  $V$ .

*Решение.*

Если  $b$  и  $c$  — стороны основания призмы, противолежащие соответственно его углам  $\beta$  и  $\alpha$ ,  $\gamma$  — угол основания, противолежащий стороне  $a$ , то

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{a \sin \beta}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))} = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)};$$

$$c = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Площадь основания призмы  $S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$ ;

периметр основания:

$$P = a + b + c = a + \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)} (\sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha + \sin \beta) =$$

$$= \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)} \left( 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) =$$

$$= \frac{2a \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} \left( \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \frac{2a \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Высота призмы  $H = \frac{V}{S} = \frac{2V \sin(\alpha + \beta)}{a^2 \sin \alpha \sin \beta}$ .

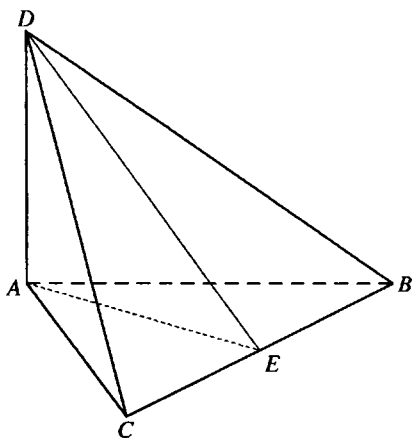


Рис. 12.140

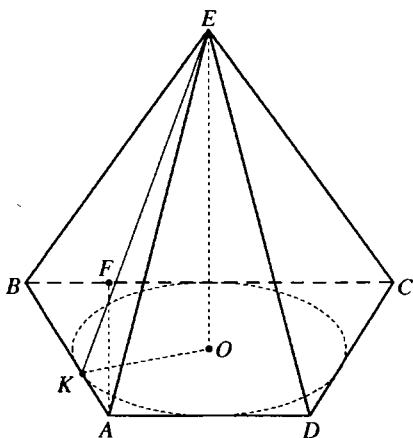


Рис. 12.141

Боковая поверхность призмы:

$$\begin{aligned}
 S_6 = P \cdot H &= \frac{2V \sin(\alpha + \beta)}{a^2 \sin \alpha \sin \beta} \cdot \frac{2a \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \\
 &= \frac{8V \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{a \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{2V \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{a \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{2V \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{a \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}$ .

**12.277.** Одно боковое ребро треугольной пирамиды перпендикулярно плоскости основания и равно  $l$ , два других образуют между собой угол  $\alpha$ , а с плоскостью основания — один и тот же угол  $\beta$ . Найти объем пирамиды.

*Решение.*

Пусть боковое ребро  $DA = l$  пирамиды  $DABC$  (рис. 12.140), перпендикулярное плоскости основания, является ее высотой,  $AB$  и  $AC$  — проекции боковых ребер  $DB$  и  $DC$  пирамиды на плоскость основания. Тогда  $\angle ABD = \angle ACD = \beta$ ,  $\angle BDC = \alpha$ .

$\Delta DAB = \Delta DAC$  — по катету и острому углу. Таким образом,  $AB = AC$ ,  $DB = DC$ .

Если  $E$  — середина  $BC$ , то  $AE \perp BC$ ,  $DE \perp DC$ ,  $\angle BDE = \frac{\alpha}{2}$ .

В  $\Delta DAB$  ( $\angle DAB = 90^\circ$ ):  $AB = l \operatorname{ctg} \beta$ ,  $DB = \frac{l}{\sin \beta}$ .

В  $\Delta DEB$  ( $\angle DEB = 90^\circ$ ):  $BE = DB \sin \angle BDE = \frac{l \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \beta}$ .

В  $\Delta AEB$  ( $\angle AEB = 90^\circ$ ):

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{l^2 \operatorname{ctg}^2 \beta - \frac{l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \beta}} = \frac{l}{\sin \beta} \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{l}{\sin \beta} \sqrt{\frac{1 + \cos 2\beta}{2} - \frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{l}{\sin \beta} \sqrt{\cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Площадь основания пирамиды

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AE = BE \cdot AE = \frac{l^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)}}{\sin^2 \beta}.$$

Объем призмы

$$V = \frac{1}{3} S \cdot DA = \frac{l^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)}}{3 \sin^2 \beta}.$$

Ответ: 
$$\frac{l^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)}}{3 \sin^2 \beta}.$$

**12.278.** Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, у которой острый угол равен  $\alpha$ , а площадь равна  $S$ . Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол  $\beta$ . Найти объем пирамиды.

*Решение.*

Пусть трапеция  $ABCD$  — основание пирамиды  $EABCD$  (рис. 12.141),  $AB = CD$ ,  $\angle ABC = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,  $EO$  — высота пирамиды.



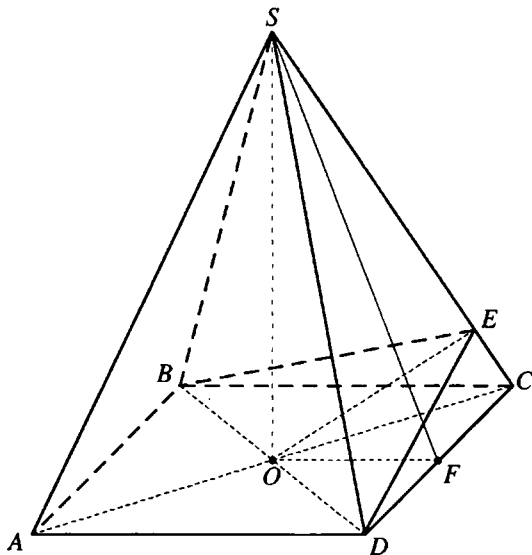


Рис. 12.142

Так как все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол, то точка  $O$  — центр окружности, вписанной в трапецию  $ABCD$ .

Тогда  $AD + BC = AB + CD = 2AB$ . Если высота трапеции  $ABCD$   $AF = h$ , то из  $\triangle AFB$  ( $\angle AFB = 90^\circ$ ):

$$AB = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Площадь основания пирамиды

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot AF = AB \cdot AF = \frac{h^2}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Тогда } h = \sqrt{S \sin \alpha}.$$

В плоскости основания проведем перпендикуляр  $OK$  на  $AB$ . Тогда  $EK \perp AB$ ,  $\angle EKO = \beta$ , радиус окружности, вписанной в трапецию  $ABCD$ ,

$$OK = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} \sqrt{S \sin \alpha}.$$

В  $\triangle EOK$  ( $\angle EOK = 90^\circ$ ):

$$EO = KO \operatorname{tg} \angle EKO = \frac{\operatorname{tg} \beta \sqrt{S \sin \alpha}}{2}.$$

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S \cdot EO = \frac{S \operatorname{tg} \beta \sqrt{S \sin \alpha}}{6}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{S \operatorname{tg} \beta \sqrt{S \sin \alpha}}{6}.$$

**12.279.** Косинус угла между двумя смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен  $k$ . Найти косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания и допустимые значения  $k$ .

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABCD$  (рис. 12.142),  $\angle BED$  — угол между боковыми гранями  $BSC$  и  $DSC$ ,  $F$  — середина  $CD$ ,  $\angle SFO$  — угол между боковой гранью и плоскостью основания,  $\angle BED = \alpha$ ,  $\angle SCD = \beta$ ,  $\angle SFO = \gamma$ .

По теореме косинусов для трехгранного угла с вершиной  $C$ :

$$\cos \alpha = \frac{\cos 90^\circ - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \beta} = -\operatorname{ctg}^2 \beta.$$

$$\text{В } \triangle SFC (\angle SFC = 90^\circ): \operatorname{ctg} \beta = \frac{CF}{SF}.$$

$$\text{В } \triangle SOF (\angle SOF = 90^\circ): \cos \gamma = \frac{OF}{SF}.$$

Так как  $CF = OF$ , то  $\cos \gamma = \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow \cos \alpha = -\cos^2 \gamma$ ,

$$\cos \gamma = \sqrt{-\cos \alpha} = \sqrt{-k}.$$

Так как  $0 < \cos \gamma < 1$ , то  $0 < \sqrt{-k} < 1, 0 < -k < 1, -1 < k < 0$ .

$$\text{Ответ: } \sqrt{-k}; -1 < k < 0.$$

**12.280.** Основанием пирамиды является прямоугольник  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Боковое ребро  $OA$  перпендикулярно основанию. Ребра  $OB$  и  $OC$  составляют с основанием углы, соответственно равные  $\alpha$  и  $\beta$ . Найти угол между ребром  $OD$  и основанием.

*Решение.*

Ребро  $OA$  является высотой пирамиды  $OABCD$  (рис. 12.143),  $\angle OBA = \alpha$ ,  $\angle OCA = \beta$ ,  $\angle ODA$  — искомый угол между ребром  $OD$  и основанием.

Пусть  $OA = 1$ ,  $\angle ODA = \gamma$ , тогда из  $\triangle OAB$  ( $\angle OAB = 90^\circ$ ):  $AB = OA \operatorname{ctg} \angle OBA = \operatorname{ctg} \alpha$ .

$$\text{В } \triangle OAC (\angle OAC = 90^\circ): AC = OA \operatorname{ctg} \angle OCA = \operatorname{ctg} \beta.$$

$$\text{В } \triangle OAD (\angle OAD = 90^\circ): AD = OA \operatorname{ctg} \angle ODA = \operatorname{ctg} \gamma.$$

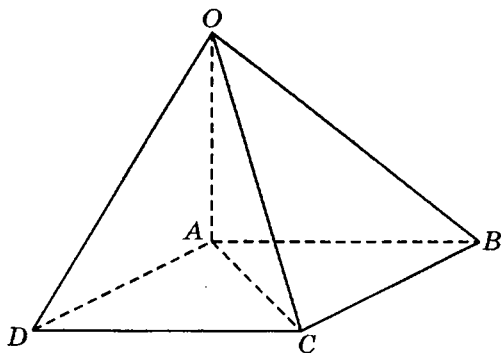


Рис. 12.143

Из  $\triangle ADC$  ( $\angle ADC = 90^\circ$ ):  $AD^2 = AC^2 - CD^2$ ;

$$\operatorname{ctg}^2 \gamma = \operatorname{ctg}^2 \beta - \operatorname{ctg}^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}^2 \gamma = (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha)(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha) = \frac{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta};$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)}};$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)}}.$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)}}.$

**12.281.** Через диагональ основания и высоту правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость. Отношение площади сечения к боковой поверхности пирамиды равно  $k$ . Найти косинус угла между апофемами противоположных боковых граней и допустимые значения  $k$ .

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота,  $SE$  и  $SF$  — апофемы противоположных боковых граней правильной пирамиды  $SABCD$  (рис. 12.144),  $AD = a$ ,  $\angle SFO = \alpha$ .

Тогда  $AC = a\sqrt{2}$ , а из  $\triangle SOF$  ( $\angle SOF = 90^\circ$ ):

$$SO = OF \operatorname{tg} \angle SFO = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

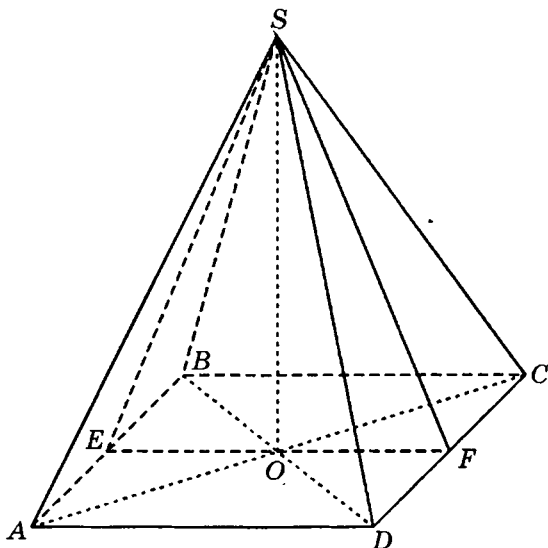


Рис. 12.144

Площадь сечения  $\Delta ASC$ :

$$S_1 = \frac{1}{2} AC \cdot SO = \frac{a^2 \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}{4}.$$

Площадь основания пирамиды  $S_{\text{осн}} = a^2$ , площадь боковой поверх-

ности  $S_2 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha} = \frac{a^2}{\cos \alpha}$ .

Так как  $\frac{S_1}{S_2} = k$ , то  $\frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}{4} \cos \alpha = k$ ,  $\sin \alpha = \frac{4k}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} k$ .

Искомый  $\cos \angle ESF = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha - 1 = 2(2\sqrt{2}k)^2 - 1 = 16k^2 - 1$ , где  $16k^2 - 1 < 1$ , или  $k^2 < 0,125$ ; т. е.  $0 < k < 0,25\sqrt{2}$ .

*Ответ:*  $16k^2 - 1$ ;  $0 < k < 0,25\sqrt{2}$ .

**12.282.** Боковое ребро правильной треугольной пирамиды в два раза больше стороны основания. Найти угол между апофемой пирамиды и не пересекающей ее высотой треугольника, лежащего в основании пирамиды.

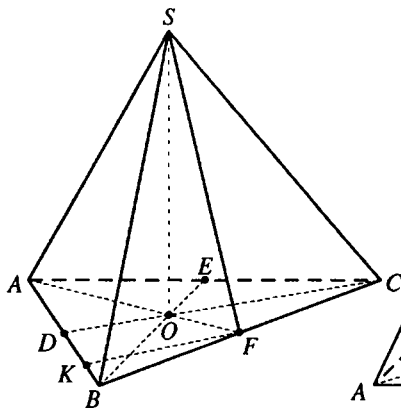


Рис. 12.145

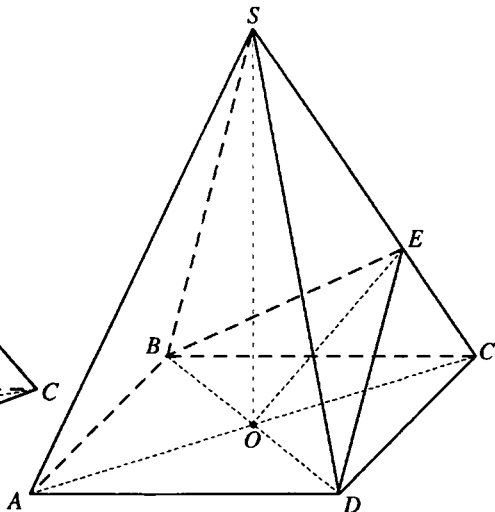


Рис. 12.146

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABC$ ,  $SF$  — ее апофема,  $CD$  — высота основания пирамиды (рис. 12.145),  $AD = BD = 1$ . Тогда  $AB = BC = 2$ ,  $SB = 2AB = 4$ ,  $OF = \frac{AB\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

В  $\triangle BFS$  ( $\angle BFS = 90^\circ$ ):

$$SF = \sqrt{SB^2 - BF^2} = \sqrt{15}.$$

Проведем перпендикуляр  $FK$  на  $AB$ . Тогда  $\angle BFK = \angle BCD = 30^\circ$ ,  $\angle OFK = 90^\circ - \angle BFK = 60^\circ$ .

Так как  $FK \parallel CD$ , то  $\angle SFK$  равен углу между скрещивающимися прямыми  $SF$  и  $CD$ .

Если  $OF$  — проекция наклонной  $SF$  на плоскость основания, а  $FK$  — прямая, лежащая в этой плоскости, то

$$\cos \angle SFK = \cos \angle SFO \cdot \cos \angle OFK = \frac{OF}{SF} \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{30},$$

$$\angle SFK = \arccos \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

**12.283.** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна  $a$ . Угол между смежными боковыми гранями равен  $\alpha$ . Найдите боковую поверхность пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABCD$  (рис. 12.146),  $AD = a$ .

В плоскости грани  $SDC$  проведем перпендикуляр  $DE$  на  $SC$ .

$SO \perp BD$ ,  $AC \perp BD$ , поэтому прямая  $BD$  перпендикулярна плоскости  $ASC$ . Отсюда  $BD \perp SC$ .

$SC \perp BD$ ,  $SC \perp DE$ . Получили, что прямая  $SC$  перпендикулярна плоскости  $BED$ . Тогда  $\angle BED$  — угол между смежными боковыми гранями  $SCD$  и  $SCB$ ,  $\angle BED = \alpha$  и  $OE \perp SC$ .

Прямоугольные треугольники  $DEC$  и  $BEC$  ( $\angle DEC = \angle BEC = 90^\circ$ ) равны по катету и гипотенузе. Тогда  $BE = ED$ .

$$O \text{ — середина } BD \Rightarrow OE \perp BD, \angle OED = \frac{1}{2} \angle BED = \frac{\alpha}{2}.$$

Если  $\angle SOC = \beta$ , тогда из  $\triangle EOD$  ( $\angle EOD = 90^\circ$ ):

$$DE = \frac{OD}{\sin \angle OED} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}; EO = OD \operatorname{ctg} \angle OED = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

В  $\triangle OEC$  ( $\angle OEC = 90^\circ$ ):

$$EO = OC \sin \angle SCO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

В  $\triangle SOC$  ( $\angle SOC = 90^\circ$ ):

$$SC = \frac{OC}{\cos \angle SCO} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \cos \beta} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{-\cos \alpha}}.$$

$$S_{\Delta DSC} = \frac{1}{2} SC \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{-\cos \alpha}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{4\sqrt{-\cos \alpha}}.$$

Площадь боковой поверхности пирамиды

$$S_6 = 4S_{\Delta DSC} = \frac{a^2}{\sqrt{-\cos \alpha}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^2}{\sqrt{-\cos \alpha}}.$$

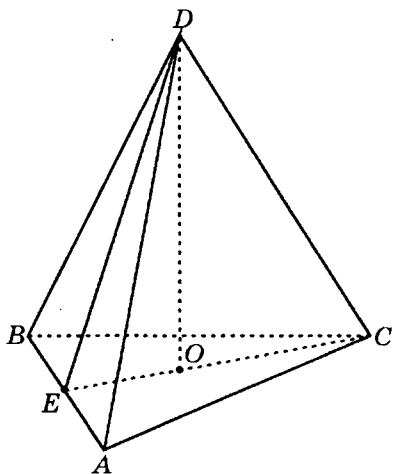


Рис. 12.147

12.284. В правильной треугольной пирамиде проведена плоскость через боковое ребро и высоту. Отношение площади сечения к полной поверхности пирамиды равно  $k$ . Найти двугранный угол при основании и допустимые значения  $k$ .

*Решение.*

Пусть  $\triangle DEC$  — сечение правильной пирамиды  $DABC$  (рис. 12.147.) плоскостью, проходящей через боковое ребро  $DC$  и высоту пирамиды  $DO$ . Тогда  $E$  — середина  $AB$ ,  $\angle DEO$  — линейный угол двугранного угла при основании.

Если  $\angle DEO = \alpha$ ,  $AB = 1$ , то пло-

щадь основания  $S_{\text{осн}} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}$ , площадь боковой поверхности  $S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}$ , полная поверхность пирамиды

$$S_1 = S_{\text{осн}} + S_6 = S_{\text{осн}} + \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha} = S_{\text{осн}} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha}.$$

$$OE = \frac{AB\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}, CE = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{В } \triangle DOE (\angle DOE = 90^\circ): DO = OE \operatorname{tg} \angle DEO = \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Площадь сечения } S_2 = \frac{1}{2} CE \cdot DO = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{8}.$$

$$\text{Так как } \frac{S_2}{S_1} = k, \text{ то } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{8} \cdot \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{3} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = k; \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = 4k\sqrt{3}; \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 4k\sqrt{3}; \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2k\sqrt{3}; \alpha = 2 \operatorname{arctg}(2k\sqrt{3}); 0 < 2k\sqrt{3} < 1, \text{ т.е. } 0 < k < \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Ответ: } 2 \operatorname{arctg}(2k\sqrt{3}); 0 < k < \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

**12.285.** Угол между высотой и образующей конуса равен  $\alpha$ . Через вершину конуса проведена плоскость, составляющая угол  $\beta$  с высотой ( $\beta < \alpha$ ). В каком отношении эта плоскость делит окружность основания?

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота данного конуса,  $\triangle ASB$  — его сечение плоскостью (рис. 12.148),  $\angle OSB = \alpha$ .

Если  $C$  — середина  $AB$ , то  $SC \perp AB$ ,

$$OC \perp AB, \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB.$$

Проведем из точки  $O$  перпендикуляр  $OD$  на плоскость  $ASB$ . Тогда  $DC$  — проекция  $OC$  на плоскость  $ASB$ ,  $OC \perp AB \Rightarrow DC \perp AB$  и точка  $D$  находится на прямой  $SC$  и  $SC$  — проекция  $SO$  на плоскость  $ASB$ ,  $\angle OSC = \beta$ .

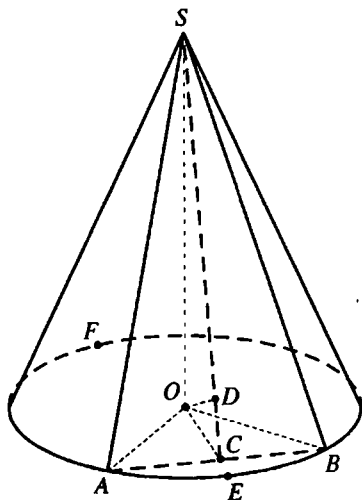


Рис. 12.148

$$\text{В } \triangle SOB \left( \angle SOB = \frac{\pi}{2} \right): SO = OB \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\text{В } \triangle SOC \left( \angle SOC = \frac{\pi}{2} \right): SO = OC \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow OB \operatorname{ctg} \alpha = OC \operatorname{ctg} \beta; \frac{OC}{OB} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Пусть  $\angle BOC = \gamma$ , тогда из

$$\triangle OCB \left( \angle OCB = \frac{\pi}{2} \right): \cos \gamma = \frac{OC}{OB} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}; \gamma = \arccos \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow \cup AEB = 2\gamma =$$

$$= 2 \arccos \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}; \cup AFB = 2\pi - 2 \arccos \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}; \frac{\cup AEB}{\cup AFB} = \frac{\arccos \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}}{\pi - \arccos \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\arccos \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}}{\pi - \arccos \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}}.$$

**12.286.** Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого острый угол между равными сторонами равен  $\alpha$ . Все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол  $\beta$ . Через



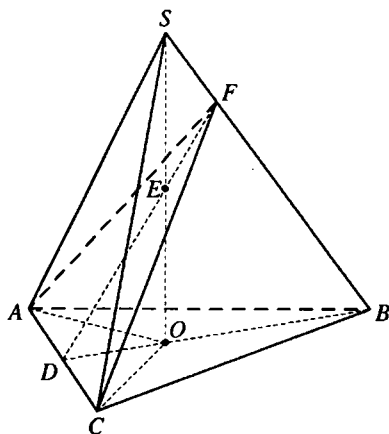


Рис. 12.149

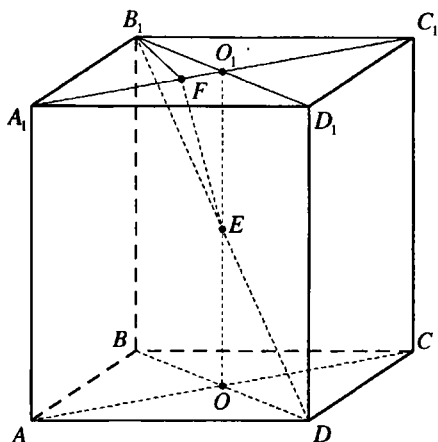


Рис. 12.150

сторону основания, противоположную данному углу  $\alpha$ , и середину высоты пирамиды проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

*Решение.*

Пусть  $\triangle ABC$  — основание пирамиды  $SABC$  (рис. 12.149),  $AB = BC$ ,  $\angle ABC = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,  $SO$  — ее высота,  $\angle SAO = \beta$ .

Так как все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол, то точка  $O$  — центр круга, описанного около  $\triangle ABC$ , а так как этот треугольник равнобедренный и остроугольный, то точка  $O$  принадлежит высоте, медиане и биссектрисе  $BD$  этого треугольника.

Пусть точка  $E$  — середина высоты  $SO$ ,  $\triangle AFC$  — сечение пирамиды,  $OD \perp AC$ ,  $OD$  — проекция  $ED$  на плоскость основания. Отсюда,  $ED \perp AC$  и  $\angle EDO$  — угол между плоскостями сечения и основания.

Если  $R$  — радиус круга, описанного около  $\triangle ABC$ , то  $AC = 2R \sin \alpha$ ,  $AD = R \sin \alpha$ ,  $OA = R$ .

В  $\triangle ADO$  ( $\angle ADO = 90^\circ$ ):

$$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \alpha} = R \cos \alpha.$$

В  $\triangle AOS$  ( $\angle AOS = 90^\circ$ ):  $SO = OA \operatorname{tg} \angle SAO = R \operatorname{tg} \beta$ .

$$EO = \frac{1}{2} SO = \frac{1}{2} R \operatorname{tg} \beta.$$

В  $\triangle EOD$  ( $\angle EOD = 90^\circ$ ):

$$\operatorname{tg} \angle EDO = \frac{EO}{OD} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{2 \cos \alpha}; \angle EDO = \arctg \left( \frac{\operatorname{tg} \beta}{2 \cos \alpha} \right).$$



Тогда  $\angle SFO$  — угол между боковой гранью и плоскостью основания,  $\angle SAO$  — угол между боковым ребром и плоскостью основания,  $\angle ASF$  — угол между боковым ребром  $SA$  и апофемой  $SF$  противоположащей грани.

Пусть  $\angle SFO = \alpha$ ,  $\angle SAO = \beta$ ,  $\angle ASF = \gamma$ .

По условию  $\operatorname{tg} \alpha = k$ .

В  $\triangle SOF$  ( $\angle SOF = 90^\circ$ ):  $SO = OF \operatorname{tg} \alpha$ .

В  $\triangle SOA$  ( $\angle SOA = 90^\circ$ ):  $SO = OA \operatorname{tg} \beta = 2OF \operatorname{tg} \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta = \frac{k}{2}.$$

В  $\triangle ASF$ :  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(180^\circ - (\alpha + \beta)) = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - 1} = \frac{k + \frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k^2 - 1} = \frac{3k}{k^2 - 2}.$$

Ответ:  $\frac{3k}{k^2 - 2}$ .

**12.289.** Все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания один и тот же угол. Найти этот угол, если отношение полной поверхности пирамиды к площади основания равно  $k$ . При каких значениях  $k$  задача имеет решение?

*Решение.*

Пусть  $S$  — полная поверхность,  $S_1$  — боковая поверхность пирамиды,  $S_2$  — площадь ее основания.

Так как все боковые грани образуют с плоскостью основания один и тот же угол  $\alpha$ , то  $S_1 = \frac{S_2}{\cos \alpha}$ .

$$\text{Далее } S = S_1 + S_2 = \frac{S_2}{\cos \alpha} + S_2 = \frac{S_2(1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha}.$$

$$\text{По условию } \frac{S_1}{S_2} = k \Rightarrow \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha} = k \Leftrightarrow (k - 1)\cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{k - 1}.$$

Так как  $k > 0$  и  $0 < \cos \alpha < 1$ , то  $0 < \frac{1}{k - 1} < 1, k > 2$ .

Ответ:  $\arccos \frac{1}{k - 1}, k > 2$ .

**12.290.** Отношение полной поверхности правильной  $n$ -угольной пирамиды к площади основания равно  $t$ . Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания.

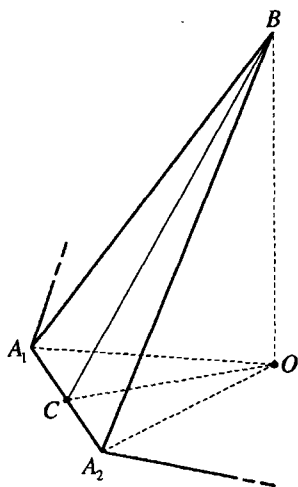


Рис. 12.152

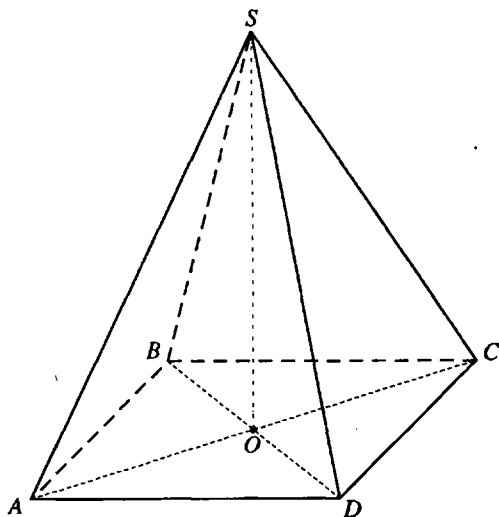


Рис. 12.153

*Решение.*

Пусть  $BO$  — высота правильной пирамиды  $BA_1A_2\dots A_n$  (рис. 12.152),  $BC$  — апофема грани  $A_1BA_2$ . Тогда  $\angle BCO$  — угол между боковой гранью и плоскостью основания,  $\angle BA_1O$  — угол между боковым ребром и плоскостью основания.

$$\angle A_1OA_2 = \frac{2\pi}{n}, \angle A_1OC = \frac{1}{2} \angle A_1OO_2 = \frac{\pi}{n}.$$

Пусть  $\angle BCO = \alpha$ ,  $\angle BA_1O = \beta$ . Полная поверхность пирамиды:

$$S = S_b + S_{\text{осн}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha} + S_{\text{осн}} = S_{\text{осн}} \left( \frac{1}{\cos \alpha} + 1 \right) \Rightarrow \frac{S}{S_{\text{осн}}} = \frac{1}{\cos \alpha} + 1 = t; \alpha = \frac{1}{t-1}.$$

$$B \Delta BOC \left( \angle BOC = \frac{\pi}{2} \right): BO = OC \operatorname{tg} \alpha.$$

$$B \Delta BOA_1 \left( \angle BOA_1 = \frac{\pi}{2} \right): BO = OA_1 \operatorname{tg} \beta.$$

$$B \Delta A_1CO \left( \angle A_1CO = \frac{\pi}{2} \right): OC = OA_1 \cos \frac{\pi}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OC \operatorname{tg} \alpha = OA_1 \operatorname{tg} \beta; OA_1 \operatorname{tg} \beta = OA_1 \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \alpha \text{ и } \operatorname{tg} \beta = \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \sqrt{(t-1)^2 - 1} = \sqrt{t^2 - 2t} \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} \left( \cos \frac{\pi}{n} \sqrt{t^2 - 2t} \right).$$

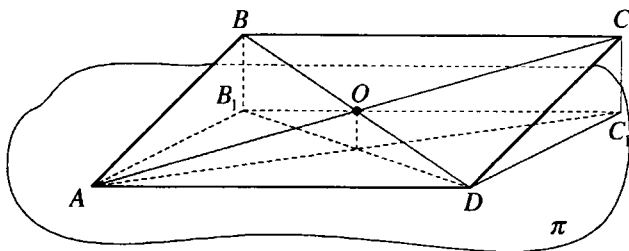


Рис. 12.154

Ответ:  $\arctg\left(\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{t^2-2t}\right)$ .

**12.291.** Косинус угла между боковыми ребрами правильной четырехугольной пирамиды, не лежащими в одной грани, равен  $k$ . Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABCD$  (рис. 12.153),  $\cos \angle ASC = k$ .

Если  $\angle ASC = \alpha$ , то  $\angle DSO = \angle CSO = \frac{\alpha}{2}$ .

Рассмотрим плоскость  $SOC$ .  $SD$  — наклонная к этой плоскости,  $SO$  — проекция  $SD$  на эту плоскость,  $SC$  — прямая, лежащая в плоскости  $SOC$ .

Тогда  $\cos \angle DSC = \cos \angle DSO \cdot \cos \angle CSO = \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 + k}{2}$ .

Ответ:  $\frac{1+k}{2}$ .

**12.292.** Через сторону ромба проведена плоскость, образующая с диагоналями углы  $\alpha$  и  $2\alpha$ . Найти острый угол ромба.

*Решение.*

Пусть  $ABCD$  — ромб, через сторону которого проведена плоскость  $\pi$  (рис. 12.154),  $O$  — точка пересечения диагоналей ромба.

Проведем к плоскости  $\pi$  перпендикуляры  $BB_1$  и  $CC_1$ ,  $\angle CAC_1 = \alpha$ ,  $\angle BDB_1 = 2\alpha$ .

$BC \parallel AD$ ,  $AD$  принадлежит плоскости  $\pi$ . Таким образом, прямая  $BC$  параллельна плоскости  $\pi$  и  $BB_1 = CC_1$ .

В прямоугольных треугольниках  $AC_1C$  и  $DB_1B$  с равными катетами  $CC_1$  и  $BB_1$ ,  $\angle CAC_1 < \angle BDB_1 \Rightarrow AC > BD \Rightarrow \angle BAD$  — острый угол ромба.

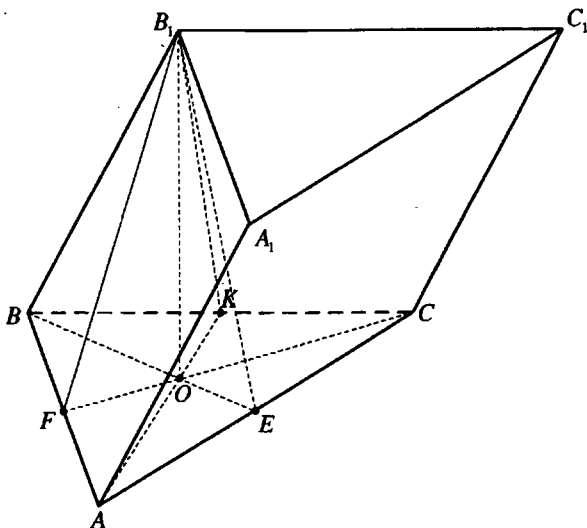


Рис. 12.155

$$B \Delta AC_1C (\angle AC_1C = 90^\circ): AC = \frac{CC_1}{\sin \alpha}.$$

$$B \Delta DB_1B (\angle DB_1B = 90^\circ): BD = \frac{BB_1}{\sin 2\alpha}.$$

$$B \Delta AOD (\angle AOD = 90^\circ): \operatorname{ctg} \angle OAD = \frac{AO}{OD} = \frac{\frac{1}{2} AC}{\frac{1}{2} BD} = \frac{CC_1}{\sin \alpha} : \frac{BB_1}{\sin 2\alpha} =$$

$$= 2 \cos \alpha \Rightarrow \angle OAD = \operatorname{arctg}(2 \cos \alpha),$$

$$\angle BAD = 2 \angle OAD = 2 \operatorname{arctg}(2 \cos \alpha)$$

Ответ:  $2 \operatorname{arctg}(2 \cos \alpha)$ .

**12.293.** Основанием наклонной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ) служит равнобедренный треугольник, у которого  $AB = AC = a$  и  $\angle CAB = \alpha$ . Вершина  $B_1$  верхнего основания равноудалена от всех сторон нижнего основания, а ребро  $B_1B$  составляет с плоскостью основания угол  $\beta$ . Найти объем призмы.

*Решение.*

Проведем из точки  $B_1$  перпендикуляр  $B_1O$  на плоскость  $ABC$  и перпендикуляры  $B_1F$ ,  $B_1K$ ,  $B_1E$  — на стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  треугольника  $ABC$  (рис. 12.155),  $\angle B_1BO = \beta$ .

$OF, OK, OE$  — проекции  $B_1F, B_1K, B_1E$  на плоскость  $ABC$ ,  $OF \perp AB$ ,  $OK \perp BC$ ,  $OE \perp AC$  и, так как  $B_1F = B_1K = B_1E$ , то  $OF = OK = OE \Rightarrow O$  — центр круга, вписанного в  $\triangle ABC$ , и лежит на его высоте, медиане и биссектрисе  $AK$ .

$$\angle ABK = \frac{\pi}{2} - \angle BAK = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

$$\angle OBK = \frac{1}{2} \angle ABK = \frac{\pi - \alpha}{4}.$$

$$\text{В } \triangle AKB \left( \angle AKB = \frac{\pi}{2} \right): BK = AB \sin \angle BAK = a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{В } \triangle BKO \left( \angle BKO = \frac{\pi}{2} \right): BO = \frac{BK}{\cos \angle OBK} = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\pi - \alpha}{4}}.$$

$$\text{В } \triangle B_1OB \left( \angle B_1OB = \frac{\pi}{2} \right): B_1O = BO \operatorname{tg} \angle B_1BO = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{\cos \frac{\pi - \alpha}{4}}.$$

Площадь основания призмы  $S = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$ , а ее объем  $V = S \cdot B_1O =$

$$= \frac{a^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{2 \cos \frac{\pi - \alpha}{4}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{2 \cos \frac{\pi - \alpha}{4}}.$$

**12.294.** Основанием наклонной призмы служит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона и меньшее основание равны  $a$ , а острый угол равен  $\beta$ . Одна из вершин верхнего основания призмы равноудалена от всех вершин нижнего основания. Найти объем призмы, если боковое ребро составляет с плоскостью основания угла  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть трапеция  $ABCD$  — нижнее основание наклонной призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  (рис. 12.156),  $AB = BC = CD = a$ ,  $\angle BAD = \beta$ ,  $0^\circ < \beta < 90^\circ$ , вершина  $B_1$  призмы равноудалена от всех вершин трапеции  $ABCD$ ,  $B_1O$  — высота призмы,  $\angle B_1BO = \alpha$ .

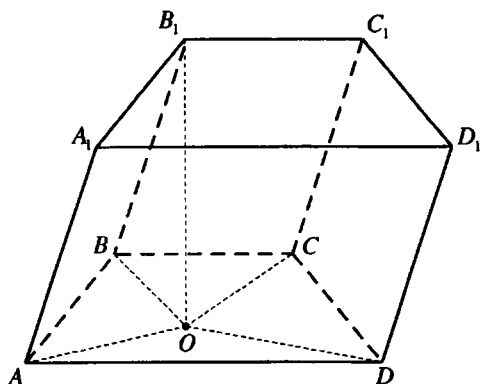


Рис. 12.156

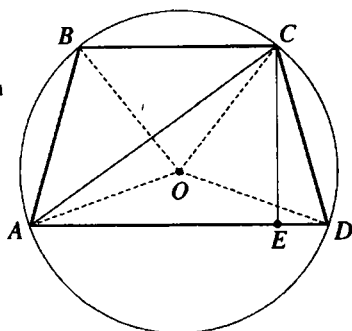


Рис. 12.156,а

$OA, OB, OC, OD$  — проекции соответственно  $B_1A, B_1B, B_1C, B_1D$  на плоскость нижнего основания и, так как  $B_1A = B_1B = B_1C = B_1D$ , то  $OA = OB = OC = OD$ , и  $O$  — центр круга, описанного около трапеции  $ABCD$ ,  $OB$  — его радиус.

Так как  $AB = BC$ , то  $\angle BAC = \angle BCA$  (рис. 12.156, а)  $BC \parallel AD \Rightarrow$

$$\angle BCA = \angle DAC \Rightarrow \angle BAC = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{\beta}{2}.$$

Пусть  $CE$  — высота трапеции  $ABCD$ .

$$\text{Так как } AB = CD, \text{ то } AE = \frac{AD + BC}{2}.$$

$$\text{В } \triangle CED (\angle CED = 90^\circ): CE = CD \sin \angle CDA = a \sin \beta.$$

$$\text{В } \triangle CEA (\angle CEA = 90^\circ): AE = CE \operatorname{ctg} \angle DAC = a \sin \beta \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}.$$

$$\text{Площадь основания призмы } S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CE = AE \cdot CE = a^2 \sin^2 \beta \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}.$$

Радиус круга, описанного около  $\triangle ABC$ :

$$OB = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{a}{2 \sin \frac{\beta}{2}}.$$

$$\text{В } \triangle B_1OB (\angle B_1OB = 90^\circ): B_1O = BO \operatorname{tg} \angle B_1BO = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \frac{\beta}{2}}.$$



Объем призмы

$$V = S \cdot B_1O = \frac{a^3 \sin^2 \beta \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \frac{\beta}{2}} = \frac{4a^3 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} = 2a^3 \cos^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Ответ:  $2a^3 \cos^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha$ .

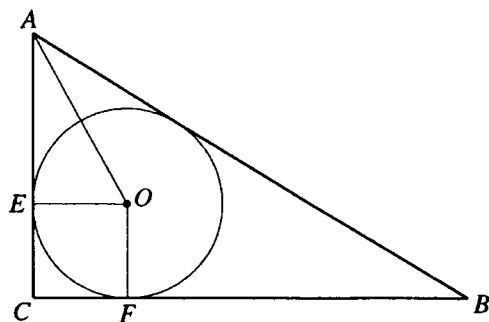


Рис. 12.157

инсанный в  $\triangle ABC$ , радиуса  $r$ ,  $O$  — центр этого круга,  $E$  и  $F$  — точки касания круга с катетами  $AC$  и  $BC$ .

Тогда  $OE = OF = EC = CF = r$ ,  $\angle OAE = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ ,  $OE \perp AC$ .

В  $\triangle AEO$  ( $\angle AEO = \frac{\pi}{2}$ ):  $AE = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

$AC = AE + EC = r \left( 1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)$ .

В  $\triangle ACB$  ( $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ ):  $BC = AC \operatorname{tg} \alpha = r \left( 1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{tg} \alpha$ .

Площадь основания призмы

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} r^2 \left( 1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 \operatorname{tg} \alpha =$$

**12.295.** Основанием прямой призмы, описанной около шара радиуса  $r$ , служит прямоугольный треугольник с острым углом  $\alpha$ . Найти объем призмы.

*Решение.*

Пусть  $\triangle ABC$  — нижнее основание данной прямой призмы,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = \alpha$  (рис. 12.157), высота призмы  $H = 2r$ , проекция шара на плоскость  $ABC$  — круг, впи-

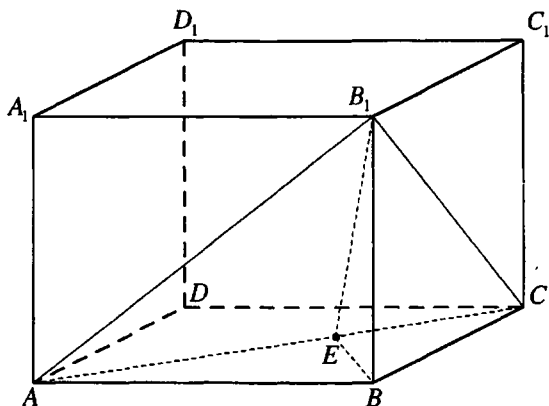


Рис. 12.158

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} = r^2 \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \\
 &= r^2 \cdot \frac{1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = r^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).
 \end{aligned}$$

$$\text{Объем призмы } V = S \cdot H = 2r^3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\text{Ответ: } 2r^3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

**12.296.** Диагонали  $AB_1$  и  $CB_1$  двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  составляют с диагональю  $AC$  основания  $ABCD$  углы, равные соответственно  $\alpha$  и  $\beta$ . Найти угол между плоскостью треугольника  $AB_1C$  и плоскостью основания.

*Решение.*

Проведем в плоскости  $AB_1C$  перпендикуляр  $B_1E$  на  $AC$  (рис. 12.158)  $\angle B_1AE = \alpha$ ,  $\angle B_1CE = \beta$ .

$BE$  — проекция  $B_1E$  на плоскость основания  $ABCD$ . Тогда  $BE \perp AC$  и  $\angle B_1EB$  — угол между плоскостью  $\triangle AB_1C$  и плоскостью основания.

Пусть  $B_1E = 1$ .

В  $\triangle B_1EA$  ( $\angle B_1EA = 90^\circ$ ):  $AE = B_1E \operatorname{ctg} \angle B_1AE = \operatorname{ctg} \alpha$ .

В  $\Delta B_1EC$  ( $\angle B_1EC = 90^\circ$ ):  $CE = B_1E \operatorname{ctg} \angle B_1CE = \operatorname{ctg} \beta$ .

$BE$  — высота прямоугольного  $\Delta ABC \Rightarrow BE = \sqrt{AE \cdot CE} = \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}$ .

В  $\Delta B_1BE$  ( $\angle B_1BE = 90^\circ$ ):  $\cos \angle B_1EB = \frac{BE}{B_1E} = \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}$ ;

$\angle B_1EB = \arccos \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}$ .

Ответ:  $\arccos \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}$ .

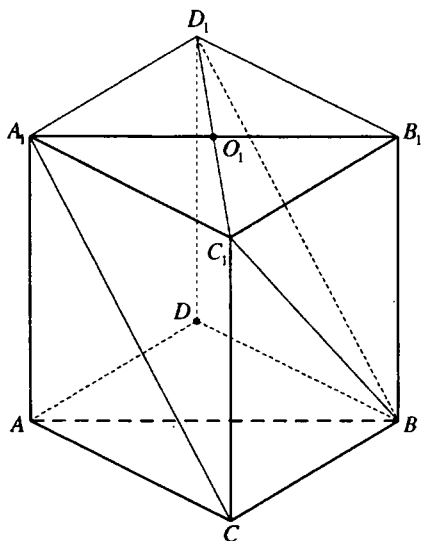


Рис. 12.159

Пусть  $BC_1 = BD_1 = x$ .

В  $\Delta C_1BD_1$ :  $C_1D_1^2 = BC_1^2 + BD_1^2 - 2BC_1 \cdot BD_1 \cos \angle C_1BD_1$ .

Имеем  $3a^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos \alpha \Leftrightarrow 4x^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 3a^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$

В  $\Delta BB_1C_1$  ( $\angle BB_1C_1 = \frac{\pi}{2}$ ):

$$BB_1 = \sqrt{BC_1^2 - B_1C_1^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - a^2} = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{3}{4} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

**12.297.** В правильной треугольной призме сторона основания равна  $a$ , угол между непересекающимися диагоналями двух боковых граней равен  $\alpha$ . Найти высоту призмы.

*Решение.*

Достроим правильную призму  $ABCA_1B_1C_1$  до параллелепипеда  $ADB_1CA_1D_1B_1C_1$  (рис. 12.159)  $BD_1 \parallel CA_1$  и угол между скрещивающимися прямыми  $A_1C$  и  $BC_1$  равен  $\angle C_1BD_1 = \alpha$ .

Так как  $\Delta A_1B_1C_1$  правильный, то  $A_1D_1B_1C_1$  — ромб,  $C_1O_1$  — высота  $\Delta A_1B_1C_1$ ,

$$C_1O_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, C_1D_1 = a\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{2\pi}{3}}{2} - \frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \\
&= \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\cos \alpha - \cos \frac{2\pi}{3}}{2}} = \frac{a \sqrt{\sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2} \right)}}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \\
\text{Ответ: } &\frac{a \sqrt{\sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2} \right)}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

**12.298.** В прямоугольном треугольнике через его гипотенузу проведена плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол  $\alpha$ , а с одним из катетов — угол  $\beta$ . Найти угол между этой плоскостью и вторым катетом.

*Решение.*

Через гипотенузу  $AB$  прямоугольника  $ABC$  проведена плоскость  $\pi$  (рис. 12.160).

$CD \perp \pi$ . Тогда  $\angle CAD$  и  $\angle CBD$  — углы между этой плоскостью и катетами треугольника,  $\angle CBD = \beta$ .

Пусть  $\angle CAD = \gamma$ ,  $CD = 1$ ,  $CE$  — высота  $\triangle ABC$ , проведенная к его гипотенузе. Тогда ее проекция  $DE$  на плоскость  $\pi$  перпендикулярна  $AB$  и  $\angle CED$  — угол между плоскостями  $ABC$  и  $\pi$ ,  $\angle CED = \alpha$ .

$$\text{В } \triangle ADC (\angle ADC = 90^\circ): AC = \frac{CD}{\sin \gamma} = \frac{1}{\sin \gamma}.$$

$$\text{В } \triangle BDC (\angle BDC = 90^\circ): BC = \frac{CD}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \beta}.$$

$$\text{В } \triangle CDE (\angle CDE = 90^\circ): CE = \frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

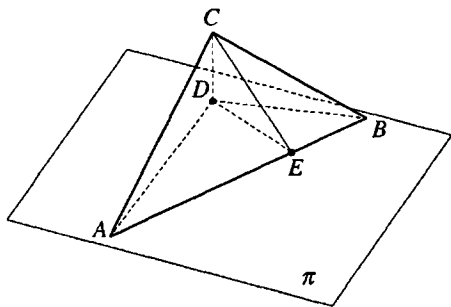


Рис. 12.160

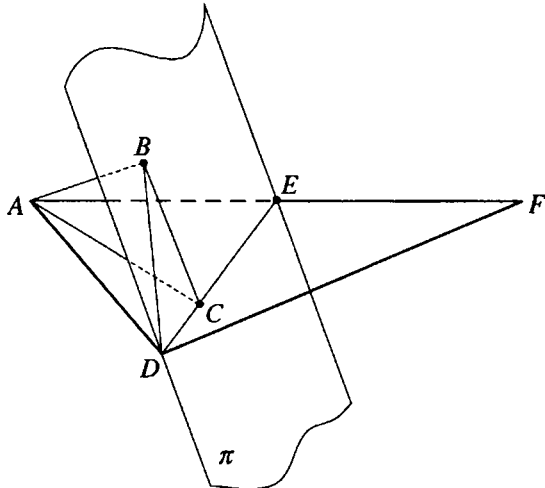


Рис. 12.161

В  $\triangle ACB$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ):

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \gamma} + \frac{1}{\sin^2 \beta}} = \frac{\sqrt{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}}{\sin \gamma \sin \beta}.$$

Площадь треугольника  $ABC$ :  $S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \gamma \sin \beta} = \frac{\sqrt{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}}{\sin \gamma \sin \beta \sin \alpha} \Leftrightarrow \sin \alpha = \sqrt{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \gamma = \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2}} = \sqrt{\frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{2}} =$$

$$= \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}.$$

$$\gamma = \arcsin \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}.$$

*Ответ:*  $\arcsin \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}$ .

**12.299.** В прямоугольном треугольнике с острым углом  $\alpha$  через наименьшую медиану проведена плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол  $\beta$ . Найти углы между этой плоскостью и катетами треугольника.

*Решение.*

Пусть медиана  $DE$ , проведенная к большей стороне треугольника

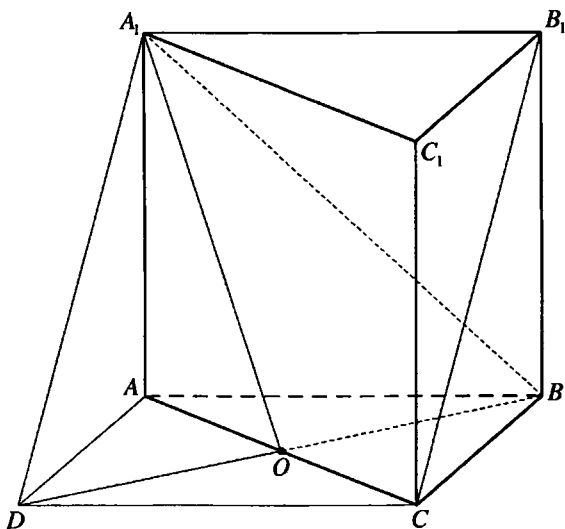


Рис. 12.162

$ADF$  — его гипотенузе  $AF$  — меньшая медиана данного треугольника (рис. 12.161), через которую проходит плоскость  $\pi$ ,  $\angle AFD = \alpha$ .

Из точки  $A$  проведем перпендикуляры  $AB$  и  $AC$  на плоскость  $\pi$  и на  $DE$ . Тогда  $BC$  — проекция  $AC$  на плоскость  $\pi$ ,  $DB$  — проекция  $DA$  на плоскость  $\pi$ ,  $BC \perp DE$ ,  $\angle ACB$  — угол между плоскостями  $ADF$  и  $\pi$ ,  $\angle ACB = \beta$ ,  $\angle ADB$  — угол между катетом  $AD$  и плоскостью  $\pi$ .

Пусть  $\angle ADB = \gamma$ ,  $AC = 1$ .

Так как  $DE = EF$ , то  $\angle CDF = \angle DFE = \alpha \Rightarrow \angle ADE = 90^\circ - \alpha$ ,  $\angle DAC = \alpha$ .

В  $\triangle ABC$  ( $\angle ABC = 90^\circ$ ):  $AB = AC \sin \angle ACB = \sin \beta$ .

В  $\triangle ACD$  ( $\angle ACD = 90^\circ$ ):  $AD = \frac{AC}{\cos \angle DAC} = \frac{1}{\cos \alpha}$ .

В  $\triangle ABD$  ( $\angle ABD = 90^\circ$ ):  $\sin \gamma = \frac{AB}{AD} = \sin \beta \cos \alpha$ ,  $\gamma = \arcsin(\sin \beta \cos \alpha)$ .

Чтобы найти угол между плоскостью  $\pi$  и вторым катетом, заменяем угол  $\alpha$  на угол  $90^\circ - \alpha$ , и получаем, что он равен  $\arcsin(\sin \beta \sin \alpha)$ .

*Ответ:*  $\arcsin(\sin \beta \cos \alpha)$ ,  $\arcsin(\sin \beta \sin \alpha)$ .

**12.300.** Найти косинус угла между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней правильной треугольной призмы, у которой боковое ребро равно стороне основания.

*Решение.*

Проведем через вершину  $A_1$  правильной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  прямую, параллельную диагонали  $B_1C$  боковой грани (рис. 12.162),  $D$  — точка пересечения этой прямой с плоскостью  $ABC$ .

Так как прямая  $A_1B_1$  параллельна плоскости  $ABC$  и  $CD$  — линия пересечения плоскости  $ABC$  и плоскости четырехугольника  $A_1B_1CD$ , то  $A_1B_1 \parallel CD$  и  $A_1B_1CD$  — параллелограмм, а так как  $AB \parallel A_1B_1$  и  $AB = A_1B_1$ , то  $AB \parallel CD$ ,  $AB = CD$  и четырехугольник  $ABCD$  — ромб.

Точка  $O$  пересечения  $AC$  и  $BD$  их середина,  $AO \perp BD$ ,  $A_1O \perp BD \Rightarrow \angle BA_1O = \frac{1}{2} \angle BA_1D$ .

Угол между скрещивающимися прямыми  $B_1C$  и  $A_1B$  равен  $\angle BA_1D$ . Пусть  $AB = BB_1 = x$ .

$$\text{Тогда } A_1B = x\sqrt{2}; OB = \frac{x\sqrt{3}}{2}; \sin \angle BA_1O = \frac{OB}{A_1B} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}};$$

$$\cos \angle BA_1D = 1 - 2 \sin^2 \angle BA_1O = 1 - 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4}.$$

Ответ:  $\frac{1}{4}$ .

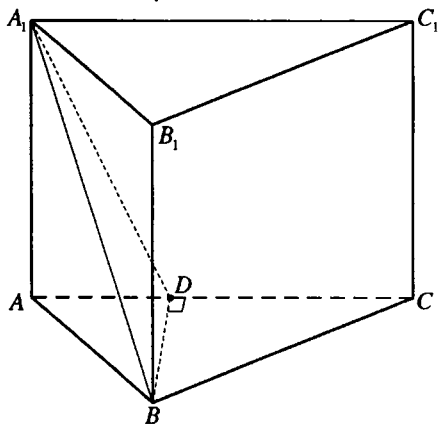


Рис. 12.163

**12.301.** В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной  $a$  и углом  $\alpha$  между боковыми сторонами. Диагональ боковой грани, противолежащей данному углу, составляет со смежной боковой гранью угол  $\varphi$ . Найти объем призмы.

*Решение.*

В  $\triangle ABC$ , являющемся основанием прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  (рис. 12.163),  $AC = BC = a$ ,  $\angle ACB$

$$= \alpha. \text{ Тогда } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha,$$

$AB = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$ . В плоскости  $ABC$  проведем перпендикуляр  $BD$  на  $AC$ .

Так как плоскости основания и боковой грани прямой призмы перпендикулярны, то  $BD$  перпендикулярен боковой грани  $AA_1C_1C \Rightarrow A_1D$  — проекция  $A_1B$  на плоскость боковой грани  $AA_1C_1C$ ,  $\angle BA_1D$  — угол между  $A_1B$  и этой гранью,  $\angle BA_1D = \varphi$ ,  $BD \perp A_1D$ .

В  $\triangle BDC$  ( $\angle BDC = 90^\circ$ ):  $BD = BC \sin \angle BCD = a \sin \alpha$ .

В  $\triangle A_1DB$  ( $\angle A_1DB = 90^\circ$ ):  $A_1B = \frac{BD}{\sin \angle BA_1D} = \frac{a \sin \alpha}{\sin \varphi}$ .

В  $\triangle A_1AB$  ( $\angle A_1AB = 90^\circ$ ):

$$\begin{aligned} AA_1 &= \sqrt{A_1B^2 - AB^2} = \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \varphi} - 4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}} = \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \varphi} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \varphi} = \\ &= \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \varphi} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}} = \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \varphi} \sqrt{\cos \left( \frac{\alpha}{2} + \varphi \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} - \varphi \right)}. \end{aligned}$$

Объем призмы

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{a^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \varphi} \sqrt{\cos \left( \varphi + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Ответ:  $\frac{a^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \varphi} \sqrt{\cos \left( \varphi + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right)}.$

**12.302.** В основании прямой призмы лежит треугольник. Два его угла равны  $\alpha$  и  $\beta$ , а площадь равна  $S$ . Прямая, проходящая через вершину верхнего основания и центр круга, описанного около нижнего основания, составляет с плоскостью основания угол  $\varphi$ . Найти объем призмы.

*Решение.*

В треугольнике  $ABC$ , являющемся основанием прямой призмы  $ABCB_1C_1$  (рис. 12.164),  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ , точка  $O$  — центр описанного круга,  $S_{\triangle ABC} = S$ .

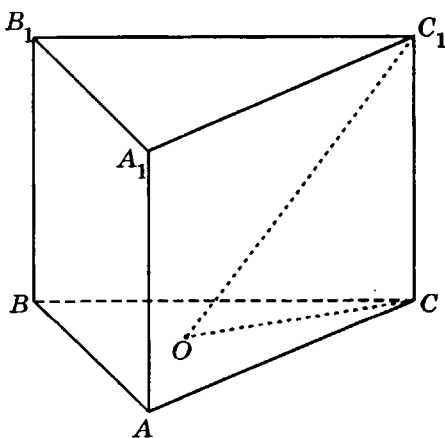


Рис. 12.164



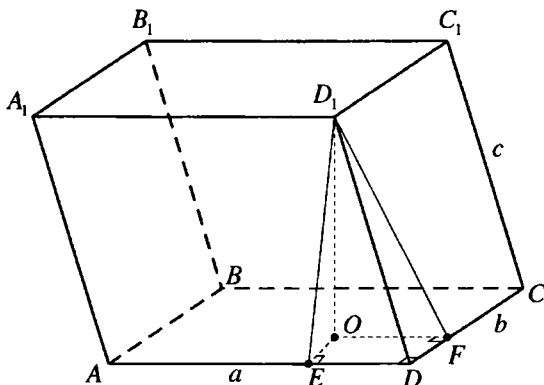


Рис. 12.165

Пусть  $R$  — радиус описанного круга.

Тогда  $BC = 2R \sin \alpha$ ,

$AC = 2R \sin \beta$ ,

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin \angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \\ = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta (\alpha + \beta)$$

$$\text{и } R = \sqrt{\frac{S}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}}.$$

$OC$  — проекция  $OC_1$  на плоскость  $ABC$ ,  $\angle C_1OC = \varphi$ .

В  $\triangle C_1CO$  ( $\angle C_1OC = 90^\circ$ ):  $CC_1 = OC \operatorname{tg} \angle C_1OC = R \operatorname{tg} \varphi$ .

$$\text{Объем призмы } V = S_{\triangle ABC} \cdot CC_1 = S \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\frac{S}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}}.$$

$$\text{Ответ: } S \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\frac{S}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}}.$$

**12.303.** Основанием наклонной призмы служит прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ . Две смежные боковые грани составляют с плоскостью основания углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Найти объем призмы, если боковое ребро равно  $c$ .

*Решение.*

Пусть прямоугольник  $ABCD$  — основание наклонной призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ,  $AD = a$ ,  $CD = b$ ,  $DD_1 = c$ ,  $D_1O$  — высота призмы (рис. 12.165).

Проведем в гранях  $AA_1D_1D$  и  $CC_1D_1D$  перпендикуляры  $D_1E$  и

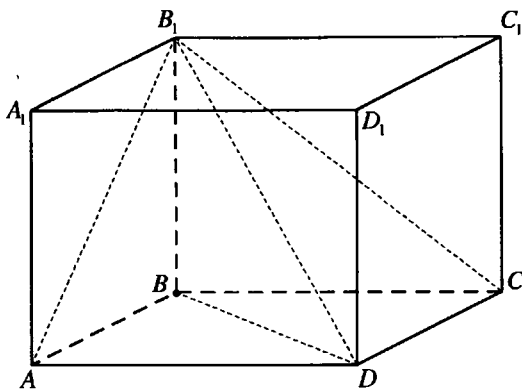


Рис. 12.166

$D_1F$  на  $CD$ . Тогда  $OE \perp AD$ ,  $OF \perp CD$ ,  $\angle D_1EO$  и  $\angle D_1FO$  — углы наклона граней  $AA_1D_1D$  и  $CC_1D_1D$  к плоскости основания,  $\angle D_1EO = \alpha$ ,  $\angle D_1FO = \beta$ . Пусть  $D_1O = d$ , тогда из

$$\Delta D_1OF (\angle D_1OF = 90^\circ): D_1F = \frac{D_1O}{\sin \angle D_1FO} = \frac{d}{\sin \beta}.$$

$$\text{В } \Delta D_1OE (\angle D_1OE = 90^\circ): EO + D_1O \operatorname{ctg} \angle D_1EO = d \operatorname{ctg} \alpha.$$

$EOFD$  — прямоугольник и  $DF = EO = d \operatorname{ctg} \alpha$ .

$$\text{В } \Delta D_1FD (\angle D_1FD = 90^\circ): D_1F^2 + DF^2 = DD_1^2 \Rightarrow \frac{d^2}{\sin^2 \beta} + d^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = c^2;$$

$$d^2 \left( \frac{1}{\sin^2 \beta} + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) = c^2;$$

$$d = \frac{c}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}}.$$

$$\text{Объем призмы } V = S_{ABCD} \cdot d = \frac{abc}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{abc}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}}.$$

**12.304.** Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна  $l$  и составляет с двумя смежными гранями углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Найти объем параллелепипеда.

*Решение.*

Пусть в прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $B_1 D = l$  (рис. 12.166).

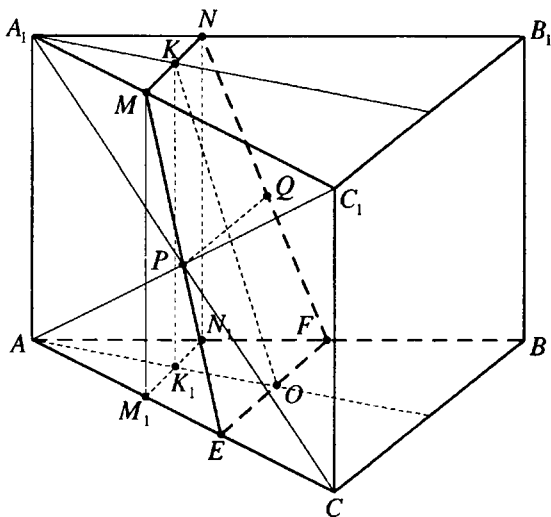


Рис. 12.167

Так как ребра  $DA$  и  $DC$  перпендикулярны граням  $AA_1B_1B$  и  $CC_1B_1B$ , то  $AB_1$  и  $B_1C$  — проекции  $B_1D$  на эти грани,  $\angle AB_1D = \alpha$ ,  $\angle CB_1D = \beta$ .

В  $\triangle B_1AD$  ( $\angle B_1AD = 90^\circ$ ):  $AD = B_1D \sin \angle AB_1D = l \sin \alpha$ .

В  $\triangle B_1CD$  ( $\angle B_1CD = 90^\circ$ ):  $CD = B_1D \sin \angle CB_1D = l \sin \beta$ .

В прямоугольнике  $ABCD$ :  $BD^2 = AD^2 + CD^2 = l^2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)$ .

В  $\triangle B_1BD$  ( $\angle B_1BD = 90^\circ$ ):

$$\begin{aligned}
 BB_1 &= \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = l\sqrt{1 - (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)} = l\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta} = \\
 &= l\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2}} = l\sqrt{\frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2}} = l\sqrt{\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}.
 \end{aligned}$$

Объем прямоугольного параллелепипеда  $V = AD \cdot CD \cdot BB_1 =$   
 $= l^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}$ .

Ответ:  $l^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}$ .

**12.305.** В правильной треугольной призме плоскость, проведенная через центр основания и центры симметрии двух боковых граней, составляет с плоскостью основания острый угол  $\alpha$ . Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью, если сторона основания равна  $a$ .

*Решение.*

Пусть  $O$  — центр основания  $ABC$  правильной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , точки  $P$  и  $Q$  пересечения диагоналей граней  $AA_1C_1C$  и  $AA_1B_1B$  — их центры симметрий (рис. 12.167). Секущая плоскость, проходящая через точки  $O, P$  и  $Q$ , пересекает параллельные грани  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  по отрезкам  $EF$  и  $MN$  соответственно,  $K$  — середина  $MN$ .

Проведем перпендикуляры  $MM_1, NN_1, KK_1$  к плоскости  $ABC$ . Трапеция  $EM_1N_1F$  — проекция трапеции  $EMNF$  на плоскость основания.

$$\text{Так как } O \text{ — центр } \triangle ABC, \text{ то } EC = \frac{1}{3}AC = \frac{a}{3}, EF = \frac{2a}{3}.$$

$$\triangle A_1MP = \triangle CEP. \text{ Тогда } AM_1 = A_1M = EC = \frac{a}{3}, M_1N_1 = \frac{a}{3}.$$

$$K_1O = AK_1 = \frac{1}{2}AO = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$S_{EM_1N_1F} = \frac{EF + M_1N_1}{2} \cdot K_1O = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Тогда } S_{EMNF} = \frac{S_{EM_1N_1F}}{\cos \alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12 \cos \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^2\sqrt{3}}{12 \cos \alpha}.$$

**12.306.** В прямой призме  $ABCA_1B_1C_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ) стороны основания  $AB$  и  $BC$  равны соответственно  $a$  и  $b$ , а угол между ними равен  $\alpha$ . Через биссектрису данного угла и вершину  $A_1$  проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания острый угол  $\beta$ . Найдите площадь сечения.

*Решение.*

Пусть  $BD$  — биссектриса  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_1BD$  — сечение данной

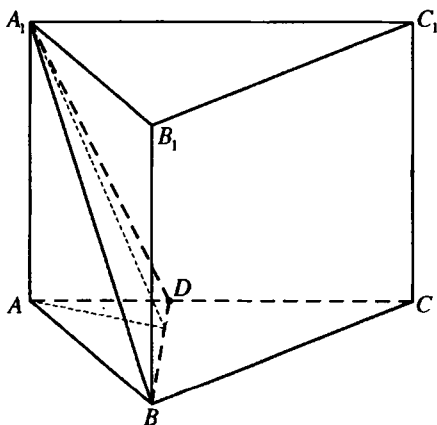


Рис. 12.168

призмы (рис. 12.168)  $\frac{AC}{AD} =$

$$= \frac{AD + DC}{AD} = 1 + \frac{DC}{AD} = 1 + \frac{BC}{AB} = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{a}.$$

Так как  $\triangle ABD$  и  $\triangle ABC$  имеют одну и ту же высоту, опущенную из вершины  $B$ , то  $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{a+b}$ . Тогда  $S_{\triangle ABD} = \frac{a}{a+b} \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a}{a+b} \times \frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{a^2 b \sin \alpha}{2(a+b)}$ ,  $\triangle ABD$  — проекция  $\triangle A_1BD$  на плоскость основания призмы, т.е.  $S_{\triangle A_1BD} = \frac{S_{\triangle ABD}}{\cos \beta} = \frac{a^2 b \sin \alpha}{2(a+b) \cos \beta}$ .

Ответ:  $\frac{a^2 b \sin \alpha}{2(a+b) \cos \beta}$ .

**12.307.** В основании прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ) лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с углом  $\alpha$  между равными сторонами  $AB$  и  $AC$ . Отрезок прямой, соединяющий вершину  $A_1$  верхнего основания с центром круга, описанного около нижнего основания, равен  $l$  и составляет с плоскостью основания угол  $\beta$ . Найти объем призмы.

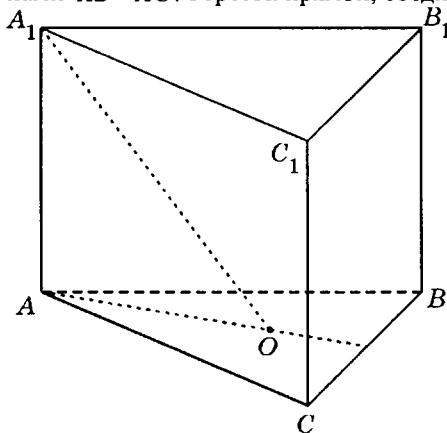


Рис. 12.169

Решение.  
Пусть  $O$  — центр круга, описанного около основания  $ABC$  данной прямой призмы (рис. 12.169). Тогда  $AO$  — проекция  $A_1O$  на плоскость  $ABC$  и  $\angle AOA_1 = \beta$ .

Если радиус описанного круга  $OA = R$ , то из  $\triangle A_1AO$

$AO = A_1O \cos \angle AOA_1 = l \cos \beta$ ,  $AA_1 = A_1O \sin \angle AOA_1 = l \sin \beta$ .

$$\text{В } \triangle ABC \angle ABC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

$$AC = 2R \sin \angle ABC = 2R \sin \left( 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2l \cos \beta \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AC^2 \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 4l^2 \cos^2 \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha = \\ &= 2l^2 \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha. \end{aligned}$$

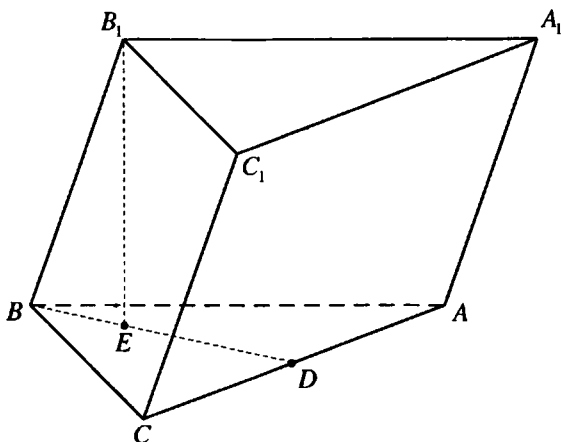


Рис. 12.170

$$\begin{aligned} \text{Объем призмы } V &= S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = 2l^3 \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = \\ &= l^3 \sin 2\beta \cos \beta \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } l^3 \sin 2\beta \cos \beta \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

**12.308.** Основанием призмы служит правильный треугольник со стороной  $a$ . Боковое ребро равно  $b$  и составляет с пересекающими его сторонами основания углы, каждый из которых равен  $\alpha$ . Найти объем призмы и допустимые значения  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть правильный треугольник  $ABC$  — основание призмы  $ABCA_1B_1C_1$  (рис. 12.170),  $AB = a$ ,  $BB_1 = b$ ,  $B_1E$  — высота призмы.

Так как  $\angle B_1BC = \angle B_1BA = \alpha$ , то точка  $E$  лежит на биссектрисе  $BD$  угла  $ABC$ .

$\angle B_1BE$  — угол наклона  $BB_1$  к плоскости основания,  $\angle B_1BC$  — угол между  $BB_1$  и прямой  $BC$  этой плоскости,  $\angle EBC$  — угол между прямой  $BC$  и проекцией прямой  $BB_1$  на плоскость основания.

Тогда  $\cos \angle B_1BC = \cos \angle B_1BE \cdot \cos \angle EBC$ ;

$$\cos \angle B_1BE = \frac{\cos \angle B_1BC}{\cos \angle EBC} = \frac{\cos \alpha}{\cos 30^\circ} = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{3}}.$$



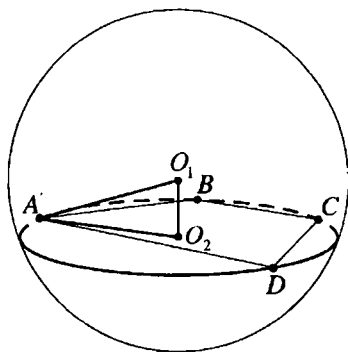


Рис. 12.172

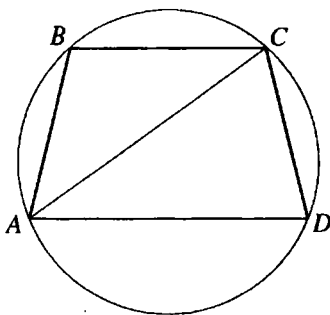


Рис. 12.172,а

$AA_1$  к плоскости основания,  $\angle A_1AE = \alpha$ . Так как  $\angle A_1AD = \angle A_1AB$ , точка  $E$  лежит на биссектрисе  $AF$  угла  $BAD$ .

Тогда  $\cos \angle A_1AD = \cos \angle A_1AE \cdot \cos \angle EAD = \cos \alpha \cos 45^\circ$ ,  $\angle A_1AD = \arccos \frac{\sqrt{2} \cos \alpha}{2}$ .

Ответ:  $\arccos \frac{\sqrt{2} \cos \alpha}{2}$ .

**12.310.** На шаровой поверхности радиуса  $R$  лежат все вершины равнобедренной трапеции, у которой меньшее основание равно боковой стороне, а острый угол равен  $\alpha$ . Найти расстояние от центра шара до плоскости трапеции, если большее основание трапеции равно радиусу шара.

*Решение.*

Пусть данная равнобедренная трапеция  $ABCD$ ,  $BC \parallel AD$ ,  $AD = R$ ,  $AB = BC = CD$ ,  $\angle BAD = \alpha$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , вписана в сечение данного шара,  $O_1$  — центр шара,  $O_2$  — центр сечения (рис. 12.172). Тогда  $O_1O_2$  — искомое расстояние от центра шара до плоскости трапеции.

$\angle BAC = \angle BCA$ , так как  $AB = BC$  (рис. 12.172, а),  $\angle BCA = \angle CAD$ , так как  $BC \parallel AD$ .  $\angle CAD = \angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\angle ACD = \pi - (\angle CAD + \angle ADC) = \pi - \frac{3\alpha}{2}$ .

Радиус круга, описанного около  $\triangle ACD$ :

$$r = \frac{AD}{2 \sin \angle ACD} = \frac{R}{2 \sin \left( \pi - \frac{3\alpha}{2} \right)} = \frac{R}{2 \sin \frac{3\alpha}{2}}$$

В  $\triangle O_1O_2A$  ( $\angle O_1O_2A = \frac{\pi}{2}$ ):



$$\begin{aligned}
 O_1O_2 &= \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4\sin^2 \frac{3\alpha}{2}}} = \frac{R}{\sin \frac{3\alpha}{2}} \sqrt{\sin^2 \frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{4}} = \\
 &= \frac{R}{\sin \frac{3\alpha}{2}} \sqrt{\sin^2 \frac{3\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{R}{\sin \frac{3\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos 3\alpha}{2} - \frac{1 - \cos \frac{\pi}{3}}{2}} = \\
 &= \frac{R}{\sin \frac{3\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 3\alpha)} = \frac{R}{\sin \frac{3\alpha}{2}} \sqrt{\sin\left(\frac{3\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{R}{\sin \frac{3\alpha}{2}} \sqrt{\sin\left(\frac{3\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$ .

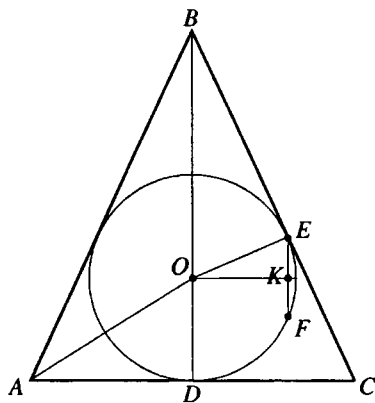


Рис. 12.173

конус,  $E$  — точка касания шара и образующей  $BC$  конуса,  $EF$  — диаметр сечения искомой площади.

Проведем перпендикуляр  $OK$  на  $EF$ . Тогда  $EK$  — радиус сечения искомой площади.

$$\text{В } \triangle ADB (\angle ADB = 90^\circ): AD = BD \operatorname{ctg} \angle BAD = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$\text{В } \triangle ADO (\angle ADO = 90^\circ):$$

$$OD = AD \operatorname{tg} \angle OAD = \frac{H \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{H \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} =$$

**12.311.** Высота конуса равна  $H$ , угол между образующей и плоскостью основания равен  $\alpha$ . В этот конус вписан шар. К окружности касания шаровой и конической поверхностей проведена касательная прямая, а через эту прямую проведена плоскость параллельно высоте конуса. Найти площадь сечения шара этой плоскостью.

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел (рис. 12.173):  $\triangle ABC$  — осевое сечение конуса,  $BD$  — его высота,  $BD = H$ ,  $\angle BAD = \alpha$ ,  $O$  — центр шара, вписанного в

$$= \frac{H \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right)}{2} = \frac{H \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{H \cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\angle BOE = \angle BCD = \alpha.$$

$$\angle EOK = 90^\circ - \angle BOE = 90^\circ - \alpha.$$

$$OE = OD = \frac{H \cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$\triangle OKE$  ( $\angle OKE = 90^\circ$ ):

$$EK = OE \sin \angle EOK = \frac{H \cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{H \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Площадь сечения } S = \pi \cdot EK^2 = \frac{\pi H^2 \cos^4 \alpha}{4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi H^2 \cos^4 \alpha}{4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}}$$

**12.312.** Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна  $a$ , двугранный угол при основании равен  $\alpha$ . Пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию. Площадь сечения равна боковой поверхности образовавшейся усеченной пирамиды. Найти расстояние от секущей плоскости до основания пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $DO$  — высота правильной пирамиды  $DABC$  (рис. 12.174),  $A_1B_1C_1$  — сечение пирамиды,  $E$  — середина  $AB$ ,  $E_1$  — середина  $A_1B_1$ ,  $O_1$  — центр  $A_1B_1C_1$ .

Тогда  $EE_1$  — апофема правильной усеченной пирамиды  $ABCA_1B_1C_1$ ,  $OO_1$  — расстояние между параллельными плоскостями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ ;  $\angle E_1EO = \alpha$ .

Пусть  $A_1B_1 = b$ ,  $EE_1 = d$ .

Проведем перпендикуляр  $E_1F$  к плоскости  $ABC$ .

Тогда точка  $F$  находится на  $OE$ ,  $E_1F = OO_1$ ,  $EF = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}$ ,  $d = EE_1$

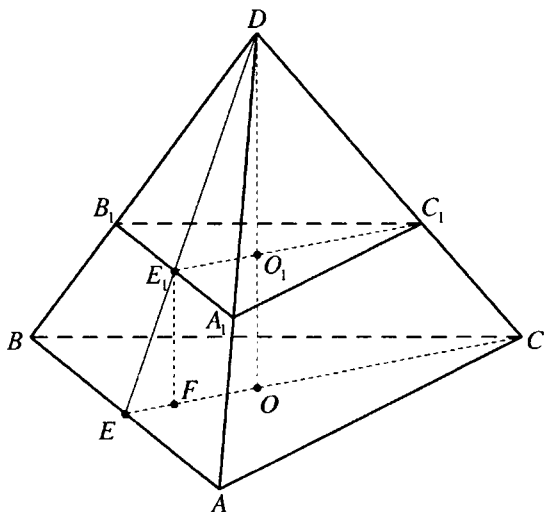


Рис. 12.174

$$= \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6 \cos \alpha}. \text{ Боковая поверхность усеченной пирамиды } S = 3 \cdot \frac{a+b}{2} d =$$

$$= 3 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6 \cos \alpha} = \frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4 \cos \alpha}.$$

Так как  $S = S_{\Delta A_1 B_1 C_1}$ , то  $\frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4 \cos \alpha} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow a^2 - b^2 = b^2 \cos \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{1 + \cos \alpha}} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow E_1 F = EF \operatorname{tg} \angle E_1 E F = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha \left( a - \frac{a\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{a\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{6 \cos \frac{\alpha}{2}} \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{a\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{6 \cos \frac{\alpha}{2}} \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \frac{a\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{3 \cos \frac{\alpha}{2}} \sin \left( \frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{4} \right) \sin \left( \frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{4} \right)$$

Ответ:  $\frac{a\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{3 \cos \frac{\alpha}{2}} \sin \left( \frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{4} \right) \sin \left( \frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{4} \right).$

**12.313.** Высота конуса равна  $H$ , угол между образующей и плоскостью основания равен  $\alpha$ . Полная поверхность этого конуса делится пополам плоскостью, перпендикулярной его высоте. Найти расстояние от этой плоскости до основания конуса.

*Решение.*

Пусть  $R$  — радиус основания данного конуса,  $L$  — его образующая,  $r, l, h$  — соответственно радиус основания, образующая и высота отсеченного конуса.

Тогда  $R = H \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $L = \frac{H}{\sin \alpha}$ ,  $r = h \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $l = \frac{h}{\sin \alpha}$ , полная поверхность ко-

$$\text{нуса } S = \pi R(R + L) = \pi \cdot H \operatorname{ctg} \alpha \left( H \operatorname{ctg} \alpha + \frac{H}{\sin \alpha} \right) = \frac{\pi H^2 \cos \alpha (\cos \alpha + 1)}{\sin^2 \alpha},$$

$$\text{боковая поверхность отсеченного конуса } S_1 = \pi r l = \frac{\pi h^2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\pi h^2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Так как по условию  $S = 2S_1$ , то  $H^2(\cos \alpha + 1) = 2h^2$ ;

$$h^2 = H^2 \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2} = H^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; h = H \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Расстояние от секущей плоскости до основания конуса  $x = H - h =$

$$= H \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2H \sin^2 \frac{\alpha}{4}.$$

*Ответ:*  $2H \sin^2 \frac{\alpha}{4}$ .

**12.314.** Найти угол между апофемой правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания, если разность между этим углом и углом, который составляет боковое ребро пирамиды с плоскостью основания, равна  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABC$  (рис. 12.175),  $SD$  — ее апофема — высота грани  $BSC$ ,  $\angle SDO = \beta$ . Тогда  $\angle SCO = \beta - \alpha$ .

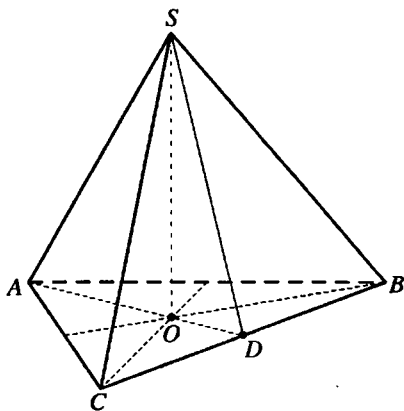


Рис. 12.175

Если  $OD = a$ , то из  $\Delta SOD (\angle SOD = 90^\circ)$ :  $SO = OD \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{tg} \beta$ .  
 В  $\Delta SOC (\angle SOC = 90^\circ)$ :  $SO = OC \operatorname{tg} (\beta - \alpha) = 2a \operatorname{tg} (\beta - \alpha) \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} (\beta - \alpha)$ ;

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta + 2 \operatorname{tg} \alpha = 0;$$

$$\operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha + 2 = 0;$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 8}}{2};$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 8}}{2}.$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 8}}{2}$ .

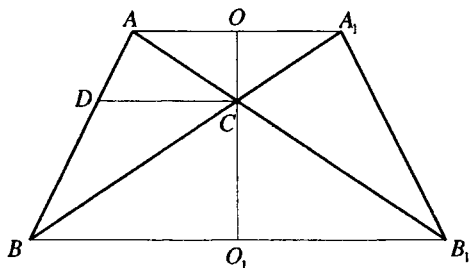


Рис. 12.176

**12.315.** Катет прямоугольного треугольника равен  $a$ , противолежащий ему угол равен  $\alpha$ . Этот треугольник вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника, проходящей через вершину данного угла и перпендикулярной его биссектрисе. Найти объем тела вращения.

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение полученного тела вращения (рис. 12.176). Его объем  $V$  равен разности объема  $V_1$  усеченного конуса с осевым сечением  $BA A_1 B_1$  и суммы объемов  $V_2$  и  $V_3$  конусов с осевыми сечениями  $ACA_1$  и  $BCB_1$  соответственно.

Пусть  $CD$  — биссектриса  $\angle ACB = \alpha$  данного треугольника  $BAC$ .  $O$  — центр основания конуса с сечением  $ACA_1$ ,  $O_1$  — центр основания конуса с сечением  $BCB_1$ ,  $OC = h$ ,  $O_1C = H$ ,  $OA = r$ ,  $O_1B = R$ .

$$\angle OAC = \angle O_1BC = \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{В } \Delta BAC (\angle BAC = 90^\circ): AC = a \operatorname{ctg} \alpha; BC = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

$$\text{В } \Delta AOC (\angle AOC = 90^\circ):$$

$$r = AC \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}; h = AC \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}.$$

В  $\Delta BO_1C$  ( $\angle BO_1C = 90^\circ$ ):

$$R = BC \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}; H = BC \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}.$$

$$\begin{aligned} V &= V_1 - (V_2 + V_3) = \frac{\pi}{3} (H + h)(R^2 + Rr + r^2) - \frac{\pi}{3} HR^2 - \frac{\pi}{3} hr^2 = \\ &= \frac{\pi}{3} (HR^2 + HRr + Hr^2 + hR^2 + hRr + hr^2 - HR^2 - hr^2) = \\ &= \frac{\pi}{3} (HRr + Hr^2 + hR^2 + hRr) = \frac{\pi}{3} (Hr(R+r) + hR(R+r)) = \\ &= \frac{\pi}{3} (R+r)(Hr + hR) = \frac{\pi}{3} \left( \frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} + \frac{a \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} \right) \times \\ &\times \left( \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} \cdot \frac{a \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} + \frac{a \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} \cdot \frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} \right) = \frac{\pi a^3}{3} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha} \times \\ &\times \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\pi a^3}{3} \cdot \frac{2 \cos^3 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\pi a^3}{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi a^3}{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

**12.316.** Отношение объема прямого параллелепипеда к объему вписанного в него шара равно  $k$ . Найти углы в основании параллелепипеда и допустимые значения  $k$ .

*Решение.*

Пусть  $R$  — радиус данного шара,  $\alpha$  — угол в основании данного параллелепипеда. Тогда высота параллелепипеда  $H = 2R$ , объем шара

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Проекция данного шара на плоскость основания параллелепипеда

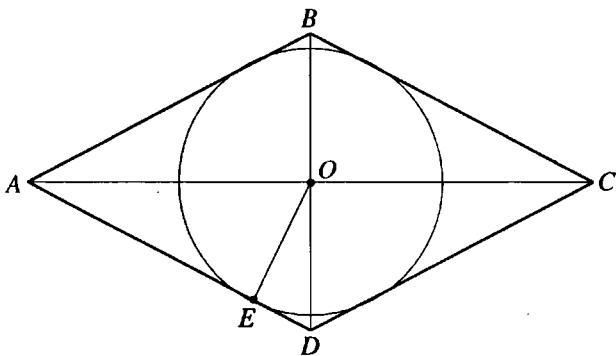


Рис. 12.177

да — круг радиуса  $R$ , вписанный в основание, поэтому основание является ромбом (рис. 12.177).

Тогда  $\angle OAD = \frac{\alpha}{2}$ , а из  $\triangle AEO$  ( $\angle AEO = \frac{\pi}{2}$ ,  $OE = R$ )  $AO = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ , из

$$\triangle DEO \left( \angle DEO = \frac{\pi}{2}, \angle DOE = \angle OAD = \frac{\alpha}{2} \right) DO = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Площадь основания параллелепипеда  $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2 \cdot AO \cdot DO =$

$$= \frac{2R^2}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{4R^2}{\sin \alpha}, \text{ а его объем } V_2 = S \cdot H = \frac{8R^2}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{8R}{\sin \alpha} \cdot \frac{3}{4\pi R^3} =$$

$$= \frac{6}{\pi \sin \alpha} = k; \sin \alpha = \frac{6}{\pi k}.$$

Таким образом, один из углов основания равен  $\arcsin \frac{6}{\pi k}$ , а второй  $\pi - \arcsin \frac{6}{\pi k}$ .

Так как  $0 < \sin \alpha \leq 1$ , то  $0 < \frac{6}{\pi k} \leq 1, k \geq \frac{6}{\pi}$ .

Ответ:  $\arcsin \frac{6}{\pi k}; \pi - \arcsin \frac{6}{\pi k}; k \geq \frac{6}{\pi}$ .

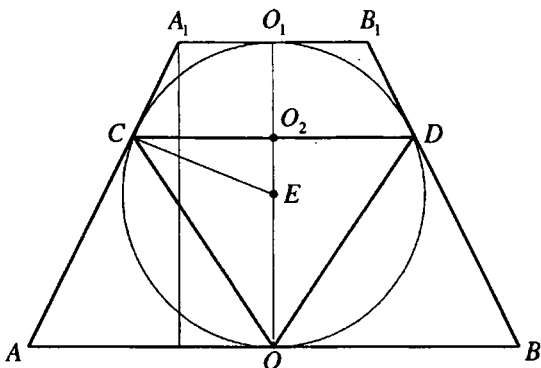


Рис. 12.178

12.317. Образующая усеченного конуса, описанного около шара, равна  $a$ , угол между образующей и плоскостью основания равен  $\alpha$ . Найти объем конуса, основанием которого служит круг касания шаровой поверхности с боковой поверхностью усеченного конуса, а вершина совпадает с центром большего основания усеченного конуса.

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел (рис. 12.178): равнобокую трапецию  $AA_1B_1B$  ( $AA_1 = a$ ,  $\angle A_1AB = \alpha$ ), вписанный в нее круг с центром  $E$ , касающийся  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $AB$  и  $A_1B_1$  соответственно в точках  $C$ ,  $D$ ,  $O$  и  $O_1$ ,  $\triangle COD$  — осевое сечение конуса искомого объема.

Середина  $O_2$  отрезка  $CD$  — центр основания конуса искомого объема  $V$ . Тогда  $V = \frac{1}{3} \pi \cdot O_2C^2 \cdot OO_2$ .

Пусть радиус шара равен  $R$ :  $EO = EC = R$ .

В четырехугольнике  $ACEO$   $\angle CAO = \alpha$ ,  $\angle ACE = \angle AOE = 90^\circ \Rightarrow \angle CEO = 180^\circ - \alpha$  и  $\angle CEO_2 = \alpha$ .

В  $\triangle CO_2E$  ( $\angle CO_2E = 90^\circ$ ):  $CO_2 = R \sin \alpha$ ;  $EO_2 = R \cos \alpha$ .

$$OO_2 = OE + EO_2 = R + R \cos \alpha = 2R \cos^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \sin^2 \alpha \cdot 2R \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} \pi R^3 \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$A_1K$  — высота трапеции  $AA_1B_1B$ . Тогда  $A_1K = 2R$ .

Из  $\triangle AKA_1$  ( $\angle AKA_1 = 90^\circ$ ):  $A_1K = AA_1 \sin \angle A = a \sin \alpha \Rightarrow R = \frac{1}{2} a \sin \alpha$  и

$$V = \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{1}{8} a^3 \sin^3 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi a^3}{12} \sin^5 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$



Ответ:  $\frac{\pi a^3}{12} \sin^5 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ .

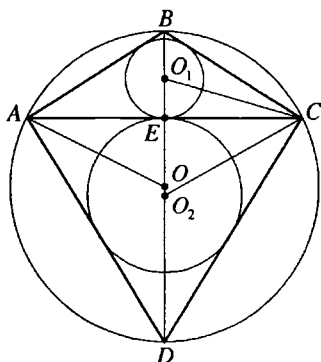


Рис. 12.179

12.318. В шар радиуса  $R$  вписаны два конуса с общим основанием; вершины конусов совпадают с противоположными концами диаметра шара. Шаровой сегмент, вмещающий меньший конус, имеет в осевом сечении дугу, равную  $\alpha^\circ$ . Найти расстояние между центрами шаров, вписанных в эти конусы.

Решение.

Данная совокупность тел имеет ось симметрии, рассмотрим ее осевое сечение (рис. 12.179):  $O$  — центр данного шара,  $\triangle ABC$  — осевое сечение меньшего конуса,  $\triangle ADC$  — осевое сечение большего конуса,  $E$  — центр их общего основания,  $O_1$  и  $O_2$  — центры вписанных в них шаров,  $\angle AOC = \alpha^\circ$ .

Из  $\triangle AEO$  ( $\angle AEO = 90^\circ$ ):  $AE = OA \sin \angle AOE = R \sin \frac{\alpha}{2}$ .

$\angle BCA$  — вписанный и опирается на дугу, равную  $\frac{\alpha}{2}$ . Таким обра-

зом,  $\angle BCA = \frac{\alpha}{4}$ ,  $\angle O_1CE = \frac{1}{2} \angle BCA = \frac{\alpha}{8}$ .

В  $\triangle O_1EC$  ( $\angle O_1EC = 90^\circ$ ):  $O_1E = EC \operatorname{tg} \angle O_1CE = R \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}$ .

$\angle BCD$  — вписанный и опирается на диаметр.

Отсюда  $\angle BCD = 90^\circ$ ,  $\angle ECD = \angle BCD - \angle BCA = 90^\circ - \frac{\alpha}{4}$ ,  $\angle ECO_2 = \frac{1}{2} \angle ECD = 45^\circ - \frac{\alpha}{8}$ .

Из  $\triangle O_2EC$  ( $\angle O_2EC = 90^\circ$ ):

$$O_2E = EC \operatorname{tg} \angle ECO_2 = R \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{8} \right).$$

Искомое расстояние:

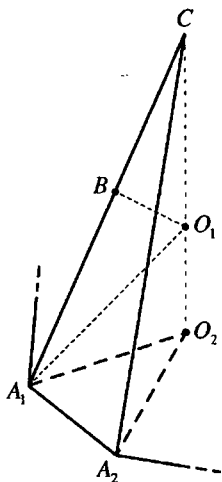


Рис. 12.180

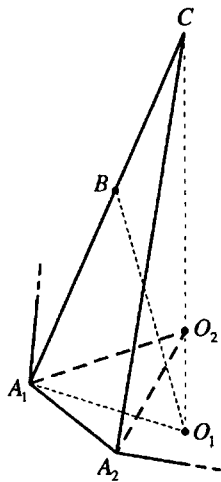


Рис. 12.180,а

$$O_1O_2 = O_1E + O_2E = R \sin \frac{\alpha}{2} \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8} + \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{8} \right) \right) = \frac{R \sin \frac{\alpha}{2} \sin 45^\circ}{\cos \frac{\alpha}{8} \cos \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{8} \right)} =$$

$$= \frac{R\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{8} \cos \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{8} \right)}.$$

Ответ: 
$$\frac{R\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{8} \cos \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{8} \right)}.$$

**12.319.** Найти отношение объема правильной  $n$ -угольной пирамиды к объему описанного шара, если угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды равен  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть  $CO_2$  — высота правильной  $n$ -угольной пирамиды,  $A_1A_2$  — сторона ее основания. Тогда  $\angle CA_1O_2 = \alpha$ ,  $\angle AO_1B = \frac{2\pi}{n}$ .

Центр  $O_1$  описанного шара — точка пересечения отрезка  $CO_1$  (рис. 12.180) или его продолжения за точку  $O_1$  (рис. 12.180,а) и серединного перпендикуляра  $O_1B$  бокового ребра  $A_1C$  пирамиды.

$\Delta A_1 O_2 C$  и  $\Delta O_1 B C$  — прямоугольные с общим острым углом при вершине  $C$ . Тогда  $\angle B O_1 C = \angle C A_1 O_2 = \alpha$ .

Если радиус шара  $O_1 C = R$ , то из  $\Delta C B O_1 \left( \angle C B O_1 = \frac{\pi}{2} \right)$ :  $C B =$   
 $= C O_1 \sin \angle B O_1 C = R \sin \alpha$ .

$$A_1 C = 2 C B = 2 R \sin \alpha.$$

В  $\Delta A_1 O_2 C \left( \angle A_1 O_2 C = \frac{\pi}{2} \right)$ :  $C O_2 = A C \sin \angle C A_1 O_2 = 2 R \sin^2 \alpha$ ;

$$A_1 O_2 = A_1 C \cos \angle C A_1 O_2 = 2 R \sin \alpha \cos \alpha = R \sin 2\alpha.$$

Площадь основания пирамиды:

$$S = n S_{\Delta A_1 O_2 A_2} = \frac{n}{2} A_1 O_2^2 \sin \angle A_1 O_2 A_2 = \frac{n}{2} R^2 \sin^2 2\alpha \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Объем пирамиды  $V_1 = \frac{1}{3} S \cdot C O_2 = \frac{1}{3} n R^3 \sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha \sin \frac{2\pi}{n}$ , объем

шара  $V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3$  и  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{n \sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha \sin \frac{2\pi}{n}}{4\pi}$ .

Ответ:  $\frac{n \sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha \sin \frac{2\pi}{n}}{4\pi}$ .

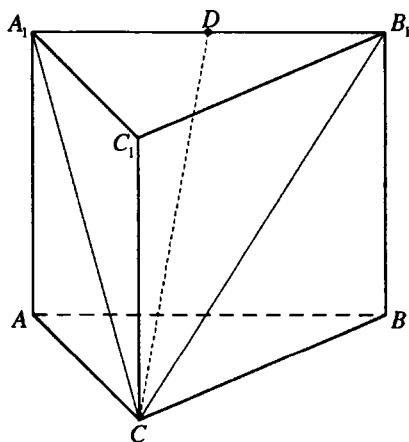


Рис. 12.181

**12.320.** Боковые грани правильной треугольной призмы — квадраты. Найти угол между диагональю боковой грани и не пересекающей ее стороной основания призмы.

*Решение.*

Угол между боковой диагональю  $B_1 C$  боковой грани правильной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  (рис. 12.181) и стороной  $AB$  основания равен углу между  $B_1 C$  и  $A_1 B_1$ .

Если длина ребра призмы равна 1, то диагональ квадрата  $B_1 C = \sqrt{2}$ .

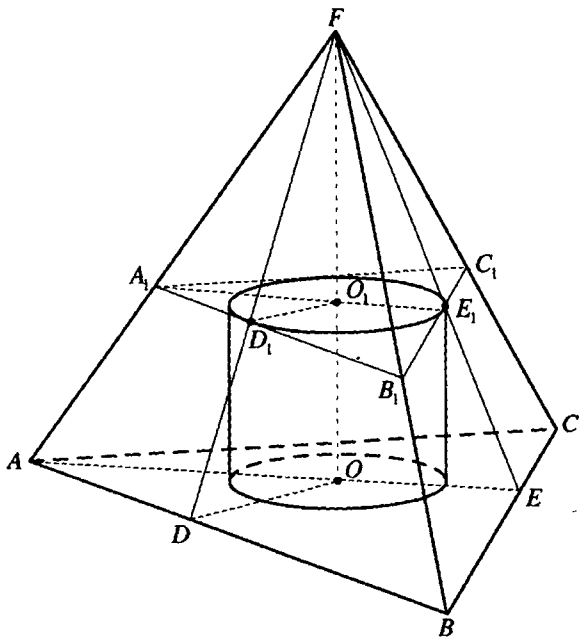


Рис. 12.182

Пусть  $D$  — середина  $A_1B_1$ . Тогда  $CD$  — высота и медиана равнобедренного  $\triangle A_1CB_1$ .

В  $\triangle CDB_1$  ( $\angle CDB_1 = 90^\circ$ ):

$$\cos \angle A_1B_1C = \frac{B_1D}{B_1C} = \frac{1}{2} : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \angle A_1B_1C = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ:  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

**12.321.** Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно  $a$  и составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . В эту пирамиду вписан цилиндр с квадратным осевым сечением (основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды). Найти объем цилиндра.

*Решение.*

Пусть  $FO$  — высота данной правильной пирамиды  $FABC$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$  — сечение пирамиды плоскостью верхнего основания цилиндра (рис. 12.182).

Тогда  $\angle FA_1O_1 = \angle FAO = \alpha$ ,  $FO = FA \sin \angle FAO = a \sin \alpha$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$  — правильный.

Если радиус основания цилиндра равен  $r$ , то высота цилиндра  $OO_1 = 2r$ ,  $A_1O_1 = 2r$ ,  $FO_1 = A_1O_1 \operatorname{tg} \angle FA_1O_1 = 2r \operatorname{tg} \alpha$ .  $FO = FO_1 + OO_1$ ;  $a \sin \alpha = 2r \operatorname{tg} \alpha + 2r$ ;

$$r = \frac{a \sin \alpha}{2(\operatorname{tg} \alpha + 1)} = \frac{a \sin \alpha}{2\left(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{a \sin \alpha \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4}}{2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{a\sqrt{2} \sin 2\alpha}{8 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$$

Объем цилиндра:

$$V = \pi r^2 \cdot OO_1 = 2\pi r^3 = 2\pi \cdot \frac{2\sqrt{2}a^3 \sin^3 2\alpha}{8^3 \sin^3\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2} \sin^3 2\alpha}{128 \sin^3\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$$

Ответ:  $\frac{\pi a^3 \sqrt{2} \sin^3 2\alpha}{128 \sin^3\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$ .

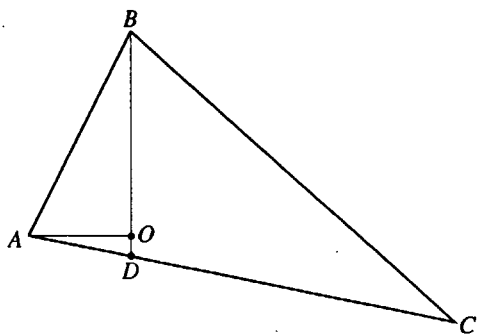


Рис. 12.183

**12.322.** В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $\alpha$ , угол  $C$  равен  $\beta$  и биссектриса  $BD$  равна  $l$ . Треугольник  $ABD$  вращается вокруг прямой  $BD$ . Найти объем тела вращения.

*Решение.*

При вращении треугольника  $ABD$  (рис. 12.183) образуется два конуса с общим основанием радиуса  $OA$  ( $OA \perp BD$ ),  $BO$  — высота конуса объема  $V_1$ ,  $DO$  — высота

конуса объема  $V_2$ . Искомый объем тела вращения  $V = V_1 + V_2 =$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot BO + \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot DO = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 (BO + DO) = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot BD.$$

$$\text{В } \triangle ABC: \angle ABC = 180^\circ - (\alpha + \beta) \Rightarrow \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

В  $\triangle ABD$ :

$$\angle ADB = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ABD) = 180^\circ - \left(\alpha + 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

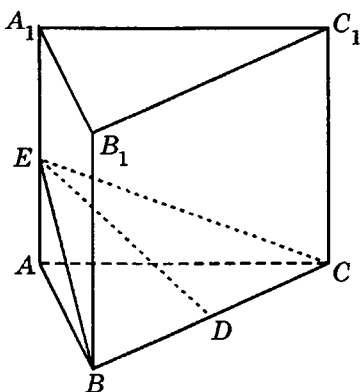


Рис. 12.184

$$\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AB}{\sin \angle ADB} \Rightarrow AB = \frac{l \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \alpha}.$$

В  $\triangle AOB$  ( $\angle AOB = 90^\circ$ ):

$$AO = AB \sin \angle ABD = \frac{l \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \alpha} \cdot \sin \left( 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \frac{l \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \cdot AO^2 \cdot BD = \frac{\pi l^3 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{3 \sin^2 \alpha}.$$

Ответ: 
$$\frac{\pi l^3 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{3 \sin^2 \alpha}.$$

**12.323.** Основанием прямой призмы служит равносторонний треугольник. Через одну из его сторон проведена плоскость, отсекающая от призмы пирамиду, объем которой равен  $V$ . Найти площадь сечения, если угол между секущей плоскостью и плоскостью основания равен  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть  $\triangle BEC$  — сечение правильной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  (рис. 12.184),

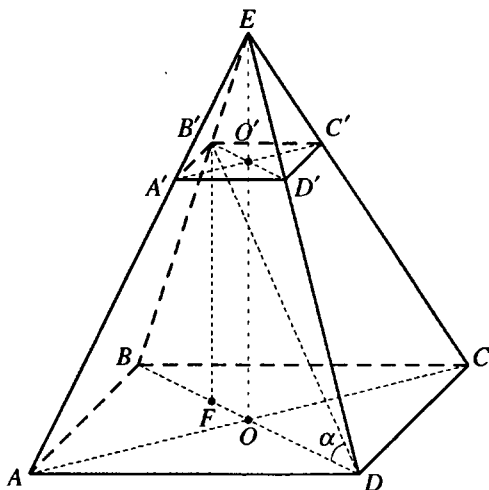


Рис. 12.185

$D$  — середина  $BC$ . Тогда  $\angle EDA = \alpha$ ,  $EA$  — высота пирамиды  $EABC$ .

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot EA = \frac{1}{3} S_{\Delta BEC} \cdot \cos \alpha \cdot EA.$$

Если  $EA = h$ ,  $AB = a$ , то  $S_{\Delta BEC} = \frac{3V}{h \cos \alpha}$ ,  $S_{\Delta ABC} = \frac{3V}{h} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ ,  $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

В  $\Delta EAD$  ( $\angle EAD = 90^\circ$ ):  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha$ ,  $a = \frac{2h \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3V}{h} = \frac{4h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^3 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha = 9V \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}V}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \sqrt[3]{3\sqrt{3}V \operatorname{tg}^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta BEC} = \frac{3V}{h \cos \alpha} = \frac{3V}{\sqrt[3]{3\sqrt{3}V \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \cos \alpha} = \sqrt[3]{\frac{27V^3}{3\sqrt{3}V \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^3 \alpha}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}V^2}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}}.$$

Ответ:  $\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}V^2}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}}.$

12.324. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение, параллельное основанию. Прямая, проходящая через вершину основания и противоположащую (т.е. не принадлежащую той же грани) вершину сечения, составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найти площадь сечения, если боковое ребро пирамиды равно диагонали основания и равно  $a$ .

*Решение.*

Пусть  $EO$  — высота правильной пирамиды  $EABCD$ , квадрат  $A'B'C'D'$  — сечение пирамиды,  $\angle BDB' = \alpha$  (рис. 12.185).

Так как  $BE = DE = BD$ , то  $\angle EBD = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle BB'D = \frac{2\pi}{3} - \alpha$ .

$$\text{В } \triangle BB'D: \frac{DB'}{\sin \angle EBD} = \frac{BD}{\sin \angle BB'D} \Rightarrow DB' = \frac{a \sin \frac{\pi}{3}}{\sin \left( \frac{2\pi}{3} - \alpha \right)} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right)}.$$

Если  $B'F$  — высота равнобокой трапеции  $BB'D'D$ , то из

$$\triangle B'FD \left( \angle B'FD = \frac{\pi}{2} \right): FD = B'D \cos \angle BDB' = \frac{a\sqrt{3} \cos \alpha}{2 \sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right)}.$$

Так как  $FD = \frac{BD + B'D'}{2}$ , то

$$B'D' = 2FD - BD = \frac{a\sqrt{3} \cos \alpha}{\sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right)} - a = \frac{a}{\sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right)} \left( \sqrt{3} \cos \alpha - \sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right) \right) =$$

$$= \frac{a}{\sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right)} \left( 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha \right) = \frac{a \sin \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right)}.$$

$$\text{Площадь сечения } S = \frac{1}{2} B'D'^2 \frac{a^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right)}{2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right)}{2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right)}.$$



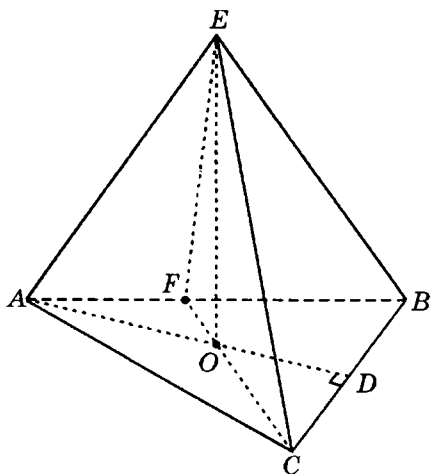


Рис. 12.186

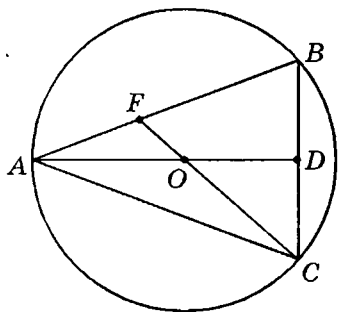


Рис. 12.186, а

**12.325.** Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого боковая сторона равна  $b$ , а угол при основании равен  $\alpha$ . Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол  $\beta$ . Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину данного угла  $\alpha$  и высоту пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $EO$  — высота пирамиды  $EABC$ ,  $AC = AB = b$ ,  $\angle ACB = \alpha$  (рис. 12.186). Так как все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол, то точка  $O$  — центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , и так как  $\triangle ABC$  — равнобедренный и остроугольный, то точка  $O$  лежит на его высоте и биссектрисе  $AD$  (рис. 12.186, а).

Если  $\triangle CEF$  — сечение пирамиды, то  $S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EO$ .

В  $\triangle ABC$ :  $\angle BAC = 180^\circ - 2\alpha$ ,  $\angle OAC = 90^\circ - \alpha$ .

$OA = OC = R$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

Тогда  $\angle ACO = \angle OAC = 90^\circ - \alpha$ ,  $\angle AFC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACO) = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha + 90^\circ - \alpha) = 3\alpha - 90^\circ$ .

$$\text{В } \triangle AFC: \frac{FC}{\sin \angle FAC} = \frac{AC}{\sin \angle AFC}; FC = \frac{b \sin(180^\circ - 2\alpha)}{\sin(3\alpha - 90^\circ)} = -\frac{b \sin 2\alpha}{\cos 3\alpha}.$$

$$\text{В } \triangle ABC: OA = R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{b}{2 \sin \alpha}.$$

В  $\triangle AOE$  ( $\angle AOE = 90^\circ$ ):

$$EO = AO \operatorname{tg} \angle EAO = \frac{b \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot EO = \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{b \sin 2\alpha}{\cos 3\alpha} \right) \cdot \frac{b \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \alpha} = -\frac{b^2 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{2 \cos 3\alpha}.$$

Ответ:  $-\frac{b^2 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{2 \cos 3\alpha}$ .

12.326. Плоская ломаная линия состоит из  $n$  равных отрезков, соединенных в виде зигзага под углом  $\alpha$  друг к другу. Длина каждого отрезка ломаной равна  $a$ . Эта линия вращается вокруг прямой, проходящей через один из ее концов параллельно биссектрисе угла  $\alpha$ . Найти поверхность тела вращения.

Решение.

Первый отрезок, имеющий с осью вращения общую точку, описывает боковую поверхность полного конуса  $S_1$ , а все остальные — боковые поверхности усеченных конусов  $S_2, S_3, \dots, S_n$  (рис. 12.187).

Пусть  $r$  — радиус основания первого конуса. Тогда первый усеченный конус имеет радиусы оснований  $r$  и  $2r$ , второй —  $2r$  и  $3r$ , третий —  $3r$  и  $4r$  и т.д.

Таким образом

$$S_1 = \pi r a,$$

$$S_2 = \pi(r + 2r)a = 3\pi r a,$$

$$S_3 = \pi(2r + 3r)a = 5\pi r a,$$

.....

$$S_n = (2n - 1)\pi r a.$$

Поверхность тела вращения  $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = \pi r a(1 + 3 + 5 +$

$$+ \dots + 2n - 1) = \pi r a \cdot \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = \pi r a n^2.$$

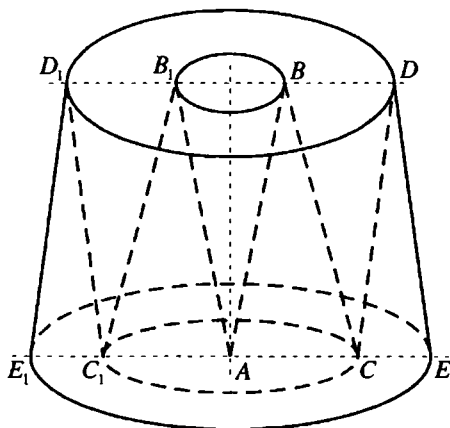


Рис. 12.187

Так как  $r = a \sin \frac{\alpha}{2}$ , то  $S = \pi a^2 n^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ .

Ответ:  $\pi a^2 n^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ .

**12.327.** Два конуса имеют общую высоту; их вершины лежат на противоположных концах этой высоты. Образующая одного конуса равна  $l$  и составляет с высотой угол  $\alpha$ . Образующая другого конуса составляет с высотой угол  $\beta$ . Найти объем общей части обоих конусов.

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности конусов (рис. 12.188):  $\triangle ABC$  — осевое сечение конуса с образующей  $l$ ,  $\triangle MLK$  — осевое сечение второго конуса,  $BL$  — их общая высота,  $\angle ABL = \alpha$ ,  $\angle MLB = \beta$ .

Общая часть этих конусов — два конуса с общим основанием,  $\triangle EBF$  и  $\triangle ELF$  — их осевое сечение,  $O$  — центр их общего основания,  $r$  — радиус этого основания.

Пусть  $BO = h_1$ ,  $LO = h_2$ ,  $BL = H$ .

Тогда искомый объем  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 H$ .

В  $\triangle EOB$  ( $\angle EOB = 90^\circ$ ):  $h_1 = r \operatorname{ctg} \alpha$ .

В  $\triangle EOL$  ( $\angle EOL = 90^\circ$ ):  $h_2 = r \operatorname{ctg} \beta$ .

Тогда  $H = h_1 + h_2 = r(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) \Rightarrow r = \frac{H \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ .

В  $\triangle ALB$  ( $\angle ALB = 90^\circ$ ):  $H = l \cos \alpha$ . Таким образом

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{\pi H^3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{3 \sin^2(\alpha + \beta)} = \frac{\pi l^3 \cos^3 \alpha \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{3 \sin^2(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{\pi l^3 \sin^2 2\alpha \cos \alpha \sin^2 \beta}{12 \sin^2(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{\pi l^3 \sin^2 2\alpha \cos \alpha \sin^2 \beta}{12 \sin^2(\alpha + \beta)}$ .

**12.328.** Тупоугольный равнобедренный треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через точку пересечения его высот параллельно большей стороне. Найти объем тела вращения, если тупой угол равен  $\alpha$ , а противолежащая ему сторона треугольника равна  $a$ .

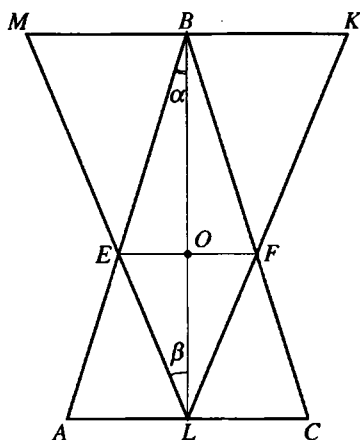


Рис. 12.188

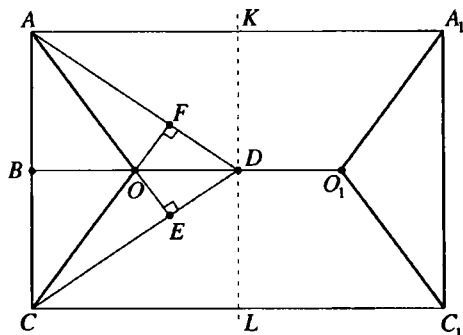


Рис. 12.189

*Решение.*

В  $\triangle AOC$  (рис. 12.189)  $OA = OC$ ,  $\angle AOC = \alpha$ ,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $AC = a$ ,  $D$  — точка пересечения его высот, прямая  $KL$  — ось вращения,  $OB$ ,  $CF$ ,  $AE$  — высоты  $\triangle AOC$ .

Искомый объем  $V$  тела вращения равен разности объема  $V_1$  цилиндра, осевое сечение которого — прямоугольник  $CAA_1C_1$ , и удвоенного объема  $V_2$  усеченного конуса, осевое сечение которого — равнобедренная трапеция  $AOO_1A_1$ .

Высота цилиндра  $H = a$ , высота усеченного конуса  $h = \frac{a}{2}$ . Радиус основания цилиндра и большего основания усеченного конуса  $R = DB$ , радиус меньшего основания усеченного конуса  $r = DO$ .

В четырехугольнике  $EOFD$   $\angle OFD = \angle OED = 90^\circ$ ,  $\angle FOE = \angle AOC = \alpha \Rightarrow \Rightarrow \angle ADC = 180^\circ - \alpha$ ,  $\angle ADB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ .

$$\text{В } \triangle ABO (\angle ABO = 90^\circ): OB = AB \operatorname{ctg} \angle AOB = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

В  $\triangle ABD (\angle ABD = 90^\circ)$ :

$$R = DB = AB \operatorname{ctg} \angle ADB = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \left( 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$r = DO = DB - OB = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = -a \operatorname{ctg} \alpha.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 - 2V_2 = \pi R^2 H - \frac{2}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2) = \pi R^2 a - \frac{1}{3} \pi \alpha (R^2 + Rr + r^2) = \\
 &= \frac{\pi a}{3} (3R^2 - R^2 - Rr - r^2) = \frac{\pi a}{3} (2R^2 - Rr - r^2) = \\
 &= \frac{\pi a}{3} \left( 2 \cdot \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{4} + \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \frac{a}{2} - a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) = \frac{\pi a^3}{6} \left( \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\cos \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{\pi a^3}{6} \left( \frac{1 - \cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = \\
 &= \frac{\pi a^3}{6} \left( \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{\cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{\pi a^3}{6} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \\
 &= \frac{\pi a^3}{6} \cdot \frac{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \left( 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)^2}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a^3}{6} \cdot \frac{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \\
 &= \frac{\pi a^3 \left( 3 - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{\pi a^3 \left( 3 - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ .

**12.329.** Боковая сторона равнобедренного треугольника равна  $a$ , угол при основании равен  $\alpha$ . Этот треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через вершину, противоположную основанию, параллельно биссектрисе угла  $\alpha$ . Найти поверхность тела вращения.

*Решение.*

В  $\triangle BAC$   $BA = AC = a$ ,  $\angle ACB = \alpha$ ,  $CD$  — биссектриса  $\angle ACB$ . Рассмотрим осевое сечение полученного тела вращения (рис. 12.190). Его поверхность  $S$  равна сумме боковой поверхности  $S_1$  конуса с осевым сечением



12.330. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого радиус вписанной окружности равен  $r$ , а острый угол равен  $\alpha$ . Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол  $\beta$ . Найти объем пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $EO$  — высота пирамиды  $EABC$ ,  $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $O_1$  — центр окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ ,  $L$  и  $K$  — точки касания этой окружности со сторонами  $AC$  и  $BC$  соответственно (рис. 12.191).

Тогда  $O_1L \perp AC$ ,  $O_1K \perp BC$ ,  $O_1L = O_1K = CL = CK = r$ ,  $\angle O_1AL = \frac{\alpha}{2}$ ,

$\angle O_1BK = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ . В  $\triangle ALO_1$ :  $AL = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ . В  $\triangle BKO_1$ :  $BK = r \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$

$$AC = AL + LC = r \left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 1 \right) = r \left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \right) = r \cdot \frac{\sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{r\sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}. BC = BK + KC = r \left( \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) + 1 \right) =$$

$$= r \left( \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \right) = r \cdot \frac{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{r\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{r\sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{r\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)} =$$

$$= r^2 \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

В  $\triangle ABC$  ( $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ ):

$$AB = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{r\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \alpha} = \frac{r\sqrt{2}}{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2}}$$

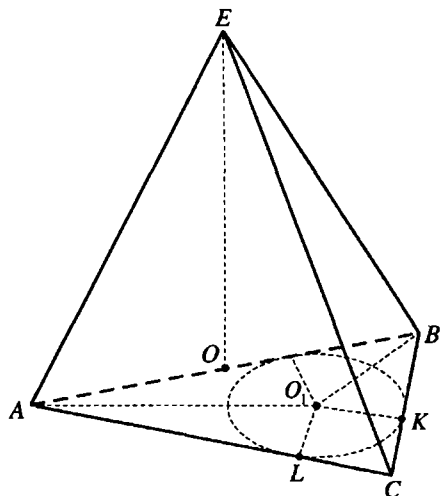


Рис. 12.191

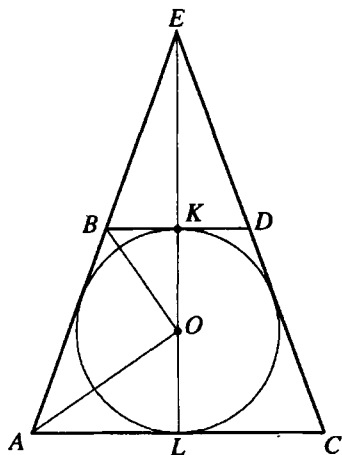


Рис. 12.192

Так как все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол  $\beta$ , то точка  $O$  — центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , и, так как  $\triangle ABC$  — прямоугольный, то  $O$  — середина  $AB$ ,  $OA = \frac{1}{2} AB = \frac{r\sqrt{2}}{4 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2}}$ .

$$\text{В } \triangle AOE \left( \angle AOE = \frac{\pi}{2} \right): EO = AO \operatorname{tg} \angle EAO = \frac{r\sqrt{2} \operatorname{tg} \beta}{4 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot EO = \frac{r^3 \sqrt{2} \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{12 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{r^3 \sqrt{2} \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{12 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2}}.$$



**12.331.** В конус вписан шар и к шару проведена касательная плоскость, параллельно плоскости основания конуса. В каком отношении эта плоскость делит боковую поверхность конуса, если угол между образующей и плоскостью основания равен  $\alpha$ ?

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел (рис. 12.192):  $\triangle AEC$  — осевое сечение данного конуса с боковой поверхностью  $S_1$ ,  $O$  — центр данного шара — центр круга, вписанного в трапецию  $ABCD$ , являющейся осевым сечением усеченного конуса с боковой поверхностью  $S_2$ ,  $\triangle BED$  — осевое сечение конуса с боковой поверхностью  $S_3$ , отсекаемого от данного конуса касательной плоскостью шара,  $L$  — середина  $AC$ ,  $K$  — середина  $BD$ ,  $\angle EAC = \alpha$ .

$$\text{Искомое отношение } \frac{S_2}{S_3} = \frac{S_1 - S_3}{S_3} = \frac{S_1}{S_3} - 1 = \left( \frac{LA}{KB} \right)^2 - 1.$$

$$\angle LAO = \frac{1}{2} \angle EAC = \frac{\alpha}{2}, \angle KBO = \frac{1}{2} \angle ABD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Если } OA = R, \text{ то из } \triangle ALO (\angle ALO = 90^\circ): OL = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$OK = OL = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

В  $\triangle BKO (\angle BKO = 90^\circ)$ :

$$BK = OK \operatorname{ctg} \angle KBO = R \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{S_2}{S_3} = \left( \frac{R}{R \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right)^2 - 1 = \frac{\cos^4 \frac{\alpha}{2}}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}} - 1 =$$

$$= \frac{\cos^4 \frac{\alpha}{2} - \sin^4 \frac{\alpha}{2}}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \alpha}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\cos \alpha}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}.$$

**12.332.** В основание шарового сегмента вписан прямоугольный треугольник, у которого площадь равна  $S$ , а острый угол равен  $\alpha$ . Найти высоту сегмента, если его дуге в осевом сечении соответствует центральный угол, равный  $\beta$ .

*Решение.*

Пусть  $D$  — центр основания шарового сегмента, из условия  $ED$  — его высота,  $O$  — центр шара (рис. 12.193).  $\triangle ACB$  вписан в основание сегмента,  $S_{\triangle ACB} = S, \angle BAC = \alpha, \angle BCA = 90^\circ$ .

Тогда  $D$  — середина  $AB$ ,  $\angle POB$  — центральный угол осевого сечения сегмента,  $\angle AOB = \beta$ .  $OB = OE$  — радиусы шара,  $\angle BOD = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{\beta}{2}$ .

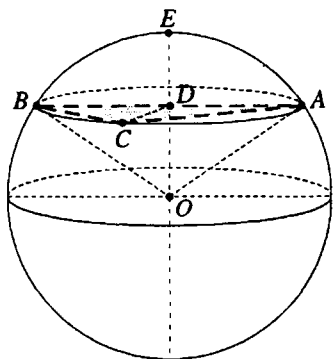


Рис. 12.193

Если  $AD = a$ , то  $AB = 2a, AC = 2a \cos \alpha$ ,

$$BC = 2a \sin \alpha, S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = a^2 \sin 2\alpha, a = \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}.$$

В  $\triangle BDO$  ( $\angle BDO = 90^\circ$ ):

$$OD = BD \operatorname{ctg} \angle BOD = \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2};$$

$$OB = \frac{BD}{\sin \angle BOD} = \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

$$ED = OE - OD = \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} - \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \cdot \frac{1 - \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}.$$

*Ответ:*  $\sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}$ .

**12.333.** Основанием прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ) служит равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ), у которого периметр равен  $2p$ , а угол при вершине  $A$  равен  $\alpha$ . Через сторону  $BC$  и вершину  $A_1$  проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол  $\beta$ . Найти объем призмы.

*Решение.*

Пусть  $AD$  — высота  $\triangle ABC$  (рис. 12.194). Тогда  $\angle A_1DA$  — угол наклона сечения  $BA_1C$  к плоскости основания,  $\angle A_1DA = \beta$ .

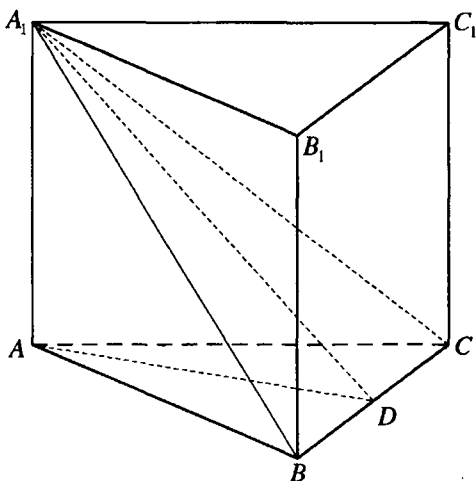


Рис. 12.194

$$\text{В } \triangle ADB \left( \angle ADB = \frac{\pi}{2} \right) : BD = AB \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Тогда } BC = 2AB \sin \frac{\alpha}{2}; 2p = 2AB + 2AB \sin \frac{\alpha}{2}; AB = AC = \frac{p}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB^2 \sin \alpha = \frac{p^2 \sin \alpha}{2 \left( 1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2}. \text{ В } \triangle ADB : AD = AB \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{p \cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{В } \triangle A_1AD \left( \angle A_1AD = \frac{\pi}{2} \right) : AA_1 = AD \operatorname{tg} \beta = \frac{p \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Объем призмы:

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{p^3 \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{2 \left( 1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right)^3} = \frac{p^3 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{\left( 1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right)^3} =$$

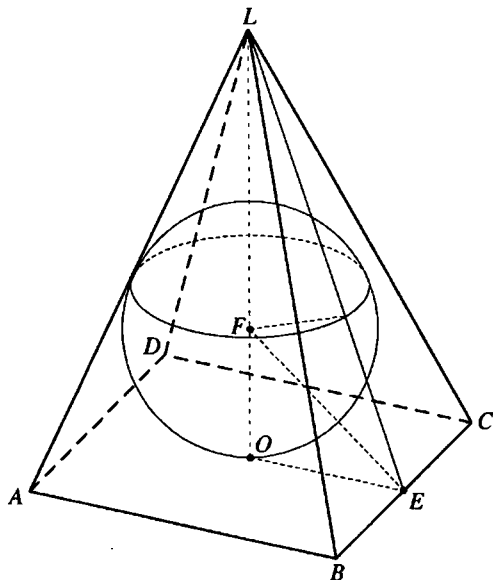


Рис. 12.195

$$\begin{aligned}
 &= \frac{p^3 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^3 \cos \frac{\alpha}{2}} = p^3 \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \left( \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} \right)^3 = \\
 &= p^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\pi - \alpha}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $p^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\pi - \alpha}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ .

**12.334.** В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно  $a$ , а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен  $\alpha$ . Найти полную поверхность пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $LO$  — высота правильной пирамиды  $LABCD$ ,  $E$  — середина  $BC$  (рис. 12.195). Тогда  $\angle MEO = \alpha$ , центр  $F$  вписанного шара принадлежит отрезку  $LO$ ,  $\angle OEF = \angle LEF = \frac{\alpha}{2}$ .  $\angle LFE$  — внешний угол треуголь-

ника  $FOE$ ,  $\angle LFE = \angle FOE + \angle OEF = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ .

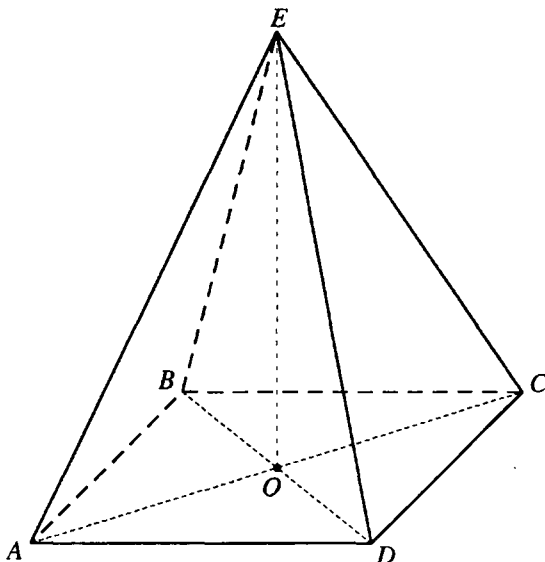


Рис. 12.196

В  $\triangle LFE$ :

$$\frac{LF}{\sin \angle LEF} = \frac{LE}{\sin \angle LFE} \Rightarrow LE = \frac{LF \sin \angle LFE}{\sin \angle LEF} = \frac{a \sin \left( 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} = a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

В  $\triangle LOE$  ( $\angle LOE = 90^\circ$ ):  $OE = LE \cos \angle LEO = a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos \alpha$ .

Сторона основания пирамиды  $AB = 2 \cdot OE = 2a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos \alpha$ , площадь

ее основания  $S_{\text{осн}} = AB^2 = 4a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \alpha$ .

Полная поверхность пирамиды:

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{осн}} + S_{\text{б}} = S_{\text{осн}} + \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha} = S_{\text{осн}} \cdot \frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha} = 4a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \alpha \cdot \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} = \\ &= 8a^2 \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Ответ:  $8a^2 \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$ .

**12.335.** Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен  $\alpha$ . Около этой пирамиды описан шар радиуса  $R$ . Найти объем пирамиды, если все ее боковые ребра образуют с основанием угол  $\beta$ .

*Решение.*

Пусть  $EO$  — высота пирамиды  $EABCD$ , прямоугольник  $ABCD$  — ее основание (рис. 12.196). Так как все боковые ребра образуют с плоскостью основания один и тот же угол, то точка  $O$  — центр окружности, описанной около прямоугольника  $ABCD$ , — точка пересечения его диагоналей, и центр шара, описанного около пирамиды, принадлежит лучу  $EO$ ,  $\triangle AEC$  вписан в большой круг шара. Тогда  $AC = 2R \sin \angle AEC = 2R \sin(180^\circ - \beta) = 2R \sin \beta$ ,  $OA = R \sin 2\beta$ .

Площадь основания пирамиды  $S = \frac{1}{2} AC^2 \sin \alpha = 2R^2 \sin^2 2\beta \sin \alpha$ .

Из  $\triangle AOE$  ( $\angle AOE = 90^\circ$ ):  $EO = AO \operatorname{tg} \angle EAO = R \sin 2\beta \operatorname{tg} \beta$ .

Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot EO = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 2\beta \sin \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3} R^3 \sin^2 2\beta \sin^2 \beta \sin \alpha.$$

*Ответ:*  $\frac{4}{3} R^3 \sin^2 2\beta \sin^2 \beta \sin \alpha$ .

**12.336.** Образующая конуса равна  $l$  и составляет с высотой угол  $\alpha$ . Через две образующие конуса, угол между которыми равен  $\beta$ , проведена плоскость. Найти расстояние от этой плоскости до центра шара, вписанного в конус.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота данного конуса,  $\triangle ASB$  — сечение конуса,  $\angle ASO = \alpha$ ,  $AS = l$ ,  $\angle ASB = \beta$ , центр  $O_1$  вписанного шара принадлежит отрезку  $SO$  (рис. 12.197).

$C$  — середина  $AB$ . Тогда  $OC \perp AB$ ,  $SC \perp AB$ . Тогда прямая  $AB$  перпендикулярна плоскости  $SCO$  и плоскости  $SCO$  и  $ASB$  перпендикулярны,  $SC$  — линия их пересечения.

В плоскости  $SCO$  — проведем перпендикуляр  $O_1D$  на  $SC$ . Тогда отрезок  $O_1D$  перпендикулярен плоскости  $ASB$  и его длина — искомое расстояние.

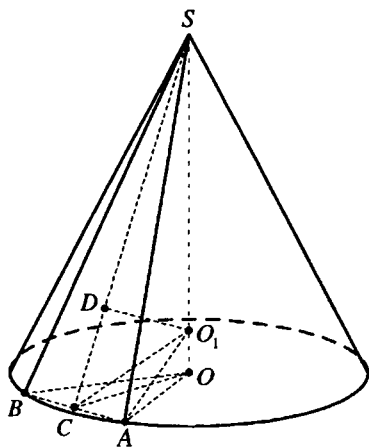


Рис. 12.197

$$\text{В } \triangle SOA \left( \angle SOA = \frac{\pi}{2} \right): AO = l \sin \alpha; SO = l \cos \alpha.$$

$$\text{В } \triangle SCA \left( \angle SCA = \frac{\pi}{2} \right): AC = l \sin \frac{\beta}{2}; SC = l \cos \frac{\beta}{2}.$$

$$\text{В } \triangle ACO \left( \angle ACO = \frac{\pi}{2} \right):$$

$$\begin{aligned} CO &= \sqrt{AO^2 - AC^2} = \sqrt{l^2 \sin^2 \alpha - l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} = l \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos \beta}{2}} = \\ &= l \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos 2\alpha}{2}} = l \sqrt{\sin \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) \sin \left( \alpha - \frac{\beta}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Так как шар, вписанный в конус, касается сторон угла  $SAO$ , то

$$AO_1 \text{ — биссектриса этого угла, } \angle OAO_1 = \frac{1}{2} \angle SAO = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{В } \triangle AOO_1 \left( \angle AOO_1 = \frac{\pi}{2} \right): OO_1 = AO \operatorname{tg} \angle OAO_1 = l \sin \alpha \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$SO_1 = SO - OO_1 = l \cos \alpha - l \sin \alpha \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= l \cdot \frac{\cos \alpha \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \alpha \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)} = l \cdot \frac{\cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)} = l \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$$

$\triangle SDO_1 \sim \triangle SOC$  — по двум углам.

$$\text{Тогда } \frac{SC}{SO_1} = \frac{OC}{DO_1};$$

$$O_1D = \frac{SO_1 \cdot OC}{SC} = \frac{l \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot l \sqrt{\sin \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) \sin \left( \alpha - \frac{\beta}{2} \right)}}{l \cos \frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{l \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\sin \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) \sin \left( \alpha - \frac{\beta}{2} \right)}}{\cos \frac{\beta}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{l \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\sin \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) \sin \left( \alpha - \frac{\beta}{2} \right)}}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

12.337. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого площадь равна  $S$ , а угол между боковыми сторонами равен  $\alpha$ . Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол. Найти этот угол, если объем пирамиды равен  $V$ .

*Решение.*

Пусть  $DO$  — высота пирамиды  $DABC$ ,  $AB = AC$ ,  $\angle BAC = \alpha$  (рис. 12.198). Так как  $\angle DAO = \angle DBO = \angle DCO$ , то  $O$  — центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

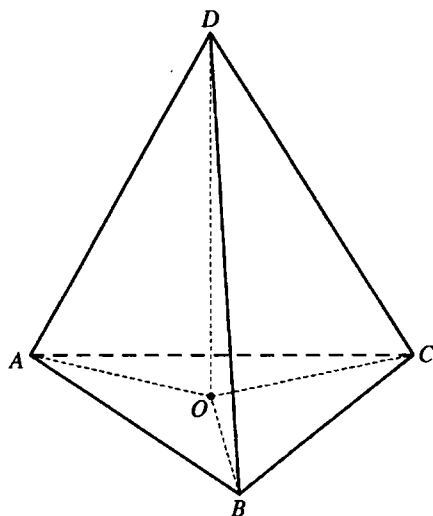


Рис. 12.198

Если радиус этой окружности

равен  $R$ , то  $AB = 2R \sin \angle ACB = 2R \sin \left( 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2R \cos \frac{\alpha}{2}$ .

$$S = \frac{1}{2} AB^2 \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha; R = \frac{\sqrt{2S}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \alpha}}$$

Пусть  $H$  — высота пирамиды. Так как  $V = \frac{1}{3} SH$ , то  $H = \frac{3V}{S}$ .

В  $\triangle AOD$  ( $\angle AOD = 90^\circ$ ):

$$\operatorname{tg} \angle EAO = \frac{DO}{OA} = \frac{H}{R} = \frac{3V}{S} \cdot \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \alpha}}{\sqrt{2S}} = \frac{3V \cos \frac{\alpha}{2}}{S} \sqrt{\frac{2 \sin \alpha}{S}}$$

$$\text{Ответ: } \arctg \frac{3V \cos \frac{\alpha}{2}}{S} \sqrt{\frac{2 \sin \alpha}{S}}$$



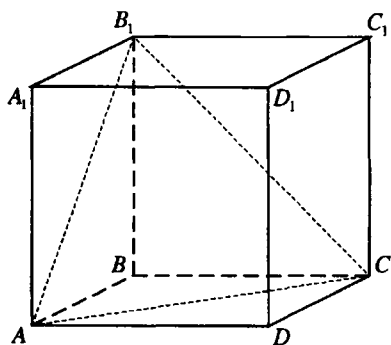


Рис. 12.199

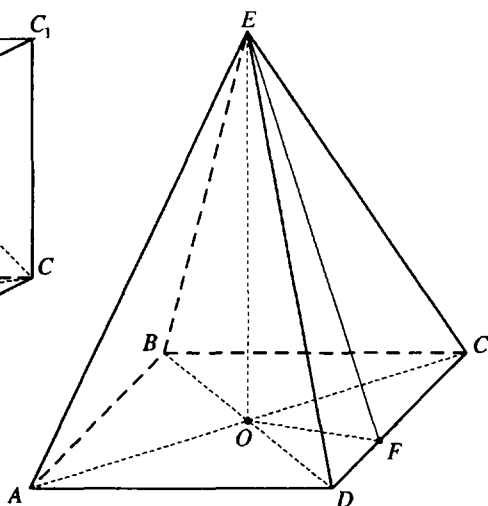


Рис. 12.200

**12.338.** Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна  $a$ , ее объем равен  $V$ . Найти косинус угла между диагоналями двух смежных боковых граней.

*Решение.*

$$\begin{aligned} \text{Боковое ребро призмы (рис. 12.199) } BB_1 &= \frac{V}{S_{\text{осн.}}} = \frac{V}{a^2} \Rightarrow AB_1^2 = B_1C^2 = \\ &= \frac{V^2}{a^4} + a^2 = \frac{V^2 + a^6}{a^4}. \end{aligned}$$

В  $\triangle AB_1C$ :

$$AC^2 = AB_1^2 + B_1C^2 - 2AB_1 \cdot B_1C \cos \angle AB_1C;$$

$$(a\sqrt{2})^2 = 2AB_1^2 - 2AB_1^2 \cos \angle AB_1C;$$

$$2a^2 = 2 \cdot \frac{V^2 + a^6}{a^4} - 2 \cdot \frac{V^2 + a^6}{a^4} \cos \angle AB_1C;$$

$$a^6 = V^2 + a^6 - (V^2 + a^6) \cos \angle AB_1C;$$

$$\cos \angle AB_1C = \frac{V^2}{V^2 + a^6}.$$

*Ответ:*  $\frac{V^2}{V^2 + a^6}.$

12.339. Острый угол ромба, лежащего в основании четырехугольной пирамиды, равен  $\alpha$ . Отношение полной поверхности пирамиды к квадрату стороны основания равно  $k$ . Найти синус угла между апофемой и высотой пирамиды, если все ее боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. Каковы допустимые значения  $k$ ?

*Решение.*

Если  $EO$  — высота пирамиды  $EABCD$  (рис. 12.200),  $EF$  — высота ее боковой грани  $CED$ , то  $\angle EFO$  — угол наклона этой боковой грани к плоскости основания и, так как все боковые грани одинаково к ней наклонены, то  $O$  — центр окружности, вписанной в основание пирамиды, — точка пересечения диагоналей ромба,  $S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \beta}$ , где  $\beta = \angle EFO$ .

Пусть  $AB = a$ . Тогда  $S_{\text{осн}} = a^2 \sin \alpha$  и полная поверхность пирамиды  $S = S_{\text{осн}} + S_6 = S_{\text{осн}} + \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \beta} = S_{\text{осн}} \cdot \frac{1 + \cos \beta}{\cos \beta} = \frac{a^2 (1 + \cos \beta) \sin \alpha}{\cos \beta} \Rightarrow k = \frac{S}{a^2} = \frac{(1 + \cos \beta) \sin \alpha}{\cos \beta} \Leftrightarrow k \cos \beta = \sin \alpha + \cos \beta \sin \alpha; \cos \beta = \frac{\sin \alpha}{k - \sin \alpha}$ .

В  $\triangle EOF$  ( $\angle EOF = 90^\circ$ ) искомый  $\sin \angle OEF = \cos \angle EFO = \frac{\sin \alpha}{k - \sin \alpha}$ .

Так как  $\frac{\sin \alpha}{k - \sin \alpha} < 1$ , то  $\sin \alpha < k - \sin \alpha$ , т.е.  $k > 2 \sin \alpha$ .

*Ответ:*  $\frac{\sin \alpha}{k - \sin \alpha}; k > 2 \sin \alpha$ .

12.340. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна  $a$ , плоский угол при вершине пирамиды равен  $\alpha$ . Найти расстояние от центра основания пирамиды до ее бокового ребра.

*Решение.*

Пусть  $EO$  — высота правильной пирамиды  $EABCD$  (рис. 12.201),  $OF$  — расстояние от точки  $O$  до бокового ребра  $EC$ ,  $\angle ECO = \beta$ . Так как

$$\angle CED = \alpha, \text{ то } \angle ECD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

$OC$  — проекция  $EC$  на плоскость основания пирамиды,  $CD$  — прямая, лежащая в этой плоскости.

Тогда  $\cos \angle ECD = \cos \angle ECO \cdot \cos \angle OCD$ ;

$$\cos \left( 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \beta \cdot \cos 45^\circ \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

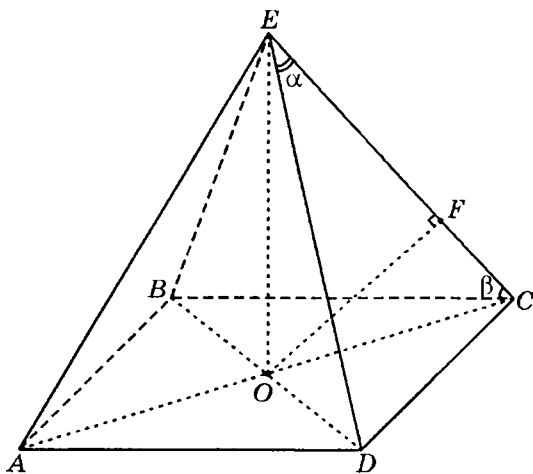


Рис. 12.201

В  $\triangle OFC$  ( $\angle OFC = 90^\circ$ ):

$$OF = OC \cdot \sin \beta = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \sqrt{2 \cos \alpha}.$$

Ответ:  $\frac{a}{2} \sqrt{2 \cos \alpha}$ .

**12.341.** Отношение площади диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды к площади ее основания равно  $k$ . Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $EO$  — высота правильной пирамиды  $EABCD$  (рис. 12.202), площадь основания пирамиды  $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} BD^2 = 2 \cdot OD^2$ .

$$S_{\triangle BED} = \frac{1}{2} BD \cdot EO = OD \cdot EO.$$

$$\text{Тогда } k = \frac{S_{\triangle BED}}{S_{\text{осн}}} = \frac{OD \cdot EO}{2 \cdot OD^2} = \frac{EO}{2 \cdot OD}; \quad \frac{EO}{OD} = 2k.$$

Пусть  $\angle DEO = \angle CEO = \alpha$ ,  $\angle CED = \beta$ .

$$\text{Из } \triangle EOD (\angle EOD = 90^\circ): \operatorname{tg} \angle DEO = \frac{OD}{EO} = \frac{1}{2k}.$$

$EO$  — проекция  $ED$  на плоскость  $AEC$ ,  $EC$  — прямая, лежащая в этой плоскости.

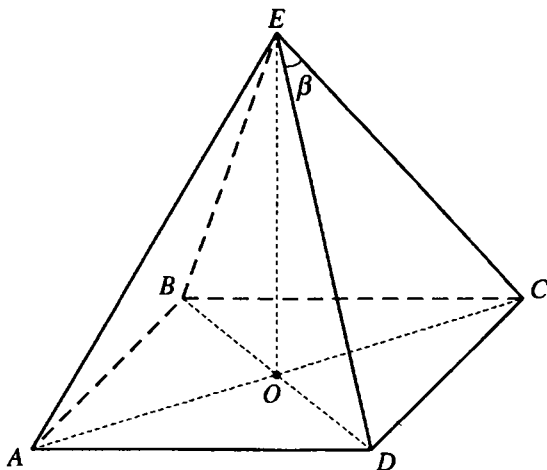


Рис. 12.202

Тогда  $\cos \angle CED = \cos \angle DEO \cdot \cos \angle OEC$ ;

$$\cos \beta = \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4k^2}} = \frac{4k^2}{4k^2 + 1}.$$

Ответ:  $\frac{4k^2}{4k^2 + 1}$ .

**12.342.** Расстояние от стороны основания правильной треугольной пирамиды до непересекающего ее ребра в два раза меньше стороны основания. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABC$ ,  $E$  — середина  $AC$  (рис. 12.203).

Тогда  $SE \perp AC$ ,  $BE \perp AC$ ,  $\angle SEB$  — искомый угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды, прямая  $AC$  перпендикулярна плоскости  $SEB$ .

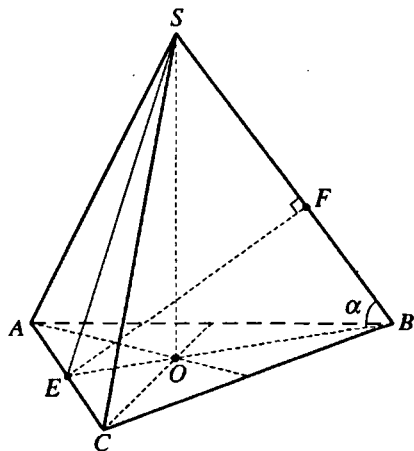


Рис. 12.203

Проведем в плоскости  $SEB$  перпендикуляр  $EF$  на  $SB$  (если  $\angle ESB < 90^\circ$ , то  $F$  лежит на отрезке  $SB$ , если  $\angle ESB > 90^\circ$ , то  $F$  лежит на продолжении отрезка  $SB$  за точку  $S$ ).

Тогда  $EF \perp SB$ ,  $EF \perp AC$  и длина отрезка  $EF$  — это расстояние между скрещивающимися прямыми  $SB$  и  $AC$ .

$$\text{Если } AC = a, \text{ то } EF = \frac{a}{2}, EB = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть  $\angle SEO = \beta, \angle SBO = \alpha$ .

В  $\triangle SOE$  ( $\angle SOE = 90^\circ$ ):  $SO = EO \cdot \operatorname{tg} \beta$ .

В  $\triangle SOB$  ( $\angle SOB = 90^\circ$ ):  $SO = OB \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .

Так как  $OB = 2 \cdot OE$ , то  $\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha$ .

Из  $\triangle EFB$  ( $\angle EFB = 90^\circ$ ):

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{EF}{EB} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}}} = \sqrt{2}; \beta = \operatorname{arctg} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$ .

**12.343.** Линейный угол двугранного угла, составленного двумя смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, в два раза больше плоского угла при вершине пирамиды. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABCD$  (рис. 12.204),  $\angle BED$  — линейный угол двугранного угла между смежными боковыми

гранями  $BSC$  и  $DSC$ . Тогда  $DE \perp SC, EO \perp BD, \angle OED = \frac{1}{2} \angle BED$ .

Если  $F$  — середина  $CD$ , то  $SF \perp CD, \angle DSF = \frac{1}{2} \angle DSC$ .

Пусть  $SD = a, \angle DSC = \alpha$ . Тогда  $\angle BED = 2\alpha, \angle OED = \alpha$ .

В  $\triangle DFS$  ( $\angle DFS = 90^\circ$ ):  $DF = a \sin \frac{\alpha}{2}$ , а из  $\triangle DES$  ( $\angle DES = 90^\circ$ ):  $DE = a \sin \alpha$ .

В  $\triangle EOD$  ( $\angle EOD = 90^\circ$ ):  $OD = DE \sin \alpha = a \sin^2 \alpha$ .

Так как  $ABCD$  — квадрат, то  $OD = DF \sqrt{2} \Rightarrow$

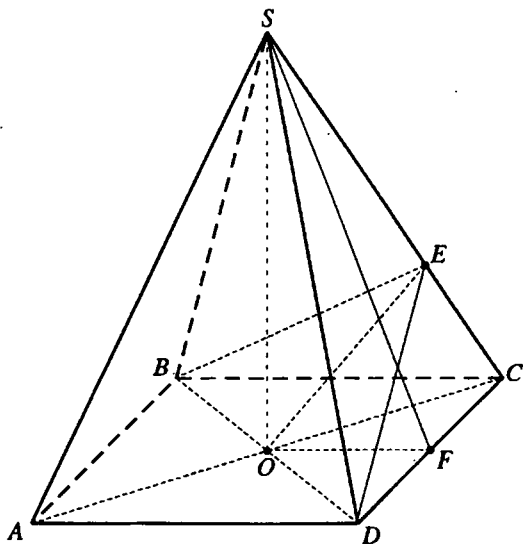


Рис. 12.204

$$\begin{aligned} \Rightarrow a \sin^2 \alpha &= a\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin^4 \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \alpha) = 1 - \cos \alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) = 1 - \cos \alpha. \end{aligned}$$

Так как  $\cos \alpha \neq 1$ , то  $(1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos \alpha) = 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} 1 + \cos \alpha - \cos^2 \alpha - \cos^3 \alpha &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^3 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Так как  $0 < \cos \alpha < 1$ , то  $\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$ ;

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \\ \alpha &= \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .

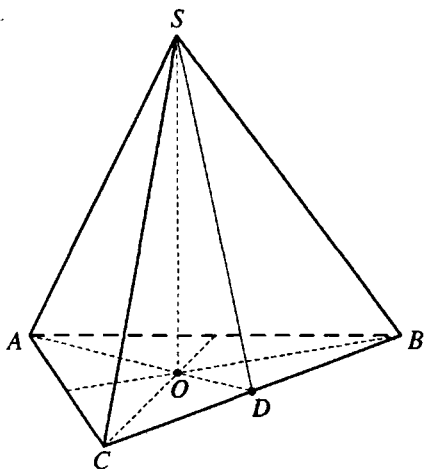


Рис. 12.205

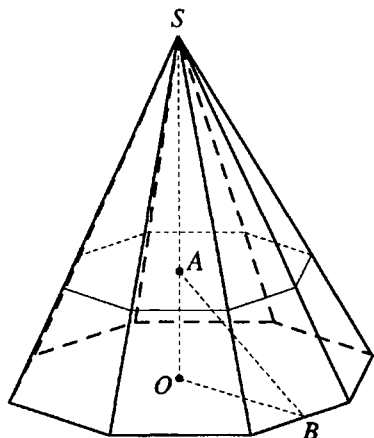


Рис. 12.206

**12.344.** В правильной треугольной пирамиде сумма углов, образованных апофемой пирамиды с плоскостью основания и боковым ребром с той же плоскостью, равна  $\frac{\pi}{4}$ . Найти эти углы.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABC$  (рис. 12.205),  $D$  — середина  $BC$ .  $\angle SCO = \alpha$ ,  $\angle SDO = \beta$ . По условию  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ .

В  $\triangle SOC$  ( $\angle SOC = \frac{\pi}{2}$ ):  $SO = OC \cdot \operatorname{tg} \alpha$ . В  $\triangle SOD$  ( $\angle SOD = \frac{\pi}{2}$ ):  $SO = OD \cdot \operatorname{tg} \beta$ .

Тогда  $OC \cdot \operatorname{tg} \alpha = OD \cdot \operatorname{tg} \beta$  и, так как  $OC = 2 \cdot OD$ , то  $\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha$ .

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Так как  $\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\alpha$  — острый угол, то получаем:

$$\frac{3 \operatorname{tg} \alpha}{1 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1; 2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{17} - 3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17} - 3}{4}, \beta = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17} - 3}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \arctg \frac{\sqrt{17}-3}{4}, \frac{\pi}{4} - \arctg \frac{\sqrt{17}-3}{4}.$$

**12.345.** Объем правильной пирамиды равен  $V$ . Через центр вписанного в пирамиду шара проведена плоскость, параллельная ее основанию. Найти объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды этой плоскостью, если двугранный угол при основании равен  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота данной правильной пирамиды,  $SB$  — ее апофема,  $A$  — центр вписанного шара (рис. 12.206).

$$\text{Тогда } \angle SBO = \alpha, \angle OBA = \frac{\alpha}{2}.$$

Так как отсекаемая пирамиды, подобна данной, то  $\frac{V_1}{V} = \left(\frac{SA}{SO}\right)^3$ , где  $V_1$  — искомый объем.

$$\text{В } \triangle SOB (\angle SOB = 90^\circ): SO = OB \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{В } \triangle AOB (\angle AOB = 90^\circ): OA = OB \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$SA = SO - OA = OB \left( \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) = OB \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{OB \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V} = \left( \frac{OB \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} : OB \operatorname{tg} \alpha \right)^3 = \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha} \right)^3 = \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}}{8 \sin^3 \frac{\alpha}{2} \cos^3 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{1}{8 \cos^6 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow V_1 = \frac{V}{8 \cos^6 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{V}{8 \cos^6 \frac{\alpha}{2}}.$$

**12.346.** Найти углы прямоугольного треугольника, если объем тела, полученного от вращения треугольника вокруг меньшего катета, равен сумме объемов тел, полученных от вращения треугольника вокруг его гипотенузы и вокруг большего катета.

*Решение.*

В  $\triangle ABC$  (рис. 12.207, а)  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC > AC$ .



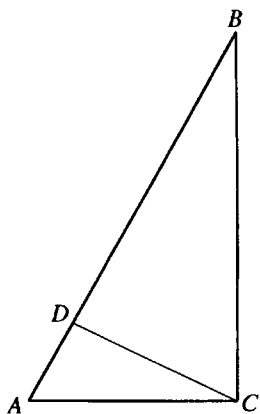


Рис. 12.207,а

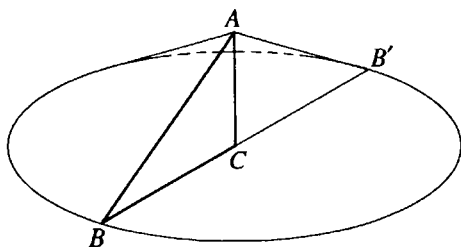


Рис. 12.207,б

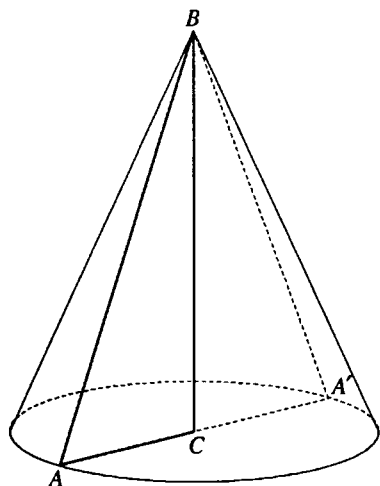


Рис. 12.207,в

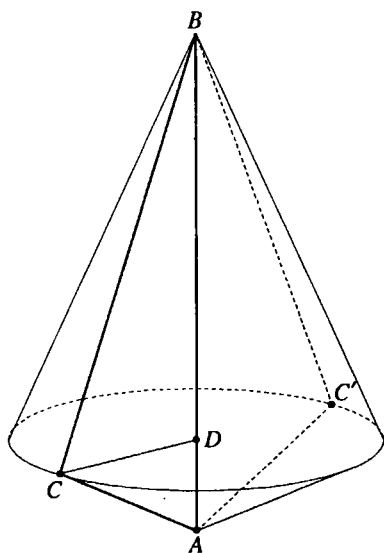


Рис. 12.207,г

Если  $AB = 1$ ,  $\angle BAC = \alpha$ , то  $BC = \sin \alpha$ ,  $AC = \cos \alpha$ .

При вращении треугольника вокруг меньшего катета  $AC$  получим

конус (рис. 12.207, б) объем которого  $V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot BC^2 \cdot AC = \frac{1}{3} \pi \sin^2 \alpha \cos \alpha$ .

При вращении треугольника вокруг большего катета  $BC$  получим конус

(рис. 12.207, в), объем которого  $V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot AC^2 \cdot BC = \frac{1}{3} \pi \sin \alpha \cos^2 \alpha$ .

Высота данного треугольника, опущенная на гипотенузу,  $CD = AC \sin \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$ .

При вращении треугольника  $ABC$  вокруг гипотенузы  $AB$  получим тело, состоящее из двух конусов с общим основанием радиуса  $CD$  и

высотами  $BD$  и  $AD$  (рис. 12.208, г). Объем этого тела  $V_3 = \frac{1}{3} \pi \cdot CD^2 \cdot BD +$

$$+ \frac{1}{3} \pi \cdot CD^2 \cdot AD = \frac{1}{3} \pi \cdot CD^2 (BD + AD) = \frac{1}{3} \pi \cdot CD^2 \cdot AB = \frac{1}{2} \pi \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

По условию  $V_1 = V_2 + V_3$ , следовательно,

$$\frac{1}{3} \pi \sin^2 \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3} \pi \sin \alpha \cos^2 \alpha + \frac{1}{3} \pi \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha; \sin^2 2\alpha + 4 \sin 2\alpha - 1 = 0; \sin 2\alpha = -2 + 2\sqrt{2}$$

или  $\sin 2\alpha = -2 - 2\sqrt{2}$ .

$$-2 - 2\sqrt{2} < -1 \Rightarrow 2\alpha = \arcsin(2\sqrt{2} - 2);$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin(2(\sqrt{2} - 1)).$$

*Ответ:*  $\frac{1}{2} \arcsin(2(\sqrt{2} - 1)); 90^\circ - \frac{1}{2} \arcsin(2(\sqrt{2} - 1))$ .

**12.347.** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна  $a$ , ее боковая поверхность равна  $S$ . Найти угол между смежными боковыми гранями.

*Решение.*

Пусть  $EO$  — высота правильной пирамиды  $EABCD$  (рис. 12.208),  $BD \perp AC, BD \perp EO \Rightarrow BD \perp \text{пл. } AEC \text{ } BD \perp EC$ .

Проведем в грани  $DEC$  перпендикуляр  $DK$  на  $EC \Rightarrow \text{пл. } BKD \perp EC$  и  $\angle BKD$  — угол между смежными гранями  $CED$  и  $CEB$ .

$BK = DK$ , как высоты боковых граней правильной пирамиды  $\Rightarrow KO$  — высота, медиана и биссектриса  $\triangle BKD$ .

Если  $\angle BKD = 2\alpha$ , то  $\angle DKO = \alpha$ .

$$\text{В } \triangle KOD (\angle KOD = 90^\circ): DK = \frac{DO}{\sin \angle DKO} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin \alpha}.$$

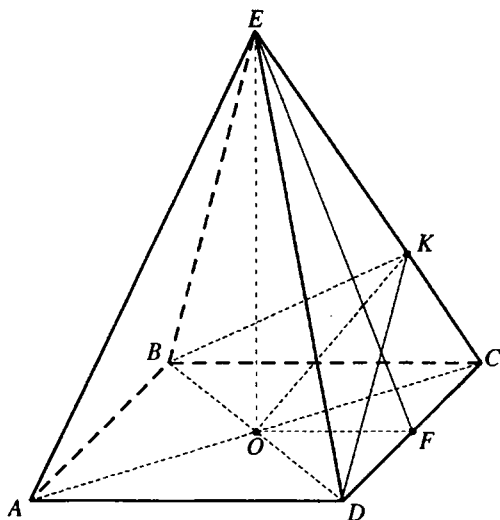


Рис. 12.208

$$S_{\triangle CED} = \frac{1}{4} S = \frac{1}{2} EC \cdot DK \Rightarrow EC = \frac{\frac{S}{2}}{DK} = \frac{S \sin \alpha}{a\sqrt{2}}.$$

Если  $F$  — середина  $CD$ , то из  $\triangle EFC$  ( $\angle EFC = 90^\circ$ ):

$$EF = \sqrt{EC^2 - FC^2} = \sqrt{\frac{S^2 \sin^2 \alpha}{2a^2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2S^2 \sin^2 \alpha - a^4}}{2a}.$$

$$S_{\triangle CED} = EF \cdot FC.$$

Таким образом

$$\frac{\sqrt{2S^2 \sin^2 \alpha - a^4}}{2a} \cdot \frac{a}{2} = \frac{S}{4} \Rightarrow 2S^2 \sin^2 \alpha - a^4 = S^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S^2 (1 - 2 \sin^2 \alpha) = -a^4 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = -\frac{a^4}{S^2};$$

$$2\alpha = \arccos\left(-\frac{a^4}{S^2}\right).$$

$$\text{Ответ: } \arccos\left(-\frac{a^4}{S^2}\right).$$

**12.348.** Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна  $a$ , плоский угол при вершине пирамиды равен  $\alpha$ . Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

*Решение.*

Пусть  $EO_2$  — высота правильной пирамиды  $EABC$  (рис. 12.209),  $ED$  — апофема ее боковой грани  $BEC$ . Тогда

$\angle BED = \frac{1}{2} \angle BEC = \frac{\alpha}{2}$ . Так как

пирамида правильная, то центр  $O_1$  вписанного шара лежит на высоте

$EO_2$ . Если  $\angle EDO_2 = \gamma$ , то  $\angle O_1DO_2 =$

$= \frac{\gamma}{2}$ , а из  $\triangle O_1O_2D$  ( $\angle O_1O_2D = \frac{\pi}{2}$ ) ра-

диус вписанного шара  $r = O_2O_1 =$

$$= O_2D \operatorname{tg} \angle O_1DO_2 = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

$$\text{В } \triangle EDB \left( \angle EDB = \frac{\pi}{2} \right): ED = BD \operatorname{ctg} \angle BED = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{В } \triangle EOD \left( \angle EOD = \frac{\pi}{2} \right): ED = \frac{OD}{\cos \angle EDO} = \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos \gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos \gamma}; \cos \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma}} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{a}{6} \sqrt{\frac{3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a}{6} \sqrt{\frac{3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

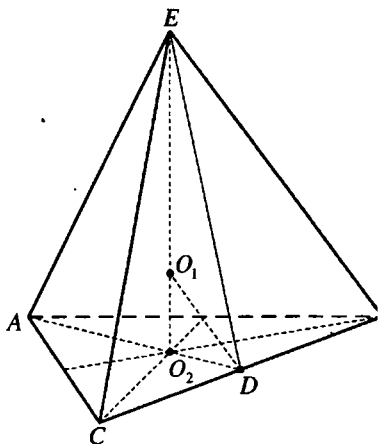


Рис. 12.209

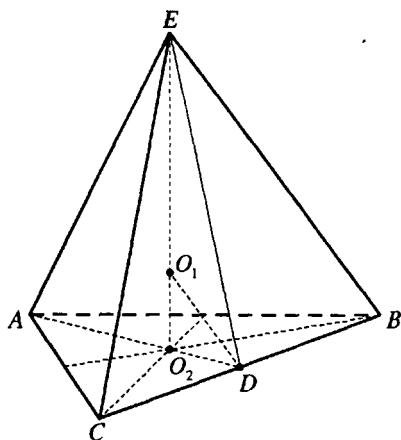


Рис. 12.210

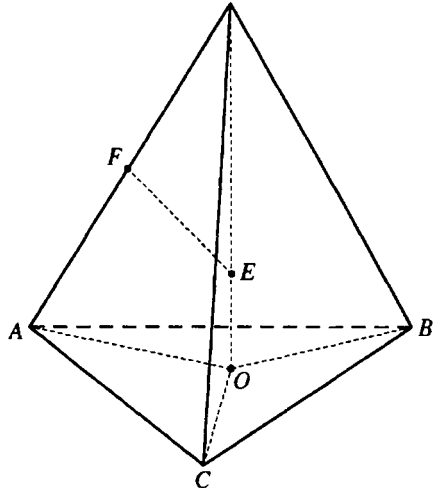


Рис. 12.211

**12.349.** Радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, в четыре раза меньше стороны основания пирамиды. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $EO_2$  — высота правильной пирамиды  $EABC$  (рис. 12.210),

$ED$  — апофема ее боковой грани  $BEC$ . Если  $\angle BEC = \alpha$ , то  $\angle DEC = \frac{\alpha}{2}$ .

Так как пирамида правильная, то центр  $O_1$  вписанного шара лежит на ее высоте  $EO_2$ ,  $O_1O_2$  — радиус шара. Если  $BC = a$ ,  $\angle O_2DO_1 = \beta$ , то

$$O_2D = \frac{a\sqrt{3}}{6}; O_1O_2 = \frac{a}{4}, \text{ из } \Delta O_1O_2D (\angle O_1O_2D = 90^\circ):$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{O_1O_2}{O_2D} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\angle EDO_2 = 2\angle O_1DO_2 = 2\beta; \cos 2\beta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{1}{7}.$$

$$\text{В } \Delta EO_2D (\angle EO_2D = 90^\circ): ED = \frac{O_2D}{\cos \angle EDO_2} = \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos 2\beta} = \frac{7a\sqrt{3}}{6}.$$

В  $\Delta EDC (\angle EDC = 90^\circ)$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{CD}{ED} = \frac{a}{2} : \frac{7a\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{7} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \frac{3}{49}}{1 + \frac{3}{49}} = \frac{23}{26}.$$

Ответ:  $\frac{23}{26}$ .

12.350. Боковые ребра и две стороны основания треугольной пирамиды имеют одну и ту же длину  $a$ , а угол между равными сторонами основания равен  $\alpha$ . Найти радиус описанного шара.

Решение.

Пусть  $DO$  — высота пирамиды  $DABC$ ,  $DA = DB = DC = BA = BC = a$  (рис. 12.211). Тогда точка  $O$  — центр окружности, описанной около основания пирамиды, точки прямой  $DO$  равноудалены от вершин  $\triangle ABC$ . Радиус этой окружности  $OA = R_1 = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{a}{2 \sin \left( \frac{\pi - \alpha}{2} \right)} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$ .

В  $\triangle AOD$  ( $\angle AOD = \frac{\pi}{2}$ ):

$$DO = \sqrt{DA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2} - \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{3}}{2}} =$$

$$= \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\cos \alpha - \cos \frac{2\pi}{3}}{2}} = \frac{a \sqrt{\sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2} \right)}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Центр  $E$  шара, описанного около пирамиды  $DABC$ , лежит на полупрямой  $DO$ .

Если  $F$  — середина  $DA$ , то  $EF \perp DA$  и  $\triangle EFD \sim \triangle AOD$ ,  $\frac{DO}{AD} = \frac{FD}{DE}$ .

Радиус описанного шара

$$R = DE = \frac{AD \cdot FD}{DO} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2} \right)}} =$$

$$= \frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sqrt{\sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2} \right)}}.$$

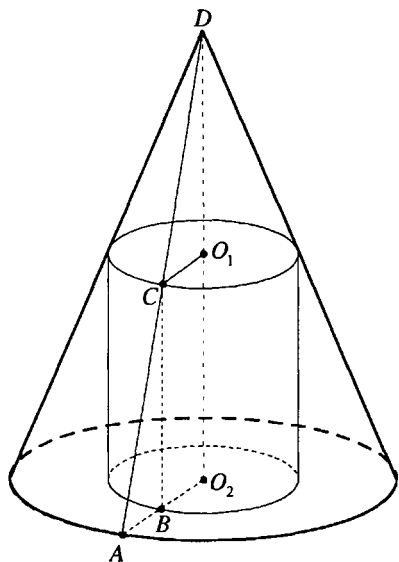


Рис. 12.212

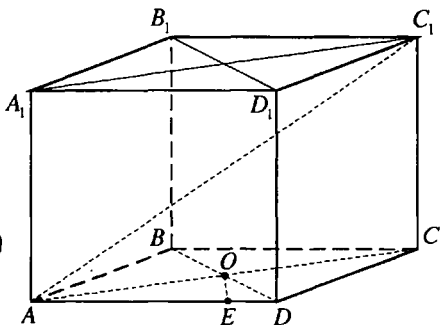


Рис. 12.213

Ответ: 
$$\frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sqrt{\sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2} \right)}}$$

**12.351.** В конус вписан цилиндр, высота которого равна диаметру основания конуса. Полная поверхность цилиндра равна площади основания конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

*Решение.*

Пусть  $DO_2$  — высота данного конуса,  $O_2$  — общий центр основания конуса и нижнего основания цилиндра,  $O_1$  — центр верхнего основания цилиндра,  $DA$  — образующая конуса,  $CB$  — образующая цилиндра,  $C$  — принадлежит  $DA$  (рис. 12.212),  $O_2B = r$ ,  $O_2A = R$ ,  $O_1O_2 = BC = H$ . По условию  $H = 2R$ .

Полная поверхность цилиндра  $S = 2\pi rH + 2\pi r^2 = 4\pi rR + 2\pi r^2$ .

По условию

$$4\pi rR + 2\pi r^2 = \pi R^2 \Rightarrow 2r^2 + 4rR - R^2 = 0; r = \frac{-2R \pm R\sqrt{6}}{2}.$$

Так как  $r > 0$ , то  $r = \frac{R(\sqrt{6}-2)}{2}$ .

$\angle DAO_2 = \alpha$  — искомый угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

Из  $\triangle ABC$  ( $\angle ABC = 90^\circ$ ):

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{O_2A - O_2B}{BC} = \frac{R-r}{H} = \frac{R - \frac{R(\sqrt{6}-2)}{2}}{2R} = \frac{1 - \frac{\sqrt{6}-2}{2}}{2} = \frac{4-\sqrt{6}}{4};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{4-\sqrt{6}} = \frac{4(4+\sqrt{6})}{(4-\sqrt{6})(4+\sqrt{6})} = \frac{4(4+\sqrt{6})}{10} = \frac{2(4+\sqrt{6})}{5};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2(4+\sqrt{6})}{5}.$$

*Ответ:*  $\operatorname{arctg} \frac{2(4+\sqrt{6})}{5}$ .

**12.352.** Около шара описана прямая призма, основанием которой служит ромб с острым углом  $\alpha$ . Найти угол между большей диагональю призмы и плоскостью основания.

*Решение.*

Ромб  $ABCD$  — основание прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  из условия,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  (рис. 12.213). Тогда  $AC_1$  — большая диагональ призмы, а  $\angle C_1AC$  — искомый угол.

Проекцией шара, вписанного в призму, на плоскость основания является круг, вписанный в ромб  $ABCD$ ,  $OE$  — радиус этого круга,  $E$  — точка касания круга со стороной  $AD$  ромба.

Если радиус шара равен  $R$ , то  $CC_1 = 2R$ ,  $OE = R$ .

$$\text{В } \triangle AEO \text{ (} \angle AEO = 90^\circ \text{): } AO = \frac{OE}{\sin \angle CAD} = \frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$AC = 2AO = \frac{2R}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{В } \triangle ACC_1 \text{ (} \angle ACC_1 = 90^\circ \text{): } \operatorname{tg} \angle C_1AC = \frac{CC_1}{AC} = \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$\angle C_1AC = \operatorname{arctg} \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

*Ответ:*  $\operatorname{arctg} \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right)$ .



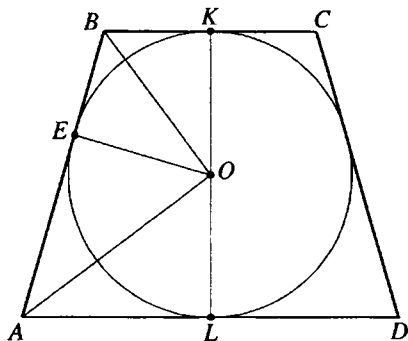


Рис. 12.214

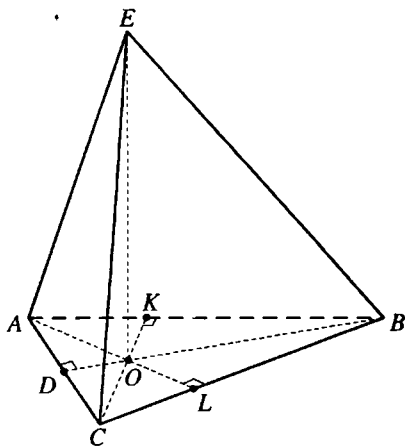


Рис. 12.215

**12.353.** В усеченный конус вписан шар, объем которого в два раза меньше объема конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

*Решение.*

Пусть равнобокая трапеция  $ABCD$  — осевое сечение данного усеченного конуса,  $O$  — центр шара, вписанного в него, — центр круга, вписанного в трапецию  $ABCD$ ;  $K, L, E$  — точки касания этого круга со сторонами  $BC, AD, AB$  трапеции (рис. 12.214). Тогда  $\angle BAD = \alpha$  — искомый угол,  $LA = R_1$  и  $KB = R_2$  — радиусы оснований усеченного конуса,  $OK = OL = OE = R$  — радиусы шара, высота конуса  $H = 2R = (R_1 - R_2) \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow R_1 - R_2 = 2R \operatorname{ctg} \alpha$ .

$AE = AL = R_1, BK = BE = R_2, \angle BOA = 90^\circ$ . Тогда  $R^2 = R_1 R_2$ . Объем усеченного конуса  $V_1 = \frac{1}{3} \pi H (R_1^2 R_1 R_2 - R_2^2) = \frac{2}{3} \pi R (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$ , объем

шара  $V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3$  и, по условию,  $V_1 = 2V_2$ .

Тогда

$$\frac{2}{3} \pi R (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) = \frac{8}{3} \pi R^3 \Leftrightarrow R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2 = 4R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R_1 - R_2)^2 + 3R_1 R_2 = 4R^2 \Rightarrow 4R^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 3R^2 = 4R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4R^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = R^2; \operatorname{tg}^2 \alpha = 4.$$

Так как  $\alpha$  — острый угол, то  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ ,  $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ .

Ответ:  $\operatorname{arctg} 2$ .

**12.354.** Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого основание равно  $a$ , а противолежащий угол равен  $\alpha$ . Боковое ребро пирамиды, проходящее через вершину данного угла, составляет с плоскостью основания угол  $\beta$ . Найти объем пирамиды, если высота пирамиды проходит через точку пересечения высот основания.

*Решение.*

Пусть  $EO$  — высота пирамиды  $EABC$ ,  $AB = BC$ ,  $AC = a$ ,  $\angle ABC = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,  $\angle EBO = \beta$ ,  $O$  — точка пересечения высот  $BD$ ,  $CK$ ,  $AL$  — основания (рис. 12.215).

Так как  $\triangle ABC$  остроугольный, то точка  $O$  лежит внутри треугольника, точки  $L$  и  $K$  лежат на отрезках  $BC$  и  $AB$ .

В  $\triangle ADB$  ( $\angle ADB = 90^\circ$ ):

$$AB = \frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}; BD = AD \operatorname{ctg} \angle ABD = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{В } \triangle ALB \text{ } (\angle ALB = 90^\circ): BL = AB \cos \angle ABC = \frac{a \cos \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{В } \triangle OLB \text{ } (\angle OLB = 90^\circ): BO = \frac{BL}{\cos \angle OBL} = \frac{a \cos \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = a \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\text{В } \triangle EOB \text{ } (\angle EOB = 90^\circ): EO = OB \operatorname{tg} \angle EBO = a \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

$$S_{\triangle ABC} = AD \cdot BD = \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot EO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot a \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{a^3}{12} \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^3}{12} \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

**12.355.** Площадь сегмента равна  $S$ , а дуга сегмента равна  $\alpha$  радианам. Этот сегмент вращается вокруг своей оси симметрии. Найти поверхность тела вращения.

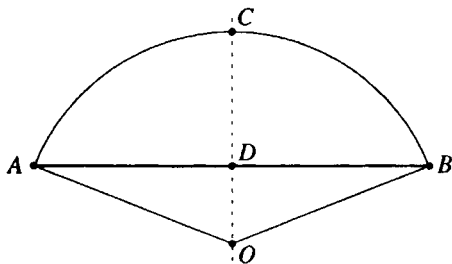


Рис. 12.216

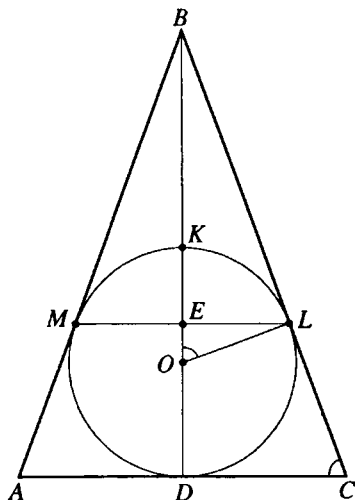


Рис. 12.217

*Решение.*

При вращении данного кругового сегмента (рис. 12.216) получится шаровой сегмент, поверхность которого  $S_1 = S_2 + S_3$ , где  $S_2$  — площадь его сферической поверхности,  $S_3$  — площадь круга радиуса  $DA$ .

$$S = S_{\text{сект } OACB} - S_{\Delta AOB} = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{R^2 \sin \alpha}{2} = \frac{R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha)$$

и  $R^2 = \frac{2S}{\alpha - \sin \alpha}$ , где  $R$  — радиус сегмента.

$S_2 = 2\pi RH$ , где  $H$  — высота сегмента,  $H = R - DO$ .

В  $\Delta ADO$  ( $\angle ADO = \frac{\pi}{2}$ ):

$$OD = OA \cos \angle AOD = R \cos \frac{\alpha}{2}; \quad AD = OA \sin \angle AOD = R \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$H = R - DO = R \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{4}.$$

Тогда

$$S_1 = 2\pi RH + \pi \cdot AD^2 = 2\pi R \cdot 2R \sin^2 \frac{\alpha}{4} + \pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{4} +$$

$$+ 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{4} = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{4} \left( 1 + \cos^2 \frac{\alpha}{4} \right) = \frac{8\pi S \sin^2 \frac{\alpha}{4} \left( 1 + \cos^2 \frac{\alpha}{4} \right)}{\alpha - \sin \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{8\pi S \sin^2 \frac{\alpha}{4} \left(1 + \cos^2 \frac{\alpha}{4}\right)}{\alpha - \sin \alpha}.$$

**12.356.** В конус вписан шар. Окружность касания шаровой и конической поверхностей делит поверхность шара в отношении 1:4. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел (рис. 12.217). Пусть радиус шара  $OL = R$ .  $\triangle OLB$  и  $\triangle CDB$  — прямоугольные с общим острым углом при вершине  $B$ . Значит,  $\angle BOL = \angle BCD = \alpha$ .

В  $\triangle OEL$  ( $\angle OEL = 90^\circ$ ):  $OE = R \cos \alpha$ .

Высота меньшего из шаровых сегментов  $KE = OK - OE = R - R \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha)$ .

Сферическая поверхность этого сегмента  $S_{\text{сегм}} = 2\pi R \cdot KE = 2\pi R^2 \times (1 - \cos \alpha)$ , поверхность шара  $S = 4\pi R^2$ .

Из условия получаем  $S_{\text{сегм}} : S = 1 : 5$ . Тогда

$$\frac{2\pi R^2(1 - \cos \alpha)}{4\pi R^2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}; \alpha = \arccos \frac{3}{5}.$$

*Ответ:*  $\arccos 0,6$ .

**12.357.** Боковая поверхность треугольной пирамиды равна  $S$ , а каждое из боковых ребер равно  $l$ . Найти плоские углы при вершине, зная, что они образуют арифметическую прогрессию с разностью  $\frac{\pi}{6}$ .

*Решение.*

Пусть средний по величине плоский угол равен  $\alpha$ . Тогда два других угла равны  $\alpha - \frac{\pi}{6}$  и  $\alpha + \frac{\pi}{6}$ .

Так как площади боковых граней равны

$\frac{1}{2}l^2 \sin(\alpha - \frac{\pi}{6})$ ,  $\frac{1}{2}l^2 \sin \alpha$  и  $\frac{1}{2}l^2 \sin(\alpha + \frac{\pi}{6})$ , то получим уравнение

$$\frac{1}{2}l^2 \sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}l^2 \sin \alpha + \frac{1}{2}l^2 \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = S, \text{ или } \sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) + \sin \alpha +$$

$$+ \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{2S}{l^2}. \text{ Но } \sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = 2 \sin \alpha \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \sin \alpha$$

$$\text{и, значит, } \sqrt{3} \sin \alpha + \sin \alpha = \frac{2S}{l^2}, \text{ откуда } \sin \alpha = \frac{2S}{(\sqrt{3} + 1)l^2} = \frac{S(\sqrt{3} - 1)}{l^2}.$$

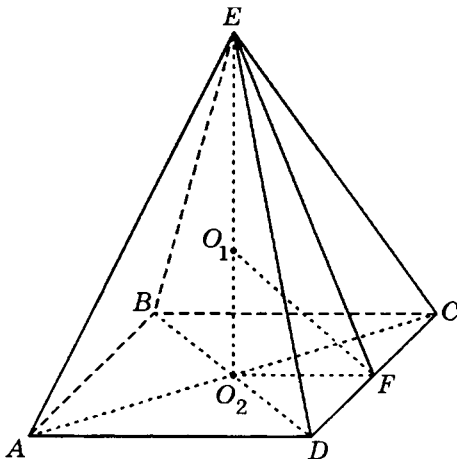


Рис. 12.218

Итак,  $\alpha = \arcsin \frac{S(\sqrt{3}-1)}{l^2}$ ,  $\alpha \pm \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{S(\sqrt{3}-1)}{l^2}$ .

Ответ:  $\arcsin \frac{S(\sqrt{3}-1)}{l^2}$ ;  $\pm \frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{S(\sqrt{3}-1)}{l^2}$ .

**12.358.** Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен  $\alpha$ . Найти боковую поверхность пирамиды, если радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен  $R$ .

*Решение.*

Пусть  $EO_2$  — высота правильной пирамиды  $EABCD$  (рис. 12.218), центр  $O_1$  вписанного шара лежит на отрезке  $EO_2$ ,  $O_1O_2 = R$ ,  $F$  — середина  $CD$ ,  $\angle EFO$  наклона боковой грани к плоскости основания пирамиды равен  $\beta$ . Тогда  $\angle O_1FO_2 = \frac{1}{2} \angle EFO_2 = \frac{\beta}{2}$ , а из  $\triangle O_1O_2F$  ( $\angle O_1O_2F = \frac{\pi}{2}$ )

находим  $O_2F = R \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$ , откуда  $DF = O_2F = R \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$ .

В  $\triangle DFE$  ( $\angle DFE = \frac{\pi}{2}$ ):  $EF = DF \operatorname{ctg} \angle DEF = R \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

Боковая поверхность пирамиды:

$$S = 4S_{\triangle CED} = 4 \cdot DF \cdot EF = 4R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

В  $\triangle EO_2F$  ( $\angle EO_2F = \frac{\pi}{2}$ ):  $O_2F = EF \cos \beta$ .

$$\text{В } \triangle DFE \left( \angle DFE = \frac{\pi}{2} \right): DF = EF \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Тогда } \cos \beta = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 4R^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\text{Ответ: } 4R^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right).$$

**12.359.** Радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, равен апофеме пирамиды. Найти угол между апофемой и плоскостью основания пирамиды.

*Решение.*

Рассмотрим правильную пирамиду  $DABC$  (рис. 12.219), центр  $O_1$  вписанного шара лежит на ее высоте  $DO_2$ ,  $E$  — середина  $AD$ .

Пусть  $R$  — радиус шара,  $DO_1 = AO_1 = R$ ,  $H$  — высота,  $DA = L$ ,  $\angle AO_1O_2 = \alpha$ .

В  $\triangle AO_2O_1$  ( $\angle AO_2O_1 = 90^\circ$ ):  
 $O_2O_1 = R \cos \alpha$ .

$$\text{Тогда } H = DO_1 + O_1O_2 = R + R \cos \alpha = R(1 + \cos \alpha) = 2R \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$\angle AO_1D = 180^\circ - \alpha; \angle AO_1E = \frac{1}{2} \angle AO_1D = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \text{ а из } \triangle AEO_1 (\angle AEO_1 = 90^\circ):$$

$$AE = AO_1 \sin \angle AO_1E \Rightarrow \frac{L}{2} = R \cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{L}{2R}.$$

$$\text{Тогда } H = 2R \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2R \cdot \frac{L^2}{4R^2} = \frac{L^2}{2R}.$$

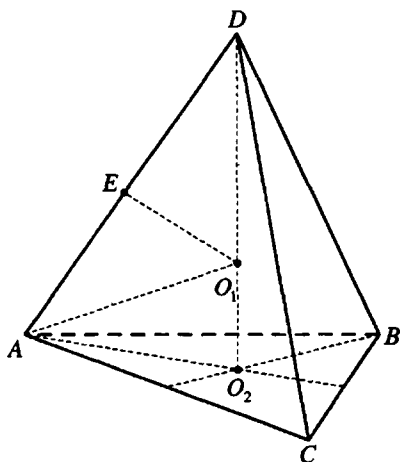


Рис. 12.219

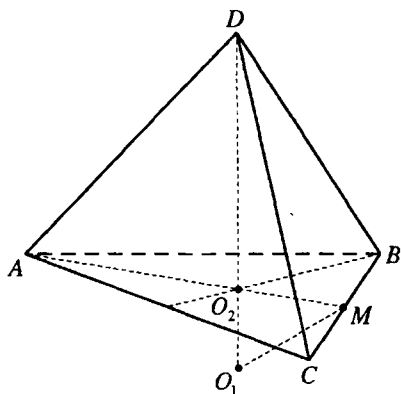


Рис. 12.219,а

$$O_2B = 2 \cdot OM = 2b \cos \gamma.$$

$$\text{Из } \triangle DO_2B (\angle DO_2B = 90^\circ): DB^2 = DO_2^2 + O_2B^2 = b^2 \sin^2 \gamma + 4b^2 \cos^2 \gamma.$$

$$\text{Так как } DO_2 = \frac{DB^2}{2b}, \text{ то}$$

$$b \sin \gamma = \frac{b^2 \sin^2 \gamma + 4b^2 \cos^2 \gamma}{2b};$$

$$2 \sin \gamma = \sin^2 \gamma + 4 \cos^2 \gamma,$$

$$2 \sin \gamma = \sin^2 \gamma + 4 - 4 \sin^2 \gamma;$$

$$3 \sin^2 \gamma + 2 \sin \gamma - 4 = 0; \sin \gamma = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}.$$

$$\text{Подходит только положительное значение } \sin \gamma = \frac{\sqrt{13} - 1}{3}, \gamma = \arcsin \frac{\sqrt{13} - 1}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{\sqrt{13} - 1}{3}.$$

**12.360.** Образующая конуса равна  $l$  и составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . В этот конус вписан шар, а в шар вписана правильная треугольная призма, у которой все ребра равны между собой. Найти объем призмы.

*Решение.*

Центр  $K$  шара, вписанного в конус, лежит на его высоте  $SO$ ,  $SE$  —

образующая конуса,  $SE = l$ ,  $\angle SEO = \alpha$ , (рис. 12.220)  $\angle KEO = \frac{1}{2} \angle SEO = \frac{\alpha}{2}$ .

Это же верно и в том случае, если точка  $O_1$  лежит на продолжении отрезка  $DO_2$  за точку  $O_2$ .

Рассмотрим данную правильную пирамиду  $DABC$  (рис. 12.219, а),  $DO_2$  — ее высота,  $M$  — середина  $BC$ ,  $\angle DMO_2 = \gamma$  — искомый угол между апофемой и плоскостью основания.

$DM > DO_2$  поэтому центр  $O_1$  описанного шара лежит вне пирамиды. Если радиус шара и апофемы равны  $b$ , то из  $\triangle DOM$  ( $\angle DOM = 90^\circ$ ):  $O_2M = b \cos \gamma$ ,  $DO_2 = b \sin \gamma$ .

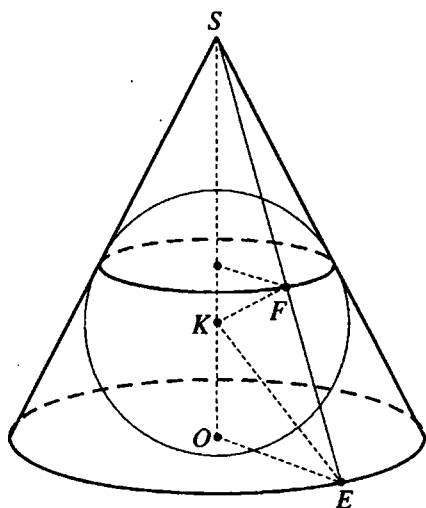


Рис. 12.220

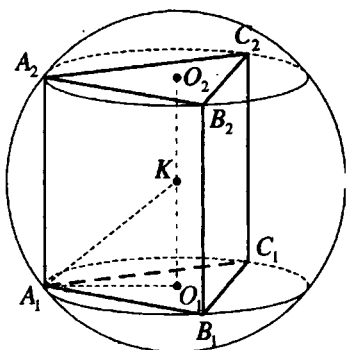


Рис. 12.220,а

$KO$  — радиус шара. Пусть  $KO = r$ .  
 В  $\triangle SOE$  ( $\angle SOE = 90^\circ$ ):  $OE = l \cos \alpha$ .

В  $\triangle KOE$  ( $\angle KOE = 90^\circ$ ):  $r = l \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

$O_1$  и  $O_2$  — центры оснований  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  правильной призмы, вписанной в шар (рис. 12.220, а).

Точка  $K$  — середина  $O_1O_2$ ,  $AK = r$ .

Пусть ребро призмы равно  $b$ .

Тогда  $O_1A_1 = \frac{b\sqrt{3}}{3}$ ,  $KO_1 = \frac{b}{2}$ .

В  $\triangle A_1O_1K_1$  ( $\angle A_1O_1K = 90^\circ$ ):

$$A_1K^2 = A_1O_1^2 + O_1K^2; r^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{4}; b^2 = \frac{12r^2}{7}; b = \frac{2\sqrt{3}r}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3}l \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{7}}.$$

Объем призмы:

$$V = S_{\triangle A_1B_1C_1} \cdot A_1A_2 = \frac{x^3\sqrt{3}}{4} = \frac{24\sqrt{3}l^3 \cos^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}}{7\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{18\sqrt{7}}{49} l^3 \cos^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}.$$

Ответ:  $\frac{18\sqrt{7}}{49} l^3 \cos^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$ .



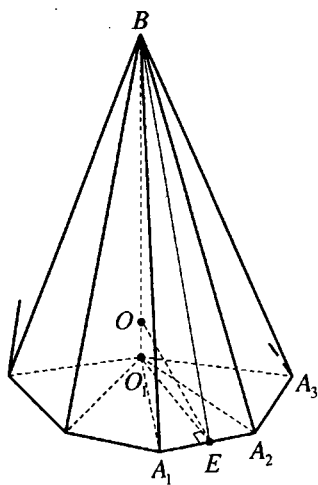


Рис. 12.221

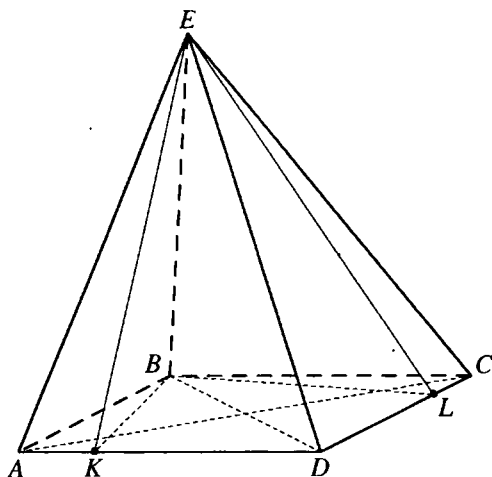


Рис. 12.222

**12.361.** Около шара радиуса  $R$  описана правильная  $n$ -угольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найти боковую поверхность пирамиды.

*Решение.*

Боковая поверхность правильной пирамиды  $S_{\sigma} = \frac{S}{\cos \alpha}$ , где  $S$  — площадь основания,  $\alpha$  — угол между боковой гранью и плоскостью основания.

$BO_1$  — высота данной правильной пирамиды  $BA_1A_2 \dots A_n$ ,  $BE$  — апофема ее боковой грани  $A_1BA_2$ ,  $\angle BEO_1 = \alpha$  (рис. 12.221).

Центр  $O$  вписанного шара лежит на высоте  $BO_1$ ,  $OO_1 = R$ ,

$$\angle OEO_1 = \frac{1}{2} \angle BEO_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{В } \triangle OO_1E (\angle OO_1E = 90^\circ): O_1E = R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{В } \triangle A_1EO_1 (\angle A_1EO_1 = 90^\circ): A_1E = O_1E \operatorname{tg} \angle A_1O_1E = R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Тогда

$$S = nS_{\triangle A_1O_1A_2} = n \cdot A_1E \cdot O_1E = nR^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n};$$

$$S_{\sigma} = \frac{nR^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\cos \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{nR^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\cos \alpha}.$$

**12.362.** Основанием пирамиды служит ромб со стороной  $a$ . Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания и образуют между собой угол  $\beta$ . Две другие боковые грани составляют с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найти боковую поверхность пирамиды.

*Решение.*

Ромб  $ABCD$  — основание пирамиды  $EABCD$  (рис. 12.222), грани  $ABE$  и  $CBE$  перпендикулярны плоскости основания, таким образом, их общее ребро  $EB$  — высота пирамиды.

Тогда  $EB \perp AB$ ,  $EB \perp BC$ ,  $\angle ABC$  — угол между гранями  $ABE$  и  $CBE$ ,  $\angle ABC = \beta$ .

$BK$  — высота ромба  $ABCD$ . Тогда  $EK \perp AD$  и  $\angle EKB$  — угол наклона грани  $AED$  к плоскости основания,  $\angle EKB = \alpha$ .

$\triangle ABD$  — проекция  $\triangle AED$  на плоскость основания.

$$\text{Тогда } S_{\triangle AED} = S_{\triangle CED} = \frac{S_{\triangle ABD}}{\cos \alpha};$$

$$2S_{\triangle AED} = \frac{S_{ABCD}}{\cos \alpha} = \frac{a^2 \sin \beta}{\cos \alpha}.$$

$$BK = a \sin \beta.$$

$$\text{Из } \triangle EBK (\angle EBK = 90^\circ): EB = BK \operatorname{tg} \angle EKB = a \sin \beta \operatorname{tg} \alpha.$$

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot EB = \frac{1}{2} a^2 \sin \beta \operatorname{tg} \alpha.$$

Боковая поверхность пирамиды:

$$S = 2S_{\triangle ABE} + 2S_{\triangle AED} = a^2 \sin \beta \operatorname{tg} \alpha + \frac{a^2 \sin \beta}{\cos \alpha} = \frac{a^2 \sin \beta (1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{a^2 \sin \beta \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)}{\cos \alpha} = \frac{2a^2 \sin \beta \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2a^2 \sin \beta \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \alpha}.$$

**12.363.** Расстояние от середины высоты правильной четырехугольной пирамиды до ее боковой грани равно  $d$ . Найти полную поверхность

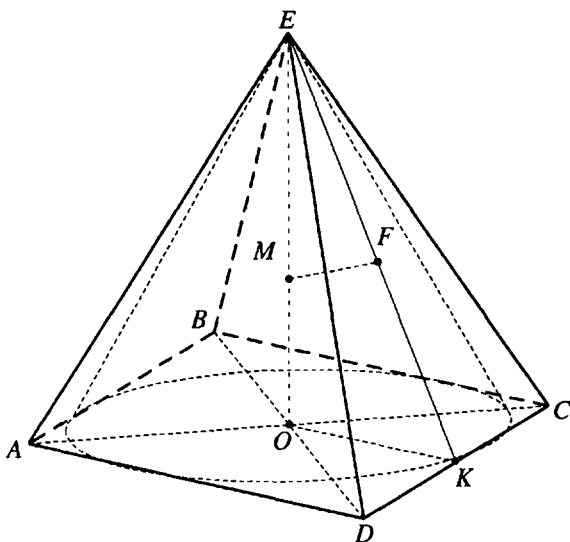


Рис. 12.223

вписанного в пирамиду конуса, если его образующая составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ .

*Решение.*

Пусть  $EO$  — высота правильной пирамиды  $EABCD$  (рис. 12.223),  $M$  — ее середина, середина  $K$  стороны  $CD$  — точка касания основания вписанного конуса с этой стороной,  $EK$  — образующая конуса,  $\angle EKO = \alpha$ .

Основание  $F$  перпендикуляра, проведенного из точки  $M$  на грань  $CED$ , лежит на отрезке  $EK$ ,  $MF = d$ .

$$\text{В } \triangle EFM (\angle EFM = 90^\circ): EM = \frac{MF}{\sin \angle MEF} = \frac{d}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{d}{\cos \alpha}.$$

$$EO = 2EM = \frac{2d}{\cos \alpha}.$$

В  $\triangle EOK (\angle EOK = 90^\circ)$ :

$$OK = EO \operatorname{ctg} \angle EKO = \frac{2d \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2d}{\sin \alpha};$$

$$EK = \frac{EO}{\sin \angle EKO} = \frac{2d}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Полная поверхность конуса:

$$S = \pi \cdot OK(OK + EK) = \pi \cdot \frac{2d}{\sin \alpha} \left( \frac{2d}{\sin \alpha} + \frac{2d}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) = \frac{4\pi d^2(1 + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha \cos \alpha} =$$

$$= \frac{4\pi d^2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha} = \frac{2\pi d^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}.$$

Ответ:  $\frac{2\pi d^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}$ .

**12.364.** Основанием пирамиды  $SABC$  служит равносторонний треугольник  $ABC$ . Ребро  $SA$  перпендикулярно плоскости основания. Найти угол между боковой гранью  $SBC$  и плоскостью основания, если боковая поверхность пирамиды относится к площади основания как  $11 : 4$ .

*Решение.*

Пусть  $E$  — середина  $BC$  (рис. 12.224). Тогда  $AE \perp BC$ ,  $SE \perp BC$  и  $\angle SEA$  — угол между боковой гранью  $SBC$  и плоскостью основания пирамиды.

Пусть  $\angle SEA = \alpha$ ,  $AE = 1$ .

Тогда из  $\triangle SAE$  ( $\angle SAE = 90^\circ$ ):

$AS = AE \operatorname{tg} \angle SEA = \operatorname{tg} \alpha$ .

$$SE = \frac{AE}{\cos \angle SEA} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

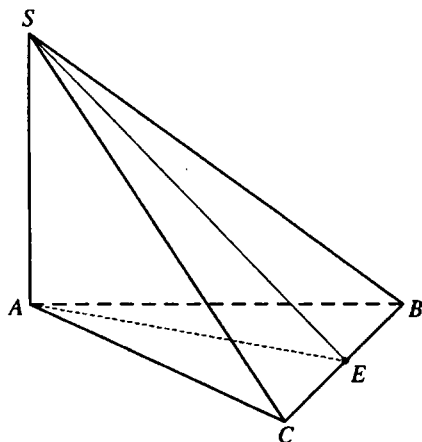


Рис. 12.224

Боковая поверхность пирамиды  $S_6 = 2S_{\triangle ASC} + S_{\triangle BSC} = SA \cdot AC +$

$$+ \frac{1}{2} BC \cdot SE = BC \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right), \text{ площадь основания } S_{\text{очн}} = \frac{1}{2} BC \cdot AE =$$

$$= \frac{1}{2} BC. \text{ Так как } S_6 = \frac{11}{4} S_{\text{очн}}, \text{ то } BC \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) = \frac{11}{8} BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} = \frac{11}{8} \Leftrightarrow 8 \sin \alpha + 4 = 11 \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\frac{16 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + 4 = 11 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 16 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 4 + 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = 11 - 11 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 16 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$1) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{7}{5};$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}.$$

Так как  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , то  $0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ$  и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0 \Rightarrow$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}, \alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ .

**12.365.** Радиус основания конуса равен  $R$ , угол между образующей и плоскостью основания равен  $\alpha$ . В этот конус вписан шар. Через точку  $P$ , лежащую на окружности касания шаровой и конической поверхностей, проведена касательная прямая к этой окружности, а через эту прямую проведена плоскость параллельно образующей конуса, проходящей через точку, диаметрально противоположную точке  $P$ . Найти площадь сечения шара этой плоскостью.

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел, проходящее через точку  $P$ , перпендикулярное касательной прямой из условия задачи (рис. 12.225).  $PD$  – диаметр сечения шара искомой площади.

$$\angle BAC = \angle BCA = \alpha.$$

Так как  $PD \parallel BA$ , то  $\angle CPD = \angle CBA = 180^\circ - 2\alpha$ .

$$OP \perp BC \text{ и } \angle OPD = 90^\circ - \angle CPD = 90^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha - 90^\circ.$$

$$\angle OCO_2 = \frac{1}{2} \angle BCA = \frac{\alpha}{2}, CO_2 = R, \text{ из } \triangle OO_2C (\angle OO_2C = 90^\circ):$$

$$OO_2 = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. OP = OO_2 = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

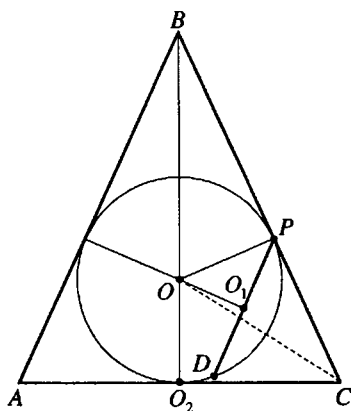


Рис. 12.225

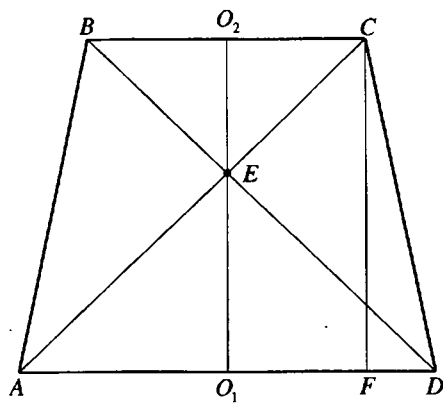


Рис. 12.226

$O_1$  — середина  $PD$  — центр сечения искомой площади.

В  $\triangle OO_1P$  ( $\angle OO_1P = 90^\circ$ ):

$$O_1P = OP \cos \angle OPD = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos(2\alpha - 90^\circ) = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin 2\alpha.$$

$$\text{Площадь сечения } S = \pi O_1P^2 = \pi R^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 2\alpha.$$

$$\text{Ответ: } \pi R^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 2\alpha.$$

**12.366.** В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны и длина каждой из них равна  $a$ . Угол между образующей и плоскостью основания равен  $\alpha$ . Найти полную поверхность усеченного конуса.

*Решение.*

Равнобокая трапеция  $ABCD$  (рис. 12.226) — осевое сечение данного усеченного конуса,  $AC \perp BD$ ,  $AC = BD = a$ ,  $\angle CDA = \alpha$ ,  $O_1$  — середина  $AD$  — центр нижнего основания усеченного конуса,  $O_2$  — середина  $BC$  — центр верхнего основания.

Пусть  $O_2B = r$ ,  $O_1A = R$ ,  $CD = L$ .

Боковая поверхность усеченного конуса  $S_6 = \pi(R+r)L$ , а полная  $S = \pi((R+r)L + R^2 + r^2)$ .

$\triangle AED$  и  $\triangle BEC$  — равнобедренные и прямоугольные,  $EO_2 = r$ ,  $EO_1 = R$ .

$CF$  — высота трапеции,  $CF = O_1O_2 = R + r$ .  $\triangle AFC$  — прямоугольный с углом  $45^\circ$ . Отсюда  $AF = CF = R + r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .  $FD = \frac{AD - BC}{2} = R - r$ .

В  $\triangle CFD$  ( $\angle CFD = 90^\circ$ ):  $R - r = FD = CF \operatorname{ctg} \angle CDA = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \alpha$ ;

$$L = CD = \frac{CF}{\sin \angle CDA} = \frac{R + r}{\sin \alpha}. \quad R + r = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad R - r = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow$$

$$R^2 + 2Rr + r^2 = \frac{a^2}{2}; \quad R^2 - 2Rr + r^2 = \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha. \quad \text{Складывая, имеем}$$

$$2R^2 + 2r^2 = \frac{a^2}{2} (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) \Leftrightarrow R^2 + r^2 = \frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha}.$$

Тогда

$$S = \pi \left( (R + r)L + R^2 + r^2 \right) = \pi \left( \frac{(R + r)^2}{\sin \alpha} + R^2 + r^2 \right) =$$

$$= \pi \left( \frac{a^2}{2 \sin \alpha} + \frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha} \right) = \frac{\pi a^2}{2 \sin^2 \alpha} \left( \sin \alpha + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{\pi a^2}{2 \sin^2 \alpha} (\sin \alpha + \sin 30^\circ) = \frac{\pi a^2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} + 15^\circ \right) \sin \left( \frac{\alpha}{2} - 15^\circ \right)}{\sin^2 \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi a^2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} + 15^\circ \right) \sin \left( \frac{\alpha}{2} - 15^\circ \right)}{\sin^2 \alpha}.$$

**12.367.** Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до противоположной боковой грани равно  $l$ . Угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен  $\alpha$ . Найти полную поверхность конуса, вписанного в пирамиду.

*Решение.*

Пусть  $EO$  — высота правильной пирамиды  $EABC$  (рис. 12.227) и конуса, вписанного в эту пирамиду,  $D$  — середина  $AB$ . Тогда  $ED \perp AB, CD \perp AB, \angle EDC = \alpha$ ,  $ED$  — образующая конуса,  $пл. AEB \perp пл. EDC$ . В плоскости  $EDC$  проведем перпендикуляр  $CF$  на  $ED$ . Тогда

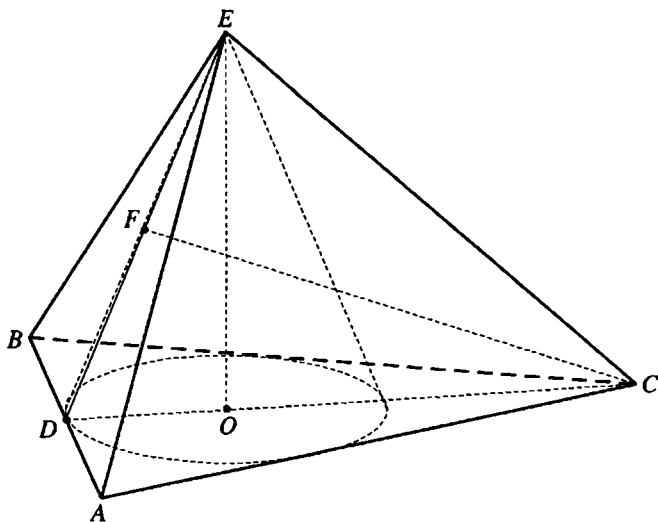


Рис. 12.227

$CF \perp \text{пл} AEB$  и  $CF$  – расстояние от вершины  $C$  основания пирамиды до противоположной боковой грани  $AEB$ ,  $CF=l$ .

$$\text{В } \triangle DFC (\angle DFC = 90^\circ): CD = \frac{CF}{\sin \angle CDF} = \frac{l}{\sin \alpha}.$$

$$OD = \frac{1}{3} CD = \frac{l}{3 \sin \alpha}.$$

$$\text{В } \triangle EOD (\angle EOD = 90^\circ): ED = \frac{DO}{\cos \angle EDO} = \frac{l}{3 \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Полная поверхность конуса

$$\begin{aligned} S &= \pi \cdot OD(OD + ED) = \pi \cdot \frac{l}{3 \sin \alpha} \left( \frac{l}{3 \sin \alpha} + \frac{l}{3 \sin \alpha \cos \alpha} \right) = \\ &= \frac{\pi l^2 (1 + \cos \alpha)}{9 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\pi l^2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{9 \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2\pi l^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{9 \sin 2\alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi l^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{9 \sin 2\alpha}.$$



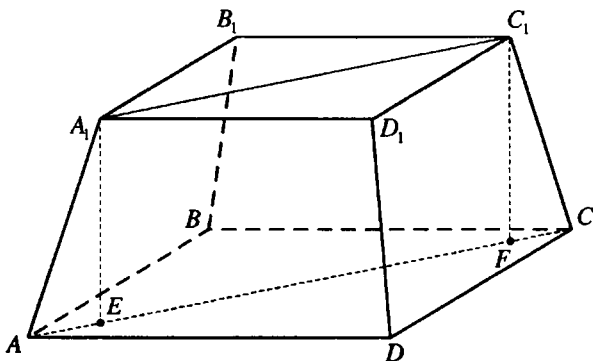


Рис. 12.228

**12.368.** Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды равно стороне меньшего основания и равно  $a$ . Угол между боковым ребром и стороной большого основания равен  $\alpha$ . Найти площадь диагонального сечения усеченной пирамиды.

*Решение.*

Диагональное сечение данной правильной пирамиды  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  — равнобокая трапеция  $AA_1C_1C$  (рис. 12.228). Высоты  $A_1E$  и  $C_1F$  этой трапеции являются высотами данной усеченной пирамиды.

Пусть  $\angle C_1CO = \beta$

$CO$  — проекция  $CC_1$  на плоскость нижнего основания,  $CD$  — прямая, лежащая в этой плоскости. Тогда  $\cos \angle C_1CD = \cos \angle C_1CO \cos \angle ACD$ ;

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos 45^\circ; \quad \cos \beta = \sqrt{2} \cos \alpha;$$

$$\text{В } \triangle C_1FC (\angle C_1FC = 90^\circ): FC = CC_1 \cos \angle C_1CF = a \cos \beta;$$

$$FC_1 = CC_1 \sin \angle C_1CF = a \sin \beta.$$

$$EC = EF + FC = A_1C_1 + FC = a\sqrt{2} + a \cos \beta = a(\sqrt{2} + \cos \beta).$$

Площадь сечения

$$\begin{aligned} S &= \frac{AC + A_1C_1}{2} \cdot C_1F = EC \cdot C_1F = a(\sqrt{2} + \cos \beta) \cdot a \sin \beta = \\ &= a^2 (\sqrt{2} + \cos \beta) \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = a^2 (\sqrt{2} + \sqrt{2} \cos \alpha) \sqrt{1 - 2 \cos^2 \alpha} = \\ &= a^2 \sqrt{2} (1 + \cos \alpha) \sqrt{-\cos 2\alpha} = 2a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{-2 \cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

Ответ:  $2a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{-2 \cos 2\alpha}$ .

12.369. Высота конуса составляет с образующей угол  $\alpha$ . Через вершину конуса проведена плоскость под углом

$\beta$  ( $\beta > \frac{\pi}{2} - \alpha$ ) к плоскости основания.

Найти площадь сечения, если высота конуса равна  $h$ .

Решение.

Пусть  $BO$  — высота данного конуса,  $\triangle ABC$  — сечение конуса. Из условия:  $\angle OBC = \alpha$ ,  $BO = h$  (рис. 12.229),  $E$  — середина  $AC$ .

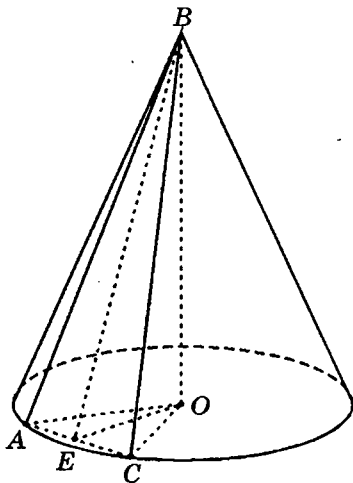


Рис. 12.229

Тогда  $OE \perp AC$ ,  $BE \perp AC$ ,  $\angle BEO$  — угол наклона секущей плоскости к плоскости основания конуса,  $\angle BEO = \beta$ .

$$\text{В } \triangle BOC \left( \angle BOC = \frac{\pi}{2} \right): BC = \frac{BO}{\cos \angle OBC} = \frac{h}{\cos \alpha}.$$

$$\text{В } \triangle BOE \left( \angle BOE = \frac{\pi}{2} \right): BE = \frac{BO}{\sin \angle BEO} = \frac{h}{\sin \beta}.$$

$$\text{В } \triangle BEC \left( \angle BEC = \frac{\pi}{2} \right):$$

$$\begin{aligned} EC &= \sqrt{BC^2 - BE^2} = h \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \beta}} = \\ &= \frac{h}{\cos \alpha \sin \beta} \sqrt{\sin^2 \beta - \cos^2 \alpha} = \frac{h}{\cos \alpha \sin \beta} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\beta}{2} - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \\ &= \frac{h}{\cos \alpha \sin \beta} \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2}} = \frac{h \sqrt{-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}}{\cos \alpha \sin \beta}. \end{aligned}$$

$$\text{Площадь сечения } S = BE \cdot EC = \frac{h^2 \sqrt{-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}}{\cos \alpha \sin^2 \beta}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{h^2 \sqrt{-\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}}{\cos \alpha \sin^2 \beta}.$$

**12.370.** Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен  $\alpha$ . Все боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания. Найти двугранные углы при основании, если высота пирамиды равна гипотенузе треугольника, лежащего в ее основании.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота пирамиды  $SABC$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle BAC = \alpha$  и, так как  $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$ , то  $O$  — центр окружности, описанной около основания пирамиды, — середина гипотенузы  $AB$  (рис. 12.230), таким образом,  $\text{пл. } ASB \perp \text{пл. } ABC$ .

$OD \perp AC$ ,  $OE \perp BC$ . Тогда  $SD \perp AC$ ,  $SE \perp BC$ ;

$\angle SDO = \varphi$  и  $\angle SEO = \gamma$  — искомые линейные углы двугранных углов при основании пирамиды.

Пусть  $SO = AB = 1$ . Тогда  $AO = BO = \frac{1}{2}$ .

В  $\triangle ADO$  ( $\angle ADO = 90^\circ$ ):  $OD = OA \sin \angle AOD = \frac{\sin \alpha}{2}$ .

В  $\triangle BEO$  ( $\angle BEO = 90^\circ$ ):

$$OE = OB \sin \angle OBE = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\cos \alpha}{2}.$$

В  $\triangle SOD$  ( $\angle SOD = 90^\circ$ ):  $\text{tg } \varphi = \frac{SO}{OD} = \frac{2}{\sin \alpha}$ ;

$$\varphi = \text{arctg } \frac{2}{\sin \alpha}.$$

В  $\triangle SOE$  ( $\angle SOE = 90^\circ$ ):  $\text{tg } \gamma = \frac{SO}{OE} = \frac{2}{\cos \alpha}$ .

$$\gamma = \text{arctg } \frac{2}{\cos \alpha}.$$

*Ответ:*  $90^\circ$ ;  $\text{arctg } \frac{2}{\sin \alpha}$ ;  $\text{arctg } \frac{2}{\cos \alpha}$ .

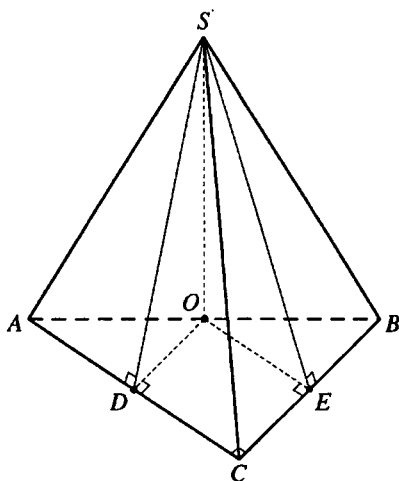


Рис. 12.230

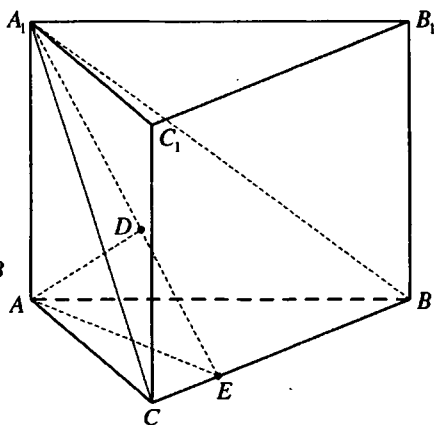


Рис. 12.231

12.371. В основании прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ) лежит равнобедренный треугольник, у которого  $AB = BC = a$  и  $\angle ABC = \alpha$ . Высота призмы равна  $H$ . Найти расстояние от точки  $A$  до плоскости, проведенной через точки  $B, C$  и  $A_1$ .

*Решение.*

Проведем из точки  $A$  перпендикуляр  $AE$  на  $BC$  (рис. 12.231). Тогда  $A_1E \perp BC$  и, следовательно,  $BC \perp \text{пл.} AEA_1$ . Таким образом  $\text{пл.} AEA_1 \perp \text{пл.} BA_1C$ .

В плоскости  $AEA_1$  опустим перпендикуляр  $AD$  на  $A_1E$ . Тогда  $AD \perp \text{пл.} BA_1C$  и длина перпендикуляра  $AD$  — искомое расстояние.

Из  $\triangle AEB$  ( $\angle AEB = 90^\circ$ ):  $AE = AB \sin \angle ABC = a \sin \alpha$ .

Из  $\triangle A_1AE$  ( $\angle A_1AE = 90^\circ$ ):  $A_1E = \sqrt{AE^2 + AA_1^2} = \sqrt{H^2 + a^2 \sin^2 \alpha}$ .

$$S_{\triangle AA_1E} = \frac{1}{2} A_1E \cdot AD = \frac{1}{2} AA_1 \cdot AE.$$

$$\text{Тогда } AD = \frac{AA_1 \cdot AE}{A_1E} = \frac{aH \sin \alpha}{\sqrt{H^2 + a^2 \sin^2 \alpha}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{aH \sin \alpha}{\sqrt{H^2 + a^2 \sin^2 \alpha}}.$$

**12.372.** В пирамиде, у которой все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания, через центр вписанного шара параллельно основанию проведена плоскость. Отношение площади сечения пирамиды этой плоскостью к площади основания равно  $k$ . Найти двугранный угол при основании пирамиды.

*Решение.*

Так как все боковые грани данной пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то центр  $O_1$  шара, вписанного в эту пирамиду, лежит на ее высоте  $DO$  (рис. 12.232).

$\angle DEO$  — угол наклона боковой грани к плоскости основания. Пусть  $\angle DEO = \alpha$ .

Тогда из  $\triangle DOE$  ( $\angle DOE = 90^\circ$ ):

$$DO = EO \operatorname{tg} \alpha; \angle O_1EO = \frac{1}{2} \angle DEO = \frac{\alpha}{2};$$

из  $\triangle O_1OE$  ( $\angle O_1OE = 90^\circ$ ):  $OO_1 = EO \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

$S$  — площадь основания пирамиды,  $S_1$  — площадь сечения.

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S} &= \left( \frac{DO_1}{DO} \right)^2 = \left( \frac{DO - OO_1}{DO} \right)^2 = \left( \frac{EO \operatorname{tg} \alpha - EO \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{EO \operatorname{tg} \alpha} \right)^2 = \frac{\left( \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^4 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

По условию  $\frac{S_1}{S} = k$ .

Тогда  $\cos^4 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4k}$  и  $\alpha = 2 \arccos \frac{1}{\sqrt[4]{4k}}$ .

*Ответ:*  $\alpha = 2 \arccos \frac{1}{\sqrt[4]{4k}}$ .

**12.373.** Высота правильной треугольной пирамиды равна  $H$  и составляет с боковым ребром угол  $\alpha$ . Через сторону основания проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро под углом

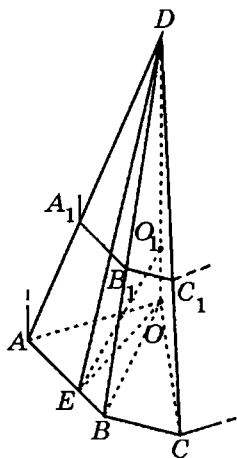


Рис. 12.232

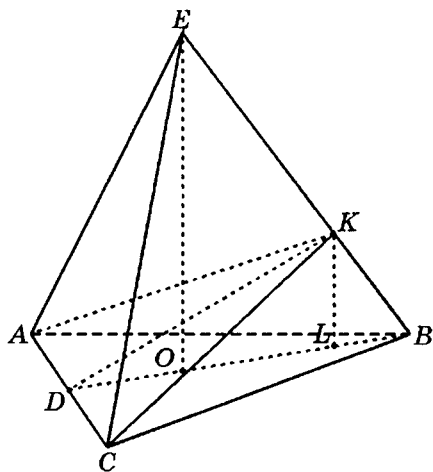


Рис. 12.233

$\beta \left( \beta < \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ . Найти объем той части пирамиды, которая заключена между этой плоскостью и плоскостью основания.

*Решение.*

Пусть  $EO$  — высота правильной пирамиды  $EABC$  (рис. 12.233), тогда  $EO = H$ ,  $\angle OEB = \alpha$ ,  $\Delta AKC$  — сечение пирамиды из условия задачи,  $D$  — середина  $AC$ ,  $\angle BKD = \beta$ .

$$\text{В } \Delta EOB \left( \angle EOB = \frac{\pi}{2} \right) : OB = EO \operatorname{tg} \angle OEB = H \operatorname{tg} \alpha.$$

$$BD = \frac{3}{2} OB = \frac{3}{2} H \operatorname{tg} \alpha, \quad BD = \frac{BC \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Тогда } \frac{BC \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} H \operatorname{tg} \alpha, \quad BC = H \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha, \quad S_{\Delta ABC} = \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3 H^2 \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \alpha}{4}.$$

$$\angle KBD = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \angle KDB = \pi - (\angle KBD + \angle DKB) = \pi - \left( \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta \right) = \frac{\pi}{2} + (\alpha - \beta).$$

$$\text{В } \Delta DKB : \frac{DK}{\sin \angle KBD} = \frac{BD}{\sin \angle BKD};$$

$$DK = \frac{BD \sin \angle KBD}{\sin \angle BKD} = \frac{3 H \operatorname{tg} \alpha \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{2 \sin \beta} = \frac{3 H \sin \alpha}{2 \sin \beta}.$$

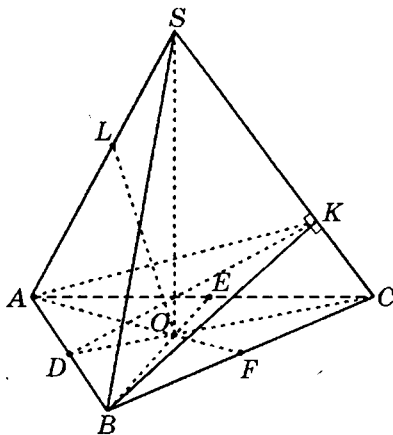


Рис. 12.234

$KL$  — высота пирамиды  $KABC$ ,  $L$  лежит на  $BD$ .

В  $\triangle DLK$  ( $\angle DLK = \frac{\pi}{2}$ ):

$$KL = DK \sin \angle KDB = \frac{3H \sin \alpha}{2 \sin \beta} \sin \left( \frac{\pi}{2} + (\alpha - \beta) \right) = \frac{3H \sin \alpha \cos(\alpha - \beta)}{2 \sin \beta}.$$

Искомый объем

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot KL = \frac{1}{3} \cdot \frac{3H^2 \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \alpha}{4} \cdot \frac{3H \sin \alpha \cos(\alpha - \beta)}{2 \sin \beta} = \\ &= \frac{3\sqrt{3}H^3 \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha \cos(\alpha - \beta)}{8 \sin \beta}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{3\sqrt{3}H^3 \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha \cos(\alpha - \beta)}{8 \sin \beta}$ .

**12.374.** Отрезок прямой, соединяющий центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найти косинус угла между смежными боковыми гранями.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABC$ ,  $L$  — середина  $SA$ ,  $OL = AB$  (рис. 12.234),  $OL = a$ .

Так как  $OL$  — медиана прямоугольного  $\triangle AOS$  ( $\angle AOS = 90^\circ$ ), то  $AS = 2OL = 2a$ .

$\angle AKB$  — угол между смежными гранями  $SAC$  и  $SBC$  пирамиды.

Пусть  $\angle AKB = \alpha$ ,  $CK = b$ .

Тогда  $SK = 2a - b$ .

$$\text{В } \triangle BKC (\angle BKC = 90^\circ): BK^2 = BC^2 - KC^2 = a^2 - b^2.$$

$$\text{В } \triangle BKS (\angle BKS = 90^\circ): BK^2 = BS^2 - KS^2 = 4a^2 - (2a - b)^2.$$

$$\text{Тогда } a^2 - b^2 = 4a^2 - (2a - b)^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 4ab - b^2 \Rightarrow b = \frac{a}{4}.$$

$$\text{Отсюда } BK = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

$D$  — середина  $AB$ . Тогда  $KD \perp AB$ ,  $\angle BKD = \frac{\alpha}{2}$ .

$$\text{В } \triangle KDB: \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BD}{BK} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{15}}{4} = \frac{2}{\sqrt{15}}.$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}.$$

Ответ:  $\frac{7}{15}$ .

**12.375.** Основанием пирамиды служит квадрат со стороной  $a$ ; две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а большее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом  $\beta$ . В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед; одно его основание лежит в плоскости основания пирамиды, вершины другого основания лежат на боковых ребрах пирамиды. Найти объем параллелепипеда, если его диагональ составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ .

*Решение.*

Квадрат  $ABCD$  — основание пирамиды  $SABCD$  (рис. 12.375), боковые грани  $SBA$  и  $SBC$  перпендикулярны плоскости основания, поэтому их общее ребро  $SB$  — высота пирамиды.

$BA, BC, BD$  — проекции ребер  $SA, SC, SD$  на плоскость основания,  $BA = BC < BD$ . Таким образом,  $SD$  — большее боковое ребро и  $\angle SDB = \beta$ .

$E_1, B_1, F_1, K_1$  — вершины прямоугольного параллелепипеда из условия задачи, принадлежащие ребрам  $SA, SB, SC, SD$  пирамиды. Боковое ребро параллелепипеда, проходящее через вершину  $B_1$  (отрезок  $B_1B$ ), является частью ребра  $SB$  пирамиды.



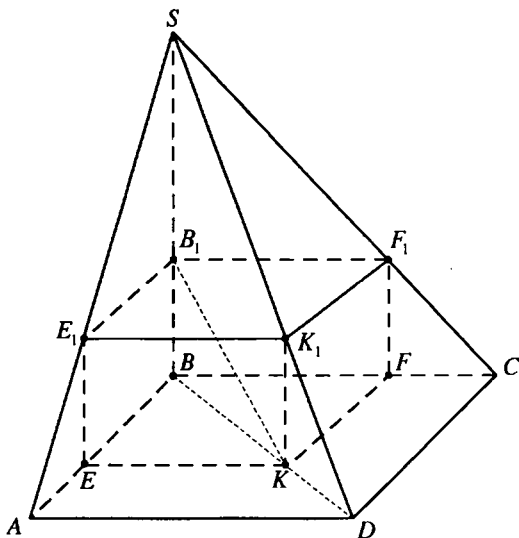


Рис. 12.235

В плоскости  $SBD$  проведем перпендикуляр  $K_1K$  на  $BD$ . Так как плоскость  $SBD$  перпендикулярна плоскости основания пирамиды, то  $K_1K$  также перпендикулярен этой плоскости, поэтому  $K_1K$  — боковое ребро параллелепипеда. Боковые ребра  $E_1E$  и  $F_1F$  параллелепипеда лежат в гранях  $SBA$  и  $SBC$  пирамиды.

$BK$  — диагональ основания параллелепипеда и, так как точка  $K$  лежит на отрезке  $BD$ , то  $\angle ABK = 45^\circ$  и  $EBFK$  квадрат.

$$\angle B_1KB = \alpha.$$

Если  $BB_1 = KK_1 = b$ , то из  $\triangle B_1BK$  ( $\angle B_1BK = 90^\circ$ ):  $BK = b \operatorname{ctg} \alpha$ .

$$BD = a\sqrt{2}; KD = BD - BK = a\sqrt{2} - b \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\triangle SBD \sim \triangle K_1KD \Rightarrow \frac{KK_1}{KD} = \frac{SB}{BD} = \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \frac{b}{a\sqrt{2} - b \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b \operatorname{ctg} \beta = a\sqrt{2} - b \operatorname{ctg} \alpha \Leftrightarrow b = \frac{a\sqrt{2}}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{a\sqrt{2} \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$EK = \frac{BK}{\sqrt{2}} = \frac{b \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{2}} = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Объем параллелепипеда

$$V = EK^2 \cdot KK_1 = \frac{a^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} \cdot \frac{a\sqrt{2} \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{a^3 \sqrt{2} \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin^3 \beta}{\sin^3(\alpha + \beta)}.$$

Ответ:  $\frac{a^3 \sqrt{2} \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin^3 \beta}{\sin^3(\alpha + \beta)}$ .

12.376. Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого боковая сторона равна  $a$ , а угол между боковыми сторонами равен  $\alpha$ . Боковая грань пирамиды, проходящая через сторону основания, противоположную данному углу  $\alpha$ , составляет с плоскостью основания угол  $\beta$ . Найти объем конуса, описанного около этой пирамиды, если все ее боковые ребра равны между собой.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота пирамиды

$SABC$ ,  $AB=BC=a$ ,  $\angle ABC = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ,

$D$  — середина  $AC$  (рис. 12.236).

Так как  $SA=SB=SC$ , то  $O$  — центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , он лежит на отрезке  $BD$ ,  $\angle SDO$  — угол наклона грани  $ASC$  к плоскости основания пирамиды,  $\angle SDO = \beta$ . Радиус конуса, описанного около пирамиды,  $R = OB =$

$$R = OB = \frac{AB}{2 \sin \angle ACB} = \frac{a}{2 \sin \left( 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

В  $\triangle BDC$  ( $\angle BDC = 90^\circ$ ):  $BD = BC \cos \angle CBD = a \cos \frac{\alpha}{2}$ .

$$OD = BD - OB = a \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a \left( 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a \cos \alpha}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

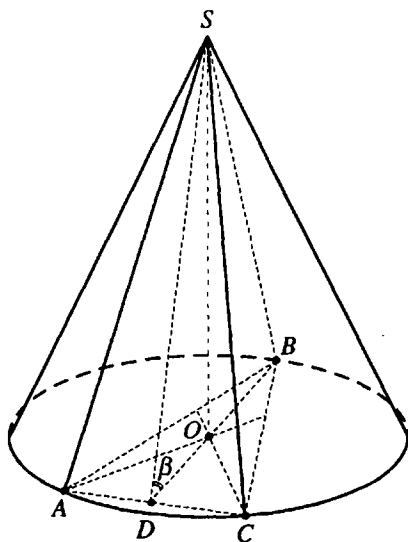


Рис. 12.236

$$\text{В } \triangle SOD (\angle SOD = 90^\circ): SO = OD \operatorname{tg} \angle SDO = \frac{a \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Объем конуса } V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot SO = \frac{\pi a^3 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{24 \cos^3 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi a^3 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{24 \cos^3 \frac{\alpha}{2}}.$$

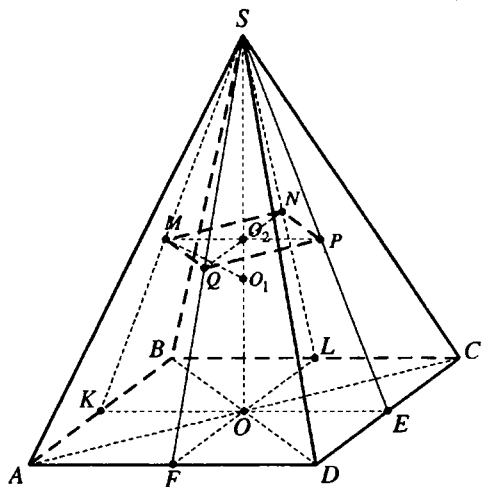


Рис. 12.237

12.377. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна  $a$ , двугранный угол при основании равен  $\alpha$ . В эту пирамиду вписан шар. Найти объем пирамиды, вершинами которой служат точки касания шаровой поверхности с боковыми гранями данной пирамиды и произвольная точка, лежащая в плоскости основания данной пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABCD$  (рис. 12.237),  $O_1$  — центр

шара, вписанного в пирамиду, лежащий на высоте  $SO$ ,  $AD = a$ .

$M, N, P, Q$  — точки касания шара с боковыми гранями  $ASB, BSC, CSD, ASD$ , лежащие на их апофемах  $SK, SL, SE$ ,

$$SF, EP = EO = \frac{a}{2}, \angle SEO = \alpha.$$

$O_1M = O_1N = O_1P = O_1Q$  — радиусы шара, вписанного в пирамиду.

Тогда прямоугольные треугольники  $O_1MS, O_1NS, O_1PS, O_1QS$  равны по катету и гипотенузе,  $SM = SN = SP = SQ$ . Так как  $\triangle FSE, \triangle FSK, \triangle KSL, \triangle LSE$  — равные и равнобедренные, то  $PQ \parallel FE, MQ \parallel FK, MN \parallel KL, NP \parallel LE$ . Та-

ким образом, плоскость четырехугольника  $MNPQ$  параллельна плоскости основания пирамиды и пирамида  $SMNPQ$  подобна пирамиде  $SKLEF$ . Так как  $SKLEF$  – правильная пирамида, то  $MNPQ$  – квадрат,  $SO_2$  — высота пирамиды  $SMNPQ$ ,  $O_2$  — центр  $MNPQ$ .

$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{KLEF}} = \left(\frac{SO_2}{SO}\right)^2. \quad S_{KLEF} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{a^2}{2}.$$

В плоскости  $KSE$  проведем перпендикуляр  $PP_1$  на плоскость  $ABCD$ .

Тогда  $PP_1$  — высота пирамиды искомого объема.

$$\text{В } \triangle PP_1E (\angle PP_1E = 90^\circ): PP_1 = PE \sin \angle PEP_1 = \frac{a}{2} \sin \alpha.$$

$$\text{В } \triangle SOE (\angle SOE = 90^\circ): SO = OE \operatorname{tg} \angle SEO = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$SO_2 = SO - OO_2 = SO - PP_1 = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{a}{2} \sin \alpha =$$

$$= \frac{a \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{SO_2}{SO}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha}\right)^2 = 4 \sin^4 \frac{\alpha}{2};$$

$$S_{MNPQ} = S_{KLEF} \cdot 4 \sin^4 \frac{\alpha}{2} = 2a^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}.$$

Искомый объем

$$V = \frac{1}{3} S_{MNPQ} \cdot PP_1 = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{a}{2} \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{3} a^3 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3} a^3 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha.$$

**12.378.** В шар радиуса  $R$  вписана правильная усеченная четырехугольная пирамида, у которой большее основание проходит через центр шара, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол  $\beta$ . Найти объем усеченной пирамиды.

*Решение.*

Большее основание  $ABCD$  правильной усеченной пирамиды

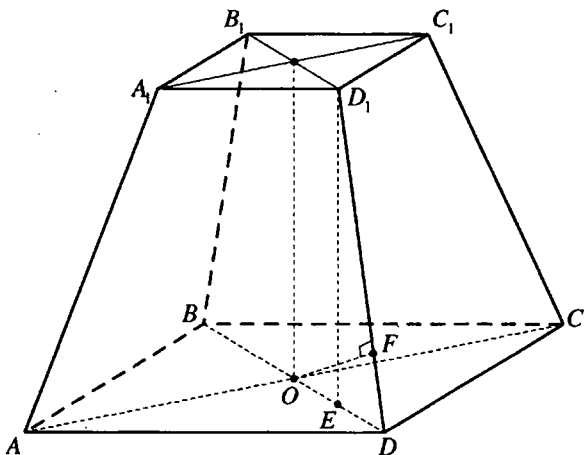


Рис. 12.238

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 12.238), проходит через центр  $O$  шара и вписано в большой круг этого шара, поэтому  $O$  – центр квадрата  $ABCD$ ,  $OD = OD_1 = R$ .

$D_1E$  — высота усеченной пирамиды.  $\angle D_1DE = \beta$ .

$F$  – середина  $DD_1$  и, так как  $OD = OD_1$ , то  $OF \perp DD_1$ .

В  $\triangle OFD$  ( $\angle OFD = 90^\circ$ ):  $DF = OD \cos \angle D_1DE = R \cos \beta$ .

$DD_1 = 2DF = 2R \cos \beta$ .

В  $\triangle DED_1$  ( $\angle DED_1 = 90^\circ$ ):

$D_1E = DD_1 \sin \angle D_1DE = 2R \cos \beta \sin \beta = R \sin 2\beta$ ;

$DE = DD_1 \cos \angle D_1DE = 2R \cos^2 \beta$ .

$OE = OD - DE = R - 2R \cos^2 \beta = -R \cos 2\beta$ .

$\Rightarrow \cos 2\beta < 0, 90^\circ < 2\beta < 180^\circ, 45^\circ < \beta < 90^\circ$ .

$B_1D_1 = 2 \cdot OE = -2R \cos 2\beta$ .

Площадь верхнего основания  $S_1 = \frac{1}{2} B_1D_1^2 = 2R^2 \cos^2 2\beta$ , площадь

нижнего основания  $S_2 = \frac{1}{2} BD^2 = 2R^2$ , высота пирамиды  $h = D_1E = R \sin 2\beta$ ,

а ее объем

$$V = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{1}{3} R \sin 2\beta \times \\ \times \left( 2R^2 \cos^2 2\beta + 2R^2 + 2R^2 \sqrt{\cos^2 2\beta} \right) = \frac{2}{3} R^3 \sin 2\beta (1 + \cos^2 2\beta - \cos 2\beta).$$

Ответ:  $\frac{2}{3} R^3 \sin 2\beta (1 + \cos^2 2\beta - \cos 2\beta)$ .

12.379. На отрезке  $AB$ , равном  $2R$ , построена как на диаметре полуокружность и проведена хорда  $CD$  параллельно  $AB$ . Найти объем тела, образованного вращением треугольника  $ACD$  вокруг диаметра  $AB$ , если вписанный угол, опирающийся на дугу  $AC$ , равен  $\alpha$  ( $AC < AD$ ).

Решение.

Пусть  $C_1$  и  $D_1$  — точки, симметричные  $C$  и  $D$  относительно диаметра  $AB$  (рис. 12.239),  $E$  и  $F$  — точки пересечения  $CC_1$  и  $DD_1$  с  $AB$ ,  $O$  — центр полуокружности,  $V_1$  — объем конуса, осевое сечение которого —

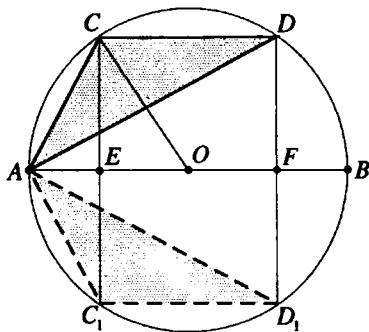


Рис. 12.239

$\Delta SAC_1$ ,  $V_2$  — объем цилиндра с осевым сечением  $CDD_1C_1$ ,  $V_3$  — объем конуса с осевым сечением  $DAD_1$ .

Искомый объем тела вращения

$$V = V_1 + V_2 - V_3 = \frac{1}{3} \pi \cdot CE^2 \cdot AE + \pi \cdot CE^2 \cdot EF - \frac{1}{3} \pi \cdot CE^2 \cdot AF = \\ = \frac{1}{3} \pi \cdot CE^2 (AE + 3EF - (AE + AF)) = \frac{2}{3} \pi \cdot CE^2 \cdot EF.$$

Вписанный угол  $ADC$  и центральный угол  $AOC$  опираются на одну и ту же дугу, следовательно,  $\angle AOC = 2\angle ADC = 2\alpha$ .

$$\text{В } \Delta CEO (\angle CEO = 90^\circ): CE = CO \sin \angle AOC = R \sin 2\alpha;$$

$$OE = CO \cos \angle AOC = R \cos 2\alpha \cdot EF = 2 \cdot OE = 2R \cos 2\alpha.$$

$$V = \frac{2}{3} \pi \cdot CE^2 \cdot EF = \frac{2}{3} \pi \cdot R^2 \sin^2 2\alpha \cdot 2R \cos 2\alpha = \frac{2}{3} \pi R^3 \sin 4\alpha \sin 2\alpha.$$

Ответ:  $\frac{2}{3} \pi R^3 \sin 4\alpha \sin 2\alpha$ .

**12.380.** Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен  $\alpha$ . Наибольшая по площади боковая грань призмы – квадрат. Найти угол между пересекающимися диагоналями двух других боковых граней.

*Решение.*

Пусть  $\triangle ABC$  — основание прямой призмы  $ABC_1A_1B_1C_1$  (рис. 12.240)

$$\angle ACB = 90^\circ, \angle BAC = \alpha.$$

Так как  $AA_1 = BB_1 = CC_1$ ,  $AB > AC$  и  $AB > BC$ , то грань  $AA_1B_1B$ , имеющая наибольшую площадь, — квадрат.

Пусть искомым  $\angle A_1CB_1 = \beta, AB = A_1B_1 = AA_1 = 1$ .

В  $\triangle ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ):

$$AC = AB \cos \angle BAC = \cos \alpha; \quad BC = AB \sin \angle BAC = \sin \alpha.$$

$$\text{В } \triangle A_1AC \left( \angle A_1AC = 90^\circ \right): A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2} = \sqrt{1 + \cos^2 \alpha}.$$

$$\text{В } \triangle B_1BC \left( \angle B_1BC = 90^\circ \right): B_1C = \sqrt{BB_1^2 + BC^2} = \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}.$$

Из  $\triangle A_1CB_1$  по теореме косинусов:

$$A_1B_1^2 = A_1C^2 + B_1C^2 - 2A_1C \cdot B_1C \cos \angle A_1CB_1 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 1 + \cos^2 \alpha + 1 + \sin^2 \alpha - 2\sqrt{(1 + \cos^2 \alpha)(1 + \sin^2 \alpha)} \cdot \cos \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1 + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} \cdot \cos \beta = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2 + \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha} \cdot \cos \beta = 1 \Leftrightarrow \frac{\cos \beta \sqrt{8 + \sin^2 2\alpha}}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta = \arccos \frac{2}{\sqrt{8 + \sin^2 2\alpha}}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{2}{\sqrt{8 + \sin^2 2\alpha}}.$$

**12.381.** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна  $a$ , угол между боковым ребром и плоскостью основания равен  $\alpha$  ( $\alpha > \pi/4$ ). Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру (т.е. ребру, не лежащему с этой вершиной в одной боковой грани).

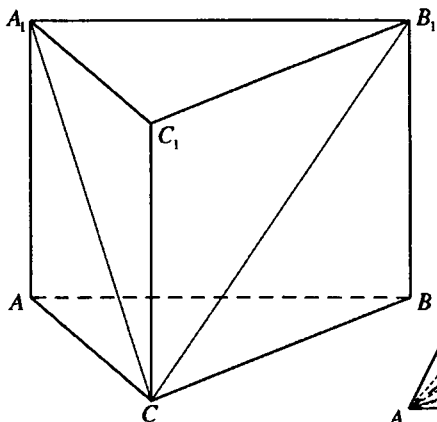


Рис. 12.240

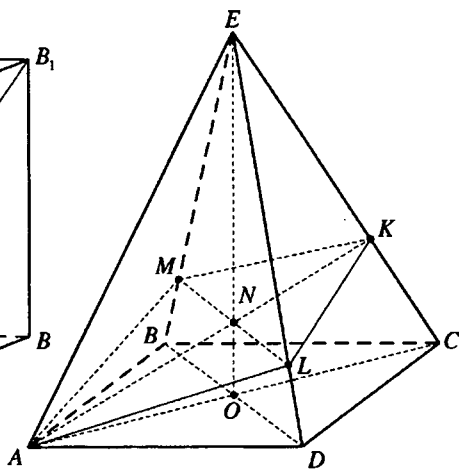


Рис. 12.241

*Решение.*

Пусть  $OE$  – высота правильной пирамиды  $EABCD$  (рис. 12.241),  
 $AD = a$ ,  $\angle ECO = \alpha$ .

В плоскости  $AEC$  проведем перпендикуляр  $AK$  на  $EC$ .  $N$  – точка пересечения  $AK$  и  $EO$ . В плоскости  $BED$  проведем прямую  $ML$  через точку  $N$  параллельно  $BD$ .

$OC$  – проекция  $EC$  на плоскость основания,  $OC \perp BD$ , поэтому  $EC \perp BD$  и, так как  $ML \parallel BD$ , то  $MN \perp EC$ .

Следовательно,  $EC \perp ML$ ,  $EC \perp AK$  и четырехугольник  $AMKL$  – сечение пирамиды из условия задачи.

$$BD \perp \text{пл. } AEC \Rightarrow BD \perp AK.$$

$$BD \perp AK, BD \parallel ML \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AK \perp ML \text{ и площадь сечения } S = \frac{1}{2} AK \cdot ML.$$

$$\text{В } \triangle AKC \left( \angle AKC = \frac{\pi}{2} \right): AK = AC \sin \angle ACK = a\sqrt{2} \sin \alpha.$$

$$\text{В } \triangle EOC \left( \angle EOC = \frac{\pi}{2} \right): EO = OC \operatorname{tg} \angle ECO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{В } \triangle AON \left( \angle AON = \frac{\pi}{2} \right):$$



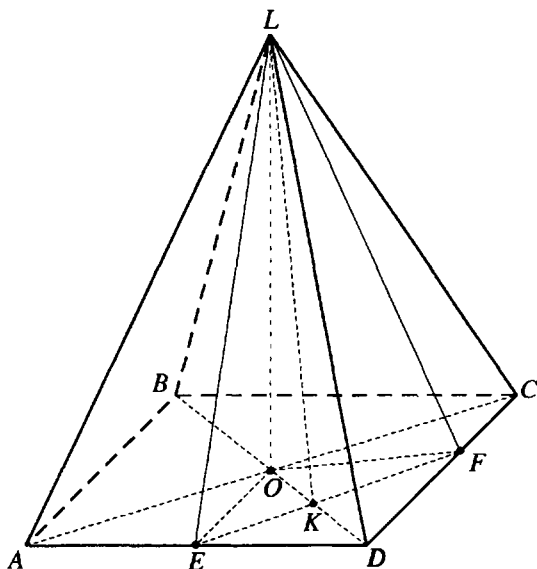


Рис. 12.232

$$NO = AO \operatorname{tg} \angle NAO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$EN = EO - NO = \frac{a\sqrt{2}}{2} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha) = -\frac{a\sqrt{2} \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

$$\begin{aligned} \Delta MEL \sim \Delta BED &\Rightarrow \frac{ML}{BD} = \frac{EN}{EO} \Rightarrow ML = \frac{BD \cdot EN}{EO} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \left( -\frac{a\sqrt{2} \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \right)}{\frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha} = \\ &= -\frac{2a\sqrt{2} \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha} = -\frac{2a\sqrt{2} \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = -\frac{a\sqrt{2} \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow S = \frac{1}{2} AK \cdot ML = \\ &= -\frac{a^2 \cos 2\alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Ответ:  $-\frac{a^2 \cos 2\alpha}{\sin \alpha}$ .

**12.382.** Высота правильной четырехугольной пирамиды образует с боковым ребром угол  $\alpha$ . Через вершину пирамиды параллельно диагонали основания проведена плоскость, составляющая угол  $\beta$  со второй

диагональю. Площадь полученного сечения равна  $S$ . Найти высоту пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $LO$  — высота правильной пирамиды  $LABCD$ ,  $\triangle ELF$  — сечение пирамиды из условия,  $\angle OLD = \alpha$ ,  $\angle OKL = \beta$  (рис. 12.232),

$$LO = H.$$

$$\text{В } \triangle LOK (\angle LOK = 90^\circ): OK = H \operatorname{ctg} \beta, LK = \frac{H}{\sin \beta}.$$

$$\text{В } \triangle LOD (\angle LOD = 90^\circ): OD = H \operatorname{tg} \alpha.$$

$\triangle EKD$  — прямоугольный и равнобедренный,

$$\begin{aligned} EK = KD = OD - OK &= H(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta) = \\ &= H \frac{\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = -\frac{H \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = S_{\triangle ELF} = EK \cdot LK = -\frac{H^2 \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin^2 \beta}; H = \sin \beta \sqrt{-\frac{S \cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta)}}.$$

$$\text{Ответ: } \sin \beta \sqrt{-\frac{S \cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta)}}.$$

**12.383.** Вершина конуса находится в центре шара, а основание конуса касается поверхности шара. Полная поверхность конуса равна поверхности шара. Найти угол между образующей и высотой конуса.

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел (рис. 12.233). Пусть образующая конуса  $OA = l$ , радиус его основания  $CA = r$ , радиус шара  $OC = R$ ,  $\angle AOC$

между образующей и высотой конуса равен  $\alpha$ .

$$\text{В } \triangle ACO (\angle ACO = 90^\circ): r = R \operatorname{tg} \alpha, l = \frac{R}{\cos \alpha}.$$

$$\text{Полная поверхность конуса } S_1 = \pi r(r + l) = \pi R^2 \operatorname{tg} \alpha \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right),$$

поверхность шара  $S_2 = 4\pi R^2$ .

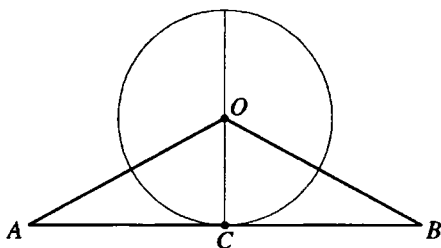


Рис. 12.233

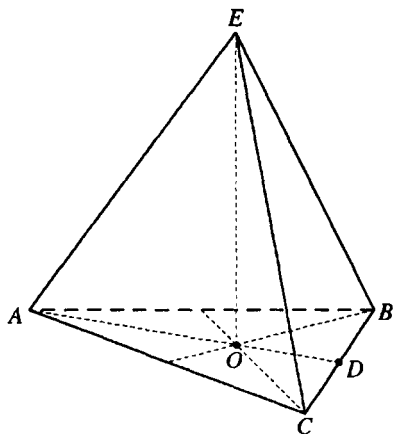


Рис. 12.234

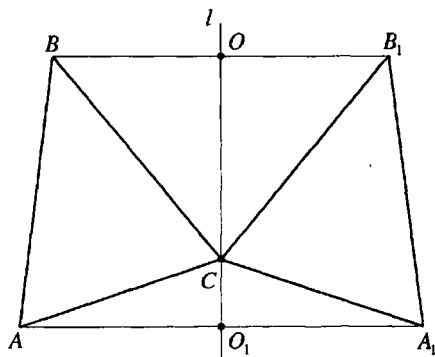


Рис. 12.235

Так как  $S_1 = S_2$  и  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , то

$$\pi R^2 \operatorname{tg} \alpha \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) = 4\pi R^2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha \left( \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 4 - \operatorname{tg}^2 \alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = (4 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha = 16 - 8 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha \Leftrightarrow 9 \operatorname{tg}^2 \alpha = 16 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}; \alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$ .

**12.384.** Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна  $c$ , а меньший из острых углов равен  $\alpha$ . Наибольшее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол  $\beta$ . Найти объем пирамиды, если ее высота проходит через точку пересечения медиан основания.

*Решение.*

Пусть  $EO$  — высота пирамиды  $EABC$  (рис. 12.234),  $O$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AB = c$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ .

Тогда  $BC$  — наименьшая сторона основания, а медиана  $AD$ , проведенная к этой стороне, — наибольшая медиана,  $OA > OB$  и  $OA > OC$   
 $\Rightarrow EA$  — наибольшее боковое ребро пирамиды и  $\angle EAO = \beta$ .

В  $\triangle ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ):  $BC = c \sin \alpha$ ;  $AC = c \cos \alpha \Rightarrow$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} c^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha;$$

$$CD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} c \sin \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{В } \Delta ACD (\angle ACD = 90^\circ): AD &= \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{4} c^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{1}{2} c \sqrt{4 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} c \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

$$OA = \frac{2}{3} AD = \frac{1}{3} c \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

$$\text{В } \Delta AOE (\angle AOE = 90^\circ): EO = AO \operatorname{tg} \angle EAO = \frac{1}{3} c \operatorname{tg} \beta \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot EO = \frac{c^3}{36} \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{c^3}{36} \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

**12.385.** Сторона правильного треугольника равна  $a$ . Треугольник вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника вне его, проходящей через вершину треугольника и составляющей со стороной угла  $\alpha$ . Найти объем тела вращения и выяснить, при каком значении  $\alpha$  этот объем является наибольшим.

*Решение.*

Точки  $B_1$  и  $A_1$  симметричны точкам  $B$  и  $A$  относительно прямой  $l$ , проходящей через вершину  $C$  равностороннего  $\Delta ABC$  ( $AB = a$ ) и являющейся осью вращения из условия задачи (рис. 12.235),  $O$  — середина  $BB_1$ ,  $O_1$  — середина  $AA_1$ ,  $\angle BCO = \alpha$ . Тогда  $\angle ACO_1 = 120^\circ - \alpha$ .

$V_1$  — объем усеченного конуса с осевым сечением  $ABB_1A_1$ ,

$V_2$  и  $V_3$  — объемы конусов с осевыми сечениями  $BCB_1$  и  $ACA_1$ .

Объем тела вращения  $V = V_1 - (V_2 + V_3)$ .

Если  $OC = h_1$ ,  $O_1C = h_2$ ,  $OB = r$ ,  $O_1A = R$ , то

$$V = V_1 - (V_2 + V_3) = \frac{1}{3} \pi (h_1 + h_2) (R^2 + Rr + r^2) - \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 -$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{3}\pi R^2 h_2 &= \frac{\pi}{3}(R^2 h_1 + Rr h_1 + r^2 h_1 + R^2 h_2 + Rr h_2 + r^2 h_2 - r^2 h_1 - R^2 h_2) = \\
 &= \frac{\pi}{3}(R^2 h_1 + Rr h_1 + r^2 h_2 + Rr h_2) = \frac{\pi}{3}(R+r)(h_1 R + h_2 r)
 \end{aligned}$$

В  $\triangle BOC$  ( $\angle BOC = 90^\circ$ ):  $r = a \sin \alpha$ ;  $h_1 = a \cos \alpha$ .

В  $\triangle AO_1C$  ( $\angle AO_1C = 90^\circ$ ):  $R = a \sin(120^\circ - \alpha)$ ;  $h_2 = a \cos(120^\circ - \alpha)$ .

Таким образом

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3}\pi a^3 (\sin \alpha + \sin(120^\circ - \alpha)) (\cos \alpha \sin(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ - \alpha) \sin \alpha) = \\
 &= \frac{1}{3}\pi a^3 \cdot 2 \sin 60^\circ \cos(60^\circ - \alpha) \sin 120^\circ = \\
 &= \frac{2}{3}\pi a^3 \sin^2 60^\circ \cos(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}\pi a^3 \cos(60^\circ - \alpha)
 \end{aligned}$$

Свое наибольшее значение объем принимает при  $\cos(60^\circ - \alpha) = 1$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

Ответ:  $\frac{\pi a^3}{2} \cos(60^\circ - \alpha)$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

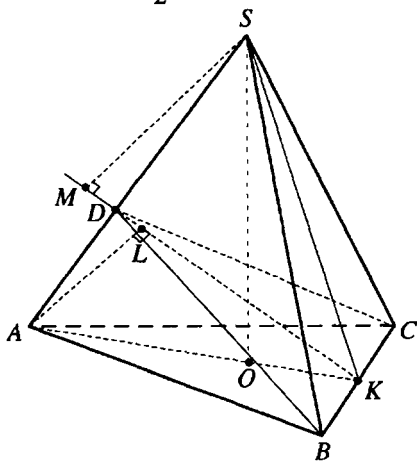


Рис. 12.236

Тогда  $\angle SKD = \alpha - \gamma$ ,  $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $OK = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$  и из  $\triangle SOK$  ( $\angle SOK = 90^\circ$ ):

$$SK = \frac{OK}{\cos \angle SKO} = \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos \alpha}$$

**12.386.** Боковая грань правильной треугольной пирамиды  $SABC$  составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Через сторону  $BC$  основания и точку  $D$  на боковом ребре  $AS$  проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если  $AD : DS = k$ .

*Решение.*

Пусть  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABC$  (рис. 12.236),  $K$  — середина  $BC$ ,  $\triangle BCD$  — сечение пирамиды,  $\angle SKO = \alpha$ ,  $AB = a$ , искомым  $\angle DKA = \gamma$ .

$BC \perp \text{пл. } ASK$ ,  $пл. BDC \perp \text{пл. } ASK$ . В плоскости  $ASK$  проведем перпендикуляры  $AL$  и  $SM$  на прямую  $DK$ . Тогда  $AL \perp \text{пл. } BDC$ ,  $SM \perp \text{пл. } BDC$

Если  $CM = h_1$ ,  $AL = h_2$ , то из  $\triangle ALK$  ( $\angle ALK = 90^\circ$ ):  $h_2 = AK \sin \gamma = \frac{a\sqrt{3}}{2} \sin \gamma$ .

$$\text{В } \triangle SMK (\angle SMK = 90^\circ): h_1 = SK \sin(\alpha - \gamma) = \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos \alpha} \sin(\alpha - \gamma)$$

$$\triangle SMD \sim \triangle AMD \Rightarrow$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{AD}{DS} \Leftrightarrow \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \sin \gamma}{\frac{a\sqrt{3}}{6 \cos \alpha} \sin(\alpha - \gamma)} = k \Leftrightarrow \frac{3 \cos \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha - \gamma)} = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos \alpha \sin \gamma = k \sin \alpha \cos \gamma - k \cos \alpha \sin \gamma \Leftrightarrow (k+3) \sin \gamma \cos \alpha = k \sin \alpha \cos \gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \gamma = \frac{k}{k+3} \operatorname{tg} \alpha; \gamma = \operatorname{arctg} \left( \frac{k}{k+3} \operatorname{tg} \alpha \right)$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \left( \frac{k}{k+3} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

**12.387.** Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом  $\alpha$  между боковыми сторонами. Пирамида помещена в некоторый цилиндр так, что ее основание оказалось вписанным в основание этого цилиндра, а вершина совпала с серединой одной из образующих цилиндра. Объем цилиндра равен  $V$ . Найти объем пирамиды.

*Решение.*

Пусть  $a$  – боковая сторона основания пирамиды,  $h$  – высота пирамиды,  $H$  – высота цилиндра,  $R$  – радиус основания цилиндра – радиус окружности, описанной около основания пирамиды.

Тогда  $a = 2R \sin \left( 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2R \cos \frac{\alpha}{2}$ , площадь основания пирамиды

$$S = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha = 2R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha, H = \frac{V}{\pi R^2}, h = \frac{H}{2} = \frac{V}{2\pi R^2}.$$

Объем пирамиды

$$V_1 = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \cdot 2R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \cdot \frac{V}{2\pi R^2} = \frac{V \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}{3\pi}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{V \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}{3\pi}.$$

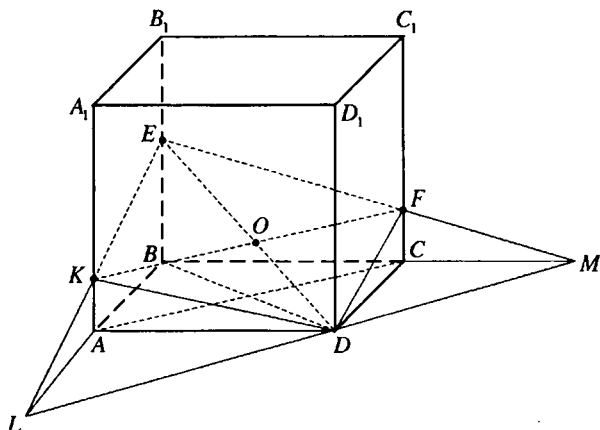


Рис. 12.237

**12.388.** Через вершину квадрата, лежащего в основании правильной призмы, проведена плоскость параллельно противоположной диагонали квадрата под углом  $\alpha$  к плоскости основания. Найти углы многоугольника в сечении призмы этой плоскостью (предполагается, что высота призмы достаточно велика для того, чтобы этим сечением оказался четырехугольник).

*Решение.*

Пусть четырехугольник  $DKEF$  – сечение правильной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , из условия задачи (рис. 12.237),  $L$  – точка пересечения прямых  $AB$  и  $KE$ ,  $M$  – прямых  $BC$  и  $EF$ . Таким образом, прямая  $ML$  есть линия пересечения плоскости основания и плоскости сечения, проходит через точку  $D$  и параллельна прямой  $AC$ .

$BD \perp AC, AC \parallel LM \Rightarrow BD \perp LM$ . Так как  $BD$  – проекция  $ED$  на плоскость основания, то  $ED \perp LM, \angle EDB$  – угол наклона секущей плоскости к плоскости основания призмы,  $\angle EDB = \alpha, AC \perp ED$ . Противоположные грани призмы параллельны, следовательно  $EK \parallel FD, EF \parallel KD \Rightarrow KDEF$  – параллелограмм.

Так как прямая  $AC$  параллельна плоскости сечения, прямая  $KF$  – линия пересечения секущей плоскости с плоскостью  $A_1 AC$ , то  $AC \parallel KF \Rightarrow KF \perp ED \Rightarrow DKEF$  – ромб.

$$\text{Если } AC = BD = KF = a, \text{ то из } \triangle EBD (\angle EDB = 90^\circ): ED = \frac{a}{\cos \alpha}.$$

$O$  – точка пересечения  $KF$  и  $ED$ .  $\operatorname{tg} \angle KDO = \frac{KO}{DO} = \frac{KF}{DE} = \cos \alpha$ . Таким образом,  $\angle KDO = \operatorname{arctg}(\cos \alpha)$ ,  $\angle KDF = 2\angle KDO = 2\operatorname{arctg}(\cos \alpha)$ ,  $\angle EKD = 180^\circ - 2\operatorname{arctg}(\cos \alpha)$

Ответ:  $2\operatorname{arctg}(\cos \alpha)$ ,  $180^\circ - 2\operatorname{arctg}(\cos \alpha)$ .

12.389. Большее основание равнобедренной трапеции равно  $a$ , а острый угол равен  $\alpha$ . Диагональ трапеции перпендикулярна ее боковой стороне. Трапеция вращается вокруг ее большего основания. Найти объем тела вращения.

Решение.

Шестиугольник  $ABECDK$  (рис. 12.238) – осевое сечение тела, полученного в результате вращения равнобокой трапеции  $ECDK$  около ее большего основания,  $EK = a$ ,

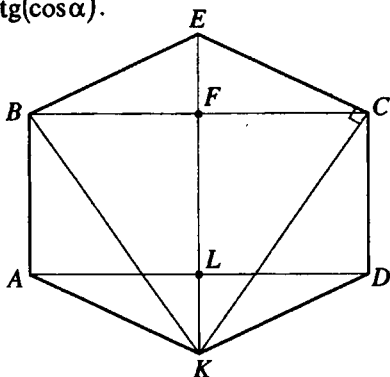


Рис. 12.238

$\angle KEC = \alpha$ ,  $KC \perp EC$  (рис. 12.238).  $DL$  и  $CF$  – высоты трапеции  $ECDK$ .

$$\text{В } \triangle ECK \left( \angle ECK = \frac{\pi}{2} \right): EC = EK \cos \angle KEC = a \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{В } \triangle EFC \left( \angle EFC = \frac{\pi}{2} \right): EF &= EC \cos \angle KEC = a \cos^2 \alpha; CF = \\ &= EC \sin \angle KEC = a \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

$V_1$  — объем цилиндра с осевым сечением  $ABCD$ ,  $V_2$  — объем конуса с осевым сечением  $BEC$ .

Искомый объем тела вращения:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + 2V_2 = \pi \cdot FC^2 \cdot CD + \frac{2}{3} \pi \cdot FC^2 \cdot EF = \pi \cdot FC^2 \left( CD + \frac{2}{3} EF \right) = \\ &= \pi \cdot FC^2 \left( CD + 2EF - 2EF + \frac{2}{3} EF \right) = \pi \cdot FC^2 \left( EK - \frac{4}{3} EF \right) = \\ &= \pi a^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \left( a - \frac{4}{3} a \cos^2 \alpha \right) = \frac{\pi a^3}{4} \sin^2 2\alpha \left( 1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha \right) = \\ &= \frac{\pi a^3}{3} \sin^2 2\alpha \left( \frac{3}{4} - \cos^2 \alpha \right) = \frac{\pi a^3}{3} \sin^2 2\alpha \left( \cos^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \alpha \right) = \end{aligned}$$



$$= \frac{\pi a^3}{3} \sin^2 2\alpha \left( \frac{1 + \cos \frac{\pi}{3}}{2} - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) = \frac{\pi a^3}{3} \sin^2 2\alpha \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\pi a^3}{3} \sin^2 2\alpha \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right)$$

Ответ:  $\frac{\pi a^3}{3} \sin^2 2\alpha \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right)$

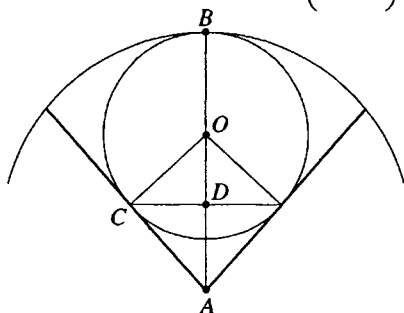


Рис. 12.239

**12.390.** В шаровой сектор радиуса  $R$  вписан шар (рис. 12.239). Найти радиус окружности касания поверхностей шара и сектора, если центральный угол в осевом сечении шарового сектора равен  $\alpha$ .

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение данной совокупности тел.

В  $\triangle OCA \left( \angle OCA = \frac{\pi}{2} \right)$ :

$OA = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ , где  $r$  — радиус данного шара.

$$R = AB = AO + OB = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} + r = r \cdot \frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$r = \frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right)}$$

$\triangle CDO$  и  $\triangle ACO$  — прямоугольные с общим острым углом при вершине  $O$ . Тогда  $\angle OCD = \angle OAC = \frac{\alpha}{2}$ . В  $\triangle CDO \left( \angle CDO = \frac{\pi}{2} \right)$  искомый ради-

ус окружности касания  $DC = CO \cos \angle OCD = r \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right)}$ .

Ответ:  $\frac{R \sin \alpha}{4 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right)}$ .

## ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

**13.211.** Цифры некоторого трехзначного числа составляют геометрическую прогрессию. Если в этом числе поменять местами цифры сотен и единиц, то новое трехзначное число будет на 594 меньше искомого. Если же в искомом числе зачеркнуть цифру сотен и в полученном двузначном числе переставить его цифры, то новое двузначное число будет на 18 меньше числа, выраженного двумя последними цифрами искомого числа. Найти это число.

*Решение.*

Пусть искомое число имеет вид  $100x + 10y + z$ , где  $x, y, z$  образуют геометрическую прогрессию, это значит  $xz = y^2$ . Из условия получаем:

$$100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 594 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - z = 6; 10y + z = 10z + y + 18 \Rightarrow y - z = 2.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} xz = y^2, \\ x - z = 6, \Rightarrow x = 8, y = 4, z = 2. \\ y - z = 2, \end{cases}$$

*Ответ:* 842.

**13.212.** На покупку велосипедов спортивный клуб выделил  $n$  руб. Так как вследствие снижения цен стоимость каждого велосипеда уменьшилась на  $a$  руб., то велосипедов было куплено на  $b$  больше, чем предполагалось. Сколько купили велосипедов?

*Решение.*

Пусть купили  $x$  велосипедов, хотели купить —  $(x - b)$ . Цена одного велосипеда до снижения цен:  $\frac{n}{x - b}$ , после снижения:  $\frac{n}{x - b} - a$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \left( \frac{n}{x-b} - a \right) x = n, \text{ откуда } x &= \frac{ab + \sqrt{a^2 b^2 + 4nba}}{2a} = \\ &= \frac{ab + \sqrt{ab(ab + 4n)}}{2a}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{ab + \sqrt{ab(ab + 4n)}}{2a}.$$

**13.213.** Обычно к выполнению некоторого задания привлекаются одновременно два механизма. Производительность этих механизмов не одинакова и при совместном действии задание выполняется ими за 30 ч. Однако на этот раз совместная работа двух механизмов продолжалась только 6 ч, после чего первый механизм был остановлен и всю остальную часть задания выполнил второй механизм за 40 ч. За какое время такое же задание может выполнить каждый механизм, работая отдельно с присущей ему производительностью?

*Решение.*

Пусть весь объем работы равен единице, первый механизм выполняет задание за  $x$  часов, а второй — за  $y$  часов. Тогда производительность первого механизма  $\frac{1}{x}$ , а второго —  $\frac{1}{y}$ , общая производительность при совместной работе  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ . Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{30}, \\ 1 - 6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{40}{y}, \end{cases} \Rightarrow x = 75 \text{ ч}, y = 50 \text{ ч}.$$

*Ответ:* за 75 и 50 ч.

**13.214.** Согнутые из проволоки окружность и прямоугольник приложены так, что окружность проходит через две вершины  $A$  и  $B$  и касается стороны  $CD$  (32.1). Найти отношение сторон прямоугольника, если известно, что его периметр в 4 раза больше радиуса окружности.

*Решение.*

Пусть  $AB = x$ ;  $CB = y$ .

Тогда (см. рис. 13.1):  $QC = a$ ,

$$x = 2QC = 2a, \quad y = R + \sqrt{R^2 - a^2}.$$

По условию  $2x + 2y = 4R$  или  
 $x + y = 2R$ .

Значит  $2a + R + \sqrt{R^2 - a^2} = 2R$ , отку-

$$\text{да } a = \frac{4}{5}R. \text{ Значит } x = \frac{8}{5}R; \quad y = \frac{2}{5}R,$$

$$\text{откуда } \frac{x}{y} = \frac{4}{1}.$$

*Ответ:* 4 : 1.

**13.215.** От пункта  $A$  вдоль шоссе удаляется гонщик, поддерживающий все время постоянную скорость  $a$  км/ч. Спустя 30 мин из того же пункта стартовал второй гонщик с постоянной скоростью  $1,25a$  км/ч. Через сколько минут после старта первого гонщика был отправлен из того же пункта третий гонщик, если известно, что он развил скорость  $1,5a$  км/ч и одновременно со вторым гонщиком догнал первого?

*Решение.*

Пусть  $t$  — время, которое проехал третий гонщик до того, как догнал первого. Значит он проехал  $(1,5a \cdot t)$  км. Первый гонщик ехал  $t_1$  ч.

$$\text{Значит } t_1 \cdot a = t \cdot 1,5a.$$

Второй гонщик ехал  $\left(t_1 - \frac{1}{2}\right)$  ч и проехал  $1,25a \left(t_1 - \frac{1}{2}\right)$  км.

$$\text{Решив систему } \begin{cases} a \cdot t_1 = 1,5at, \\ 1,25a \left(t_1 - \frac{1}{2}\right) = 1,5at, \end{cases} \text{ находим } t = \frac{5}{3} \text{ ч; } t_1 = 2,5 \text{ ч.}$$

Значит третий гонщик выехал после старта первого через

$$t_1 - t = \frac{5}{6} \text{ ч} = 50 \text{ мин.}$$

*Ответ:* через 50 минут.

**13.216.** Два мотоциклиста отправляются одновременно навстречу друг другу из пунктов  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми равно 600 км. В

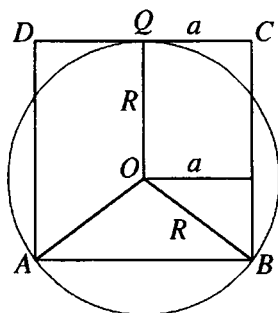


Рис.13.1

то время как первый проходит 250 км, второй проходит 200 км. Найти скорости движения мотоциклистов, считая их движения равномерными, если первый мотоциклист приходит в  $B$  на 3 ч раньше, чем второй в  $A$ .

*Решение.*

Пусть  $x$  км/ч — скорость первого мотоциклиста;  $y$  км/ч — скорость второго. Первый проходит 250 км за  $\frac{250}{x}$  ч; второй — 200 км за  $\frac{200}{y}$  ч. По условию  $\frac{250}{x} = \frac{200}{y}$ .

Первый приходит в  $B$  за  $\frac{600}{x}$  ч; второй в  $A$  за  $\frac{600}{y}$  ч.

По условию  $\frac{600}{x} + 3 = \frac{600}{y}$ .

Решив систему  $\begin{cases} \frac{250}{x} = \frac{200}{y}, \\ \frac{600}{x} + 3 = \frac{600}{y}, \end{cases}$  находим  $x = 50$  км/ч,  $y = 40$  км/ч.

*Ответ:* 40 и 50 км/ч.

**13.217.** Дорога между поселками  $A$  и  $B$  сначала имеет подъем, а потом спуск. Велосипедист, двигаясь на спуске со скоростью, на  $a$  км/ч большей, чем на подъеме, затрачивает на путь от  $A$  до  $B$  ровно  $t$  ч, а на обратный путь от  $B$  до  $A$  — половину этого времени. Найти скорость велосипедиста на подъеме и на спуске, если расстояние между поселками  $b$  км.

*Решение.*

Пусть  $x$  км/ч — скорость велосипедиста на подъеме,  $(x + a)$  км/ч — на спуске.

Пусть  $y$  км — длина подъема,  $(b - y)$  км — спуска. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{b-y}{x+a} = t, \\ \frac{b-y}{x} + \frac{y}{x+a} = \frac{t}{2}. \end{cases}$$

Решив систему, находим  $x = \frac{4b - 3at + \sqrt{9t^2 a^2 + 16b^2}}{6t}$ .

$$x + a = \frac{4b + 3at + \sqrt{9t^2 a^2 + 16b^2}}{6t}.$$

*Ответ:*  $\frac{4b \pm 3at + \sqrt{9t^2 a^2 + 16b^2}}{6t}$  км/ч;  $4b > 3at$ .

**13.218.** Результат умножения двух положительных чисел, полученный вычислителем, оказался ему сомнительным. Для проверки он решил разделить результат на больший сомножитель. В частном получилось 17 и в остатке 8. Тогда вычислитель понял свою ошибку: оказалось, что цифра десятков, записанная им в произведении, больше истинной цифры десятков на 6. Какие числа перемножал вычислитель, если известно, что их разность равна 36?

*Решение.*

Пусть  $a$  — меньшее число;  $(a + 36)$  — большее.

Правильное произведение этих чисел:  $(a^2 + 36a)$ , а число, полученное вычислителем:  $(a^2 + 36a + 60)$ .

По условию  $17(a + 36) + 8 = a^2 + 36a + 60$ , откуда  $a = 16$ ,  $a + 36 = 52$ .

*Ответ:* 16 и 52.

**13.219.** Население города ежегодно увеличивается на  $1/50$  наличного числа жителей. Через сколько лет население утроится?

*Решение.*

Используя формулу сложных процентов  $x \left( \frac{1}{50} + 1 \right)^n = 3x$ , находим

$$n = \log_3 1,02 \approx 55.$$

*Ответ:*  $\approx 55$  лет.

**13.220.** Юноша пошел к железнодорожной станции, до которой от его дома было 10,5 км. Через полчаса из того же дома вслед за юношей по той же дороге вышел его брат, который, идя со скоростью 4 км/ч, догнал юношу, передал ему забытую им вещь, тут же повернул обратно и пошел с прежней скоростью. С какой скоростью шел юноша, если известно, что он шел всю дорогу равномерно, а его брат вернулся домой в тот момент, когда юноша подошел к станции?

*Решение.*

Пусть  $x$  км/ч — скорость юноши. Брат догнал юношу через  $t$  ч после выхода из дома. Тогда юноша дошел до железной дороги за  $(2t + 0,5)$  ч.

$$\text{По условию } \begin{cases} x(2t + 0,5) = 10,5, \\ x(t + 0,5) = 4t, \end{cases} \text{ откуда } x = 3 \text{ км/ч.}$$

*Ответ:* 3 км/ч.

**13.221.** Из пунктов  $A$  и  $C$  в пункт  $B$  выехали одновременно два всадника и несмотря на то, что  $C$  отстоял от  $B$  на 20 км дальше, чем  $A$  от  $B$ , прибыли в  $B$  одновременно. Найти расстояние от  $C$  до  $B$ , если всадник, выехавший

из  $C$ , проезжал каждый километр на 1 мин 15 с скорее, чем всадник, выехавший из  $A$ , и всадник, выехавший из  $A$ , приехал в  $B$  через 5 ч.

*Решение.*

Пусть  $AB = x$  км,  $BC = x + 20$  км.

Скорость всадника из  $A$  —  $\frac{x}{5}$  км/ч, всадника из  $C$  —  $\frac{x+20}{5}$  км/ч.

По условию  $\frac{5}{x} - \frac{5}{x+20} = \frac{1}{48}$ , откуда  $x = 60$  км.

Тогда  $CB = x + 20 = 80$  км.

*Ответ:* 80 км.

**13.222.** Расстояние между станциями  $A$  и  $B$  равно 103 км. Из  $A$  в  $B$  вышел поезд и, пройдя некоторое расстояние, был задержан, а потому оставшийся до  $B$  путь проходил со скоростью, на 4 км/ч большей прежней. Найти первоначальную скорость поезда, если известно, что оставшийся до  $B$  путь был на 23 км длиннее пути, пройденного до задержки, и на прохождение пути после задержки было затрачено на 15 мин больше, чем на прохождение пути до задержки.

*Решение.*

Пусть  $x$  км/ч — первоначальная скорость поезда,  $t$  ч — время до его остановки.

Тогда  $\begin{cases} x \cdot t = 40, \\ (x + 4) \left( t + \frac{1}{4} \right) = 63, \end{cases}$  откуда  $x = 80$  км/ч.

*Ответ:* 80 км/ч.

**13.223.** Пункт  $C$  расположен в 12 км от пункта  $B$  вниз по течению. Рыбак отправился на лодке в пункт  $C$  из пункта  $A$ , расположенного выше пункта  $B$ . Через 4 ч он прибыл в  $C$ , а на обратный путь затратил 6 ч. В другой раз рыбак воспользовался моторной лодкой, увеличив тем самым собственную скорость передвижения относительно воды втрое, и дошел от  $A$  до  $B$  за 45 мин. Требуется определить скорость течения, считая ее постоянной.

*Решение.*

Пусть  $v_T$  км/ч — скорость течения;  $v_L$  км/ч — скорость лодки;  $a$  км/ч — расстояние между  $A$  и  $B$ . Тогда по условию

$$\begin{cases} (v_L + v_T) \cdot 4 = 12 + a, \\ (v_L - v_T) \cdot 6 = 12 + a, \\ a = (3v_L + v_T) \cdot 0,75, \end{cases} \text{ откуда } v_T = 1 \text{ км/ч.}$$

*Ответ:* 1 км/ч.

13.224. Юноша, возвращаясь на велосипеде из отпуска, проехал 246 км и потратил на этот путь на один день больше половины числа дней, оставшихся после этого до конца отпуска. Теперь у юноши две возможности проехать остальные 276 км так, чтобы прибыть домой точно к сроку: проезжать ежедневно на  $h$  км больше, чем первоначально, или сохранить прежнюю норму ежедневного пути, превысив ее лишь один раз — в последний день пути — на  $2h$  км. За сколько дней до конца отпуска отправился юноша домой, если известно, что искомое число дней — целое?

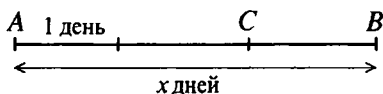


Рис. 13.2

*Решение.*

Пусть отрезок  $AB$  (рис. 13.2) соответствует всему пути юноши и количеству  $x$  дней, за которые он должен проехать при его норме  $V$  км в день. По условию, отрезок времени  $AC$  на 1 больше половины отрезка времени  $CB$ .

$$\text{Таким образом, } AC - 1 = \frac{CB}{2} \Leftrightarrow x - CB - 1 = \frac{CB}{2} \Leftrightarrow CB = \frac{2x - 2}{3} \text{ дней.}$$

Возьмем за 1 путь, соответствующий отрезку  $CB$ . В случае первого вариан-

$$\text{та } \frac{2x - 2}{3} (V + h) = 1, \text{ а в случае второго } \left( \frac{2x - 2}{3} - 1 \right) V + (V + 2h) = 1. \text{ Ис-}$$

ключая из этих двух уравнений  $V$ , учитывая, что  $x$  — целое, получаем  $x = 4$ .

*Ответ:* за 4 дня.

13.225. Некоторый заказ выполняют в мастерской №1 на 3,6 ч дольше, чем в мастерской №2, и на 10 ч дольше, чем в мастерской №3. Если при тех же условиях работы мастерские №1 и №2 объединятся для выполнения заказа, то срок его выполнения окажется таким же, как в одной мастерской №3. На сколько часов больше или меньше одного семичасового рабочего дня длится выполнение указанного заказа в мастерской №3?

*Решение.*

Пусть  $x$  ч — время выполнения заказа в мастерской №3. Тогда в 1-й мастерской это время равно  $x + 10$  ч, во второй —  $x + 6,4$  ч.

$$\text{По условию } \frac{1}{x + 10} + \frac{1}{x + 6,4} = \frac{1}{x}, \text{ откуда } x = 8 \text{ ч.}$$

Значит выполнение заказа в мастерской №3 длится на 1 час дольше семичасового рабочего дня.

*Ответ:* больше на 1 ч.



**13.226.** Рукопись в 80 страниц отдана двум машинисткам. Если первая машинистка начнет перепечатывать рукопись через 3 ч после второй, то каждая из них перепечатает по половине рукописи. Если же обе машинистки начнут работать одновременно, то через 5 ч останутся непечатанными 15 страниц. За какое время может перепечатать рукопись каждая машинистка в отдельности?

*Решение.*

Пусть 1-я машинистка может перепечатать рукопись за  $x$  ч; 2-я — за

$y$  ч. 1-я печатает одну страницу за  $\frac{x}{80}$  ч, 2-я — за  $\frac{y}{80}$  ч. Скорость работы

1-й:  $\frac{80}{x}$  стр./ч, 2-й:  $\frac{80}{y}$  стр./ч.

$$\text{По условию: } \begin{cases} \frac{40y}{80} - \frac{40x}{80} = 3, \\ \frac{80}{x} \cdot 5 + \frac{80}{y} \cdot 5 = 80 - 15, \end{cases} \quad \text{откуда } x = 10 \text{ ч, } y = 16 \text{ ч.}$$

*Ответ:* 16 и 10 ч.

**13.227.** Двум рабочим была поручена работа. Второй приступил к работе на час позже первого. Через 3 ч после того, как первый приступил к работе, им осталось выполнить  $\frac{9}{20}$  всей работы. По окончании работы оказалось, что каждый выполнил половину всей работы. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить всю работу?

*Решение.*

Пусть 1-й рабочий может выполнить всю работу за  $x$  ч, второй — за

$y$  ч. Производительность 1-го:  $\frac{1}{x}$ ; 2-го:  $\frac{1}{y}$ .

$$\text{По условию } \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot 3 + \frac{1}{y} \cdot 2 = 1 - \frac{9}{20}, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1, \end{cases} \quad \text{откуда } x = 10 \text{ ч, } y = 8 \text{ ч.}$$

*Ответ:* 10 и 8 ч.

**13.228.** Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того, как первый проработал 2 ч, а второй 5 ч, оказалось, что они выполнили половину всей работы. Проработав совместно еще 3 ч, они установили, что им осталось выполнить 0,05 всей работы. За какой промежуток времени каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

*Решение.*

Пусть 1-й рабочий может выполнить всю работу за  $x$  ч, второй — за  $y$  ч.

Производительность 1-го:  $\frac{1}{x}$ , второго —  $\frac{1}{y}$ .

$$\text{По условию } \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot 2 + \frac{1}{y} \cdot 5 = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 3 = 1 - 0,05, \end{cases} \quad \text{откуда } x = 12 \text{ ч; } y = 15 \text{ ч.}$$

*Ответ:* 12 и 15 ч.

**13.229.** Найти четыре числа, образующих пропорцию, если известно, что сумма крайних членов равна 14, сумма средних членов равна 11, а сумма квадратов таких четырех чисел равна 221.

*Решение.*

Пусть пропорция имеет вид  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . По условию  $a + d = 14$ ,  $c + b = 11$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 221$ .

$$\text{Решив систему } \begin{cases} ad = bc, \\ a + d = 14, \\ b + c = 11, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 221, \end{cases}$$

находим  $a = 12$ ;  $b = 8$ ;  $c = 3$ ;  $d = 2$ .

*Ответ:* 12, 8, 3, 2.

**13.230.** Имеются три положительных двузначных числа, обладающих следующим свойством: каждое число равно неполному квадрату суммы своих цифр. Требуется найти два из них, зная, что второе число на 50 единиц больше первого.

*Решение.*

Так как одно число больше другого на 50, то число единиц у обоих чисел одинаково. Пусть  $10x_1 + y$ ,  $10x_2 + y$  — искомые числа.

По условию  $10x_1 + y - (10x_2 + y) = 50$ , откуда  $x_1 - x_2 = 5$  (1), также имеем систему

$$\begin{cases} 10x_1 + y = x_1^2 + x_1y + y^2, \\ 10x_2 + y = x_2^2 + x_2y + y^2, \end{cases} \quad \text{откуда}$$

$10(x_1 - x_2) = x_1^2 - x_2^2 + (x_1 - x_2)y$  или  $50 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 5y$ , откуда  $10 = x_1 + x_2 + y$  (2).

Из (1) имеем  $x_1 = 5 + x_2$ . Значение  $x_1$  подставляем в (2):

$$10 = 5 + 2x_2 + y, \text{ откуда } x_2 = \frac{5 - y}{2}.$$

Так как  $1 \leq x_2 \leq 9$  и  $x_2$  — натуральное число, то  $y = 1$  или  $y = 3$ .

Если  $y = 1$ , то  $x_2 = 2$  и из (1)  $x_1 = 7$ , т.е. получаем числа 71 и 21. Но для них не выполняется наша система.

Если  $y = 3$ , то  $x_2 = 1$  и  $x_1 = 6$ , т.е. имеем числа 63 и 13, для которых верна наша система.

*Ответ:* 13 и 63.

**13.231.** Сплавляли два сорта чугуна с разным процентным содержанием хрома. Если одного сорта взять в 5 раз больше другого, то процентное содержание хрома в сплаве вдвое превысит процентное содержание хрома в меньшей из сплавляемых частей. Если же взять одинаковое количество обоих сортов, то сплав будет содержать 8% хрома. Определить процентное содержание хрома в каждом сорте чугуна.

*Решение.*

Пусть в одном сплаве  $x\%$  хрома, во втором  $y\%$ , т.е.  $x$  кг хрома в 1 кг чугуна одного сорта,  $y$  кг — в 1 кг другого сорта.

По условию 
$$\begin{cases} 5x + y = 6 \cdot 2y, \\ x + y = 2 \cdot 0,08, \end{cases}$$

откуда  $x = 0,11 = 11\%$ ,  $y = 0,05 = 5\%$ .

*Ответ:* 5 и 11%.

**13.232.** От станции железной дороги до пляжа 4,5 км. Мальчик и рейсовый автобус одновременно отправились от станции к пляжу. Через 15 мин мальчик встретил автобус, возвращающийся от пляжа, и успел пройти еще  $9/28$  км от места первой встречи с автобусом, как его догнал тот же автобус, который дошел до станции и опять отправился к пляжу. Найти скорости мальчика и автобуса, считая, что они постоянны и ни мальчик, ни автобус в пути не останавливались, но у пляжа и на станции автобус делал остановки продолжительностью в 4 мин каждая.

*Решение.*

Пусть  $v_m, v_a$  — скорости мальчика и автобуса соответственно.

По условию имеем систему

$$\begin{cases} \frac{15}{60} v_m + \frac{15-4}{60} v_a = 2 \cdot 4,5, \\ \frac{9}{28v_m} = \frac{4}{60} + \frac{2 \cdot \frac{15}{60} v_m + \frac{9}{28}}{v_a}, \end{cases}$$

откуда  $v_m = 3$  км/ч,  $v_a = 45$  км/ч.

*Ответ:* 3 и 45 км/ч.

**13.233.** Турист возвращался из отпуска на велосипеде. На первом участке пути, составляющем 246 км, он проезжал в среднем за каждый день на 15 км меньше, чем проезжал за каждый день на последнем участке пути, составляющем 276 км. Он прибыл домой точно в срок — к концу последнего дня отпуска. Известно также, что на преодоление первого участка пути ему потребовалось на один день больше половины числа дней, оставшихся после этого до конца отпуска. За сколько дней до конца отпуска отправился турист домой?

*Решение.*

Пусть турист проехал 267 км за  $x$  дней; и 246 км за  $\frac{x}{2} + 1$ . На первом участке в 246 км его скорость была  $v$  км/день, на втором в 276 км —  $(v + 15)$  км/день.

Тогда 
$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2} + 1\right)v = 246, \\ x(v + 15) = 276, \end{cases}$$

откуда  $x = 2$ .

Значит, турист отправился домой за  $x + \frac{x}{2} + 1 = 4$  дня до конца отпуска.

*Ответ:* за 4 дня.

**13.234.** Имелось два сплава меди с разным процентным содержанием меди в каждом. Число, выражающее в процентах содержание меди в первом сплаве, на 40 меньше числа, выражающего в процентах содержание меди во втором сплаве. Затем оба эти сплава сплавил вместе, после чего содержание меди составило 36%. Определить процентное содержание меди в каждом сплаве, если в первом сплаве меди было 6 кг, а во втором — 12 кг.

*Решение.*

Пусть в первом сплаве 6 кг меди составляют  $x\%$ , во втором 12 кг —  $y\%$ ;  
 $m_1$  — масса первого сплава,  $m_2$  — масса второго. По условию

$$\begin{cases} 0,01x \cdot m_1 = 6, \\ 0,01y \cdot m_2 = 12, \\ 0,36(m_1 + m_2) = 18, \\ x + 40 = y, \end{cases}$$

откуда  $x = 20\%$ ,  $y = 60\%$ .

*Ответ:* 20 и 60%.

**13.235.** В заезде на одну и ту же дистанцию участвовали два автомобиля и мотоцикл. Второму автомобилю на всю дистанцию потребовалось на 1 мин больше, чем первому. Первый автомобиль двигался в 4 раза быстрее мотоцикла. Какую часть дистанции в минуту проходил второй автомобиль, если он проходил в минуту на  $1/6$  часть дистанции больше, чем мотоцикл, а мотоцикл прошел дистанцию меньше, чем за 10 мин?

*Решение.*

Пусть  $l$  — длина дистанции,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_m$  — скорости первого, второго автомобилей и мотоцикла соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} \frac{l}{v_2} - \frac{l}{v_1} = \frac{1}{60}, \\ v_1 = 4v_m, \\ \frac{v_2}{60} - \frac{v_m}{60} = \frac{l}{6}, \end{cases}$$

откуда  $v_1 = 120l$ ,  $v_2 = 40l$ ,  $v_m = 30l$  или  $v_1 = 20l$ ,  $v_2 = 15l$ ,  $v_m = 5l$ .

Так как  $\frac{l}{v_m} < \frac{10}{60}$ , то значение  $v_m = 5l$  не подходит, поэтому  $v_2 = 40l$ .

Тогда второй автомобиль за 1 мин проходит  $\frac{40l}{60l} = \frac{2}{3}$  дистанции.

*Ответ:*  $\frac{2}{3}$ .

**13.236.** Мастер дает сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. К концу первых двух часов он выиграл 10% от числа всех играемых партий, а 8 противников свели вничью свои партии с мастером. За следующие два часа мастер выиграл 10% партий у оставшихся противников, две партии проиграл, а остальные 7 партий закончил вничью. На скольких досках шла игра?

*Решение.*

Пусть игра шла на  $x$  досках. Когда за первые 2 часа было сыграно  $(0,1x + 8)$  партий, за вторые 2 ч:  $0,1(x - 0,1x - 8) + 7 + 2$ .

Тогда

$$0,1x + 8 + 0,1(x - 0,1x - 8) + 7 + 2 = x,$$

откуда  $x = 20$ .

*Ответ:* на 20 досках.

**13.237.** Задумано целое положительное число. К его цифровой записи приписали справа какую-то цифру. Из получившегося нового числа вычли квадрат задуманного числа. Разность оказалась в 8 раз больше задуманного числа. Какое число задумано и какая цифра была приписана?

*Решение.*

Если было задумано число  $x$ , то приписав справа цифру  $y$ , мы получаем число  $10x + y$ .

По условию  $10x + y - x^2 = 8x \Leftrightarrow x^2 - 2x - y = 0$ ,  $x = 1 \pm \sqrt{1 + y}$ . Тогда возможные значения  $y$  таковы: 0, 3, 8. Отсюда задуманное число есть 2, 3, 4 соответственно.

*Ответ:* приписали 0, либо 3, либо 8; было задумано соответственно 2, 3, 4.

**13.238.** Стрелку в тире были предложены следующие условия: каждое попадание в цель вознаграждается пятью жетонами, но за каждый промах отбирается три жетона. Стрелок был не очень метким. После последнего ( $n$ -го) выстрела у него не осталось ни одного жетона. Из скольких выстрелов состояла серия и сколько было удачных выстрелов, если  $10 < n < 20$ ?

*Решение.*

Пусть было  $k$  попаданий, а значит  $n - k$  промахов.

Тогда  $5k - 3(n - k) = 0$ ,  $8k = 3n \Rightarrow k = \frac{3n}{8}$ . Так как  $n$  и  $k$  — натуральные числа, то  $n = 8m$ . Для  $10 < n < 20$  подходит только значение  $n = 16$ . Итак, было сделано 16 выстрелов, из них 6 удачных.

*Ответ:* из 16 выстрелов 6 удачных.

**13.239.** К цифровой записи некоторого задуманного двузначного числа приписали справа это же число и из полученного таким образом числа вычли квадрат задуманного числа. Разность разделили на 4% от квадрата задуманного числа; в частном получили половину задуманного числа, а в остатке — задуманное число. Какое число задумано?

*Решение.*

Пусть  $a$  — задуманное число. Тогда новое число  $100a + a = 101a$ .

По условию  $101a - a^2 = 0,04a^2 \cdot \frac{1}{2} a + a$ , откуда  $a = 50$ .

*Ответ:* 50.

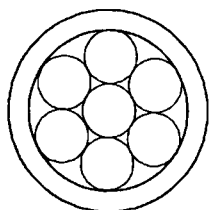


Рис. 13.3

**13.240.** В плоское кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями, вложено семь равных соприкасающихся дисков (рис. 13.3). Площадь кольца равна сумме площадей всех семи дисков. Доказать, что ширина кольца равна радиусу одного диска.

*Решение.*

Пусть  $r$  — радиус диска;  $R_1$  — радиус внешней окружности;  $R_2$  — внутренней окружности. Пло-

щадь дисков —  $7 \cdot \pi r^2$ ; площадь кольца —  $\pi(R_1^2 - R_2^2)$ .

По условию  $7 \cdot \pi r^2 = \pi(R_1^2 - R_2^2)$  (1),  $R_2 = 3r$  (рис. 13.3).

Тогда допустим  $R_1 - R_2 = r$ , откуда  $R_1 = 4r$ .

Подставив в (1), получим

$$16r^2 - 9r^2 = 7r^2,$$

$$7r^2 = 7r^2,$$

$$0 = 0.$$

Что и требовалось доказать.

**13.241.** К цифровой записи некоторого задуманного положительно-го числа приписали справа еще какое-то положительное однозначное число и из полученного таким образом нового числа вычли квадрат задуманного числа. Эта разность оказалась больше задуманного числа во столько раз, сколько составляет дополнение приписанного числа до 11. Доказать, что так будет получаться тогда и только тогда, когда приписанное число равно задуманному.

*Решение.*

Пусть  $a$  — задуманное число,  $x$  — приписанное;  $10a + x$  — новое.

По условию  $10a + x - a^2 = (11 - x)a$ , откуда  $a = x$ .

Что и требовалось доказать.

**13.242.** Два одинаковых бассейна одновременно начали наполняться водой. В первый бассейн поступает в час на  $30 \text{ м}^3$  больше воды, чем во второй. В некоторый момент в двух бассейнах вместе оказалось столько воды, сколько составляет объем каждого из них. После этого через 2 ч 40 мин наполнился первый бассейн, а еще через 3 ч 20 мин — второй. Сколько воды поступало в час в каждый бассейн?

*Решение.*

Пусть  $x + 30 \text{ м}^3/\text{ч}$  — скорость наполнения первого бассейна,  $x \text{ м}^3/\text{ч}$  — второго;  $V \text{ м}^3$  — объем бассейнов;  $t$  — время, когда в бассейнах было  $V \text{ м}^3$ .

По условию 
$$\begin{cases} (x+30)t + xt = V, \\ \left(t + 2\frac{2}{3}\right)(x+30) = V, \\ (t+6)x = V, \end{cases}$$

откуда  $x = 60$ .

*Ответ:* 60 и 90 м<sup>3</sup>.

**13.243.** Одна из трех бочек наполнена водой, а остальные пустые. Если вторую бочку наполнить водой из первой бочки, то в первой останется  $1/4$  часть бывшей в ней воды. Если затем наполнить третью бочку из второй, то во второй останется  $2/9$  количества содержащейся в ней воды. Если, наконец, из третьей бочки вылить воду в пустую первую, то для ее наполнения потребуется еще 50 ведер. Определить вместимость каждой бочки.

*Решение.*

Пусть  $x$  ведер — вместимость первой бочки, тогда вместимость второй —  $\frac{3}{4}x$ , третьей —  $\frac{7}{9}\left(\frac{3}{4}x\right)$ .

По условию  $\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{4}x + 50 = x$ ,

откуда  $x = 120$  ведер,

$$\frac{3}{4}x = 90 \text{ ведер,}$$

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{4}x = 70 \text{ ведер.}$$

*Ответ:* 120, 90 и 70 ведер.

**13.244.** Два шарика помещены в цилиндрическую банку, диаметр которой 22 см (рис. 13.4). Если влить в банку 5 л воды, то покроются ли полностью водой оба шарика, диаметры которых 10 и 14 см?

*Решение.*

Рассмотрим плоскость  $\beta$ , которая перпендикулярна основанию цилиндра и содержит прямую, на которой лежат центры шаров  $O_1$  и  $O_2$ .  $\Delta O_1BO_2$  — прямоугольный,  $O_1O_2 = 5 + 7 = 12$  см,  $O_2B = 22 - (5 + 7) = 10$  см.

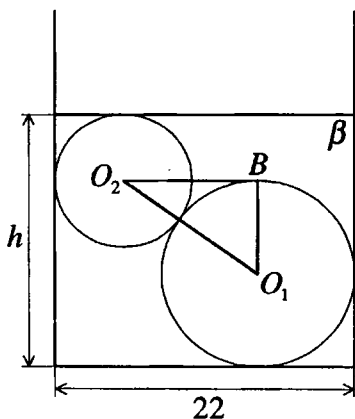


Рис. 13.4



По теореме Пифагора:  $BO_1 = \sqrt{12^2 - 10^2} = 2\sqrt{11}$  см.

Тогда  $h = 7 + 2\sqrt{11} + 5 = 12 + 2\sqrt{11}$  см. Объем воды, необходимый для покрытия шаров:  $V = h \cdot \pi \cdot \frac{22^2}{4} - \frac{4}{3} \pi (7^3 + 5^3) = 5123 \text{ см}^3$ .

Так как  $5123 > 5000$  (см<sup>3</sup>), то шарики полностью не покроются водой.

*Ответ:* немного не покроются.

**13.245.** Цистерну в течение 5 ч наполнили водой. При этом в каждый следующий час поступление воды в цистерну уменьшалось в одно и то же число раз по сравнению с предыдущим. Оказалось, что в первые четыре часа было налито воды вдвое больше, чем в последние четыре часа. Каков объем цистерны, если известно еще, что за первые два часа в нее было налито 48 м<sup>3</sup> воды?

*Решение.*

Пусть в первый час в цистерну поступило  $b$  м<sup>3</sup> воды. Тогда во второй час поступило  $bq$  м<sup>3</sup>, где  $q > 0$ ,  $q < 1$ , в третий —  $bq^2$  м<sup>3</sup>, в четвертый —  $bq^3$  м<sup>3</sup>, в пятый —  $bq^4$  м<sup>3</sup>.

По условию

$$\begin{cases} b + bq + bq^2 + bq^3 = 2(bq + bq^2 + bq^3 + bq^4) \\ b + bq = 48, \end{cases}$$

откуда  $q = \frac{1}{2}$ ,  $b = 32$  м<sup>3</sup>.

Тогда объем цистерны

$$V = \frac{b(1 - q^5)}{1 - q} = 62 \text{ м}^3.$$

*Ответ:* 62 м<sup>3</sup>.

**13.246.** Квадрат и равносторонний треугольник заполнены одинаковым количеством равных кругов, касающихся друг друга и сторон этих фигур. Сколько кругов для этого потребуется, если к стороне треугольника примыкает на 14 кругов больше, чем к стороне квадрата (рис. 13.5).

*Решение.*

Пусть к стороне квадрата примыкает  $n$  кругов, тогда в квадрате имеется  $n^2$  кругов. К стороне треугольника примыкает  $n + 14$  кругов, следовательно, в треугольнике содержится

$$1 + 2 + \dots + (n + 14) = \frac{(n + 15)(n + 14)}{2} \text{ кругов.}$$

$$\text{По условию } n^2 = \frac{(15 + n)(n + 14)}{2} \Rightarrow n = 35.$$

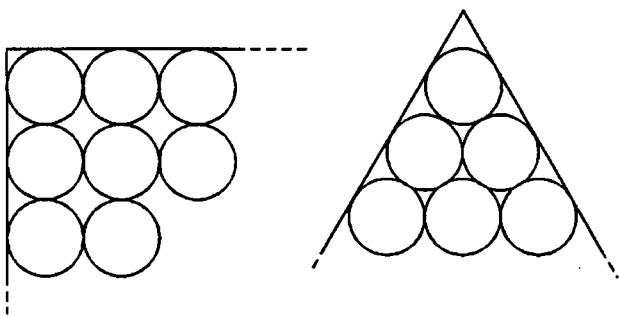


Рис. 13.5

Таким образом, каждая фигура содержит по 1225 кругов.

*Ответ:* 1225 кругов на каждую фигуру.

**13.247.** Из молока, жирность которого составляет 5%, изготавливают творог жирностью 15,5%, при этом остается сыворотка жирностью 0,5%. Сколько творога получится из 1 т молока?

*Решение.*

Пусть получено  $x$  т творога жирностью 15,5%, тогда останется  $(1-x)$  т сыворотки жирностью 0,5%. Отсюда в 1 т молока содержится

$$\frac{15,5x}{100} + \frac{0,5(1-x)}{100} = \frac{15x + 0,5}{100} \text{ т жира.}$$

По условию  $\frac{15x + 0,5}{100} = \frac{5}{100}$ , откуда  $x = 0,3 = 300$  кг.

*Ответ:* 300 кг.

**13.248.** Имеются два одинаковых куска тканей. Стоимость всего первого куска на 126 руб. больше стоимости второго. Стоимость четырех метров ткани из первого куска на 135 руб. превышает стоимость трех метров ткани из второго куска. Покупательница приобрела 3 м ткани из первого куска и 4 м ткани из второго куска и заплатила за все 382 руб. 50 коп. Сколько метров ткани было в каждом из этих кусков? Какова стоимость одного метра ткани каждого куска?

*Решение.*

Пусть  $x$  руб. — стоимость второго куска,  $x + 126$  — стоимость первого,  $u$  м — длина одного куска.

Тогда стоимость 1 м первой ткани  $\frac{x+126}{u}$  руб., 1 м второй —  $\frac{x}{u}$  руб.

$$\text{По условию } \begin{cases} 4 \frac{x+126}{u} - 3 \frac{x}{u} = 135, \\ 3 \frac{x+126}{u} + 4 \frac{x}{u} = 382,5, \end{cases}$$

$$\text{откуда } \begin{cases} \frac{x+126}{y} = 67,5, \\ \frac{x}{y} = 45, \end{cases} \quad \text{и, значит, } y = 5,6 \text{ м.}$$

*Ответ:* 5,6 м; 67 руб. 50 коп. и 45 руб.

**13.249.** Было намечено разделить премию поровну между наиболее отличившимися сотрудниками предприятия. Однако выяснилось, что сотрудников, достойных премии, на три человека больше, чем предполагалось. В таком случае каждому пришлось бы получить на 400 руб. меньше. Профсоюз и администрация нашли возможность увеличить общую сумму премии на 9000 руб., в результате чего каждый премированный получил 2500 руб. Сколько человек получили премию?

*Решение.*

Пусть премию должны были получить  $x$  человек и  $y$  — первоначальная общая сумма премии.

По условию

$$\begin{cases} (x+3)\left(\frac{y}{x} - 400\right) = y, \\ y + 9000 = 2500(x+3), \end{cases}$$

откуда  $x = 15$  человек.

Значит, премию получили  $x + 3 = 15 + 3 = 18$  человек.

*Ответ:* 18.

**13.250.** Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней  $216 \text{ м}^3$  древесины. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготавливала  $8 \text{ м}^3$  сверх плана, поэтому за день до срока было заготовлено  $232 \text{ м}^3$  древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была бригада заготавливать по плану?

*Решение.*

Пусть бригада должна была заготавливать  $x \text{ м}^3$  древесины в день и должна была работать  $\frac{216}{x}$  дней. За 3 первых дня она заготовила  $3x \text{ м}^3$ , а за

остальные  $(x+8)\left(\frac{216}{x} - 4\right)$ .

По условию  $3x + (x+8)\left(\frac{216}{x} - 4\right) = 232$ , откуда  $x = 24 \text{ м}^3$ .

*Ответ:*  $24 \text{ м}^3$ .

**13.251.** Часовая и минутная стрелки совпадают в полночь, и начинается новый день. В котором часу этого нового дня впервые снова совпадут часовая и минутная стрелки, если допустить, что стрелки часов движутся без скачков?

*Решение.*

Скорость минутной стрелки примем за 1, тогда скорость часовой стрелки —  $\frac{1}{12}$ . Стрелки совпадут, когда  $\frac{1}{12} \cdot t + 60 = t$ , где  $t$  — время движения стрелок.

Решая уравнение, находим  $t = \frac{720}{11}$  (мин).

*Ответ:* 1 ч  $5\frac{5}{11}$  мин.

**13.252.** Дежурный монтер спустился по движущемуся вниз эскалатору метро. Весь его путь от верхней площадки до нижней продолжался 24 с. Затем он поднялся и в том же темпе снова спустился вниз, но теперь уже по неподвижному эскалатору. Известно, что спуск продолжался 42 с. За сколько секунд спустился бы человек по движущемуся вниз эскалатору, стоя на ступеньке?

*Решение.*

Пусть  $l$  — путь по неподвижному эскалатору,  $v_{\text{эск.}}$  — скорость эскалатора,  $v_{\text{монт.}}$  — скорость монтера по неподвижному эскалатору.

Тогда  $\frac{l}{v_{\text{монт.}}} = 42$ ,  $\frac{l}{v_{\text{монт.}} + v_{\text{эск.}}} = 24$ . Нужно найти  $\frac{l}{v_{\text{эск.}}}$ . Получаем

$$\frac{v_{\text{монт.}}}{l} = \frac{1}{42}, \frac{v_{\text{монт.}}}{l} + \frac{v_{\text{эск.}}}{l} = \frac{1}{24}, \frac{v_{\text{эск.}}}{l} = \frac{1}{24} - \frac{1}{42} = \frac{1}{56} \Rightarrow \frac{l}{v_{\text{эск.}}} = 56 \text{ с.}$$

*Ответ:* за 56 с.

**13.253.** Для гидродинамических исследований изготовлена небольшая модель канала. К этой модели подведено несколько труб одинакового сечения, вводящих воду, и несколько труб другого, но тоже одинакового сечения, предназначенных для удаления воды. Если сразу открыть четыре вводящих и три выводящих трубы, то через 5 ч в модели прибавится  $1000 \text{ м}^3$  воды. Если одновременно открыть на 2 ч две вводящих и две выводящих трубы, то увеличение объема воды составит  $180 \text{ м}^3$ . Сколько воды пропускает за час одна вводящая и сколько пропускает одна выводящая труба?

*Решение.*

Пусть  $x \text{ м}^3/\text{ч}$  пропускает вводящая труба,  $y \text{ м}^3/\text{ч}$  — выводящая. По условию

$$\begin{cases} 5(4x - 3y) = 1000, \\ 2(2x - 2y) = 180, \end{cases}$$

откуда  $x = 65 \text{ м}^3$ ,  $y = 20 \text{ м}^3$ .

*Ответ:* 65 и 20  $\text{м}^3$ .

**13.254.** Первым отправился по намеченному маршруту путешественник *А*. Вторым путешественник *Б* отправился следом за *А* спустя 45 мин. Намереваясь догнать путешественника *А*, скорость которого  $v_1$  км/ч, путешественник *Б* поехал со скоростью  $v_2$  км/ч ( $v_2 > v_1$ ). Через сколько минут после момента отправления путешественника *А* с турбазы должен выехать *В*, чтобы догнать *А* одновременно с *Б*, если известно, что *В* поедет со скоростью  $v_3$  км/ч ( $v_3 > v_2$ ).

*Решение.*

Пусть  $x$  мин. — искомое время,  $t$  мин. — время, за которое путешественник *А* дошел до места встречи.

По условию

$$\begin{cases} v_1 t = v_2 (t - 45), \\ v_1 t = v_3 (t - x), \end{cases}$$

откуда  $x = \frac{45 \cdot v_2 (v_3 - v_1)}{v_3 (v_2 - v_1)}$  мин.

*Ответ:* через  $\frac{45 \cdot v_2 (v_3 - v_1)}{v_3 (v_2 - v_1)}$  мин.

**13.255.** Три пловца должны проплыть в бассейне дорожку длиной 50 м, немедленно повернуть обратно и вернуться к месту старта. Сначала стартует первый, через 5 с — второй, еще через 5 с — третий. В некоторый момент времени, еще не достигнув конца дорожки, пловцы оказались на одном расстоянии от старта. Третий пловец, доплыв до конца дорожки и повернув назад, встретил второго в 4 м от конца дорожки, а первого — в 7 м от конца дорожки. Найти скорость третьего пловца.

*Решение.*

Пусть  $t$  — время, за которое третий пловец догнал двух первых;  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  — скорости пловцов. Тогда  $v_1(t + 10) = v_2(t + 5) = v_3 t$ , откуда

$$\frac{v_2}{v_3 - v_2} = \frac{2v_1}{v_3 - v_1} \quad (1).$$

По условию  $\begin{cases} \frac{50 + 4}{v_3} = \frac{50 - 4}{v_2} - 5, \\ \frac{50 + 7}{v_3} = \frac{50 - 7}{v_1} - 10. \end{cases}$

Используя уравнение (1), решаем систему и найдем  $v_3 = \frac{22}{15}$  (м/с).

Ответ:  $\frac{22}{15}$  м/с.

**13.256.** Прибор, применяемый для определения диаметра крупной детали ( $D > 2\text{ м}$ ), указывает высоту  $H$  сегмента при постоянном расстоянии  $2L$  между центрами опорных шариков прибора (рис. 13.6). Требуется выразить формулой соответствие между искомым диаметром  $D$  детали и измеряемой высотой  $H$  ее сегмента при постоянных  $L$  и  $d$ , где  $d$  — диаметр каждого из опорных шариков.

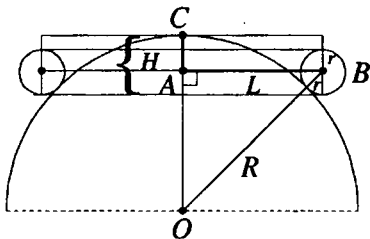


Рис. 13.6

*Решение.*

Сделаем более геометрический рисунок и построения на нем. Пусть

$R = \frac{D}{2}$ ,  $r = \frac{d}{2}$ . Из  $\triangle OAB$  ( $\angle OAB = 90^\circ$ ) имеем

$$(R+r)^2 = L^2 + (R - (H-r))^2 \Leftrightarrow 2RH = L^2 + H^2 - H \cdot d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{1}{H}(L^2 + H^2 - Hd).$$

Ответ:  $\frac{1}{H}(L^2 + H^2 - Hd)$ .

**13.257.** Из города  $A$  в город  $B$ , расстояние между которыми 120 км, на мопеде отправился курьер. Через 1 ч после этого из  $A$  на мотоцикле выехал второй курьер, который, нагнав первого и передав ему поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в  $A$  в тот момент, в который первый достиг  $B$ . Какова скорость первого курьера, если скорость второго равна 50 км/ч?

*Решение.*

Пусть  $v$  км/ч — скорость первого курьера; до места встречи он ехал  $t$  ч.

По условию  $vt = 50(t-1)$ . В  $B$  курьер приехал через  $\frac{120}{v}$  ч, а второй курьер

возвратился в  $A$  через  $\left(\frac{2vt}{50} + 1\right)$  ч.

По условию  $\frac{2vt+1}{50} + 1 = \frac{120}{v}$ .

Решив систему 
$$\begin{cases} vt = 50(t-1), \\ \frac{2vt}{50} + 1 = \frac{120}{v}, \end{cases}$$

находим  $v = 30$  км/ч.

*Ответ:* 30 км/ч.

**13.258.** Поезд идет от станции  $A$  к станции  $B$ . На некотором участке пути, примыкающем к станции  $B$ , производились ремонтные работы, и на этом участке поезду разрешена скорость, составляющая только  $1/n$  часть первоначальной скорости, вследствие чего поезд пришел на станцию  $B$  с опозданием на  $a$  ч. На другой день фронт ремонтных работ приблизился к станции  $B$  на  $b$  км, и при тех же условиях поезд опоздал только на  $c$  ч. Найти скорость поезда.

*Решение.*

Пусть  $x$  км/ч — скорость поезда,  $t$  ч — время, которое затрачивает поезд на прохождение от  $A$  к  $B$  без остановки,  $S$  км — расстояние, которое прошел поезд после остановки.

По условию 
$$\begin{cases} \frac{xt - S}{x} + \frac{S}{\frac{x}{n}} = t + a, \\ \frac{xt - (S - b)}{x} + \frac{S - b}{\frac{x}{n}} = t + c, \end{cases}$$

откуда  $x = \frac{b(n-1)}{a-c}$ ,  $n > 1$ ,  $a > c$ .

*Ответ:*  $\frac{b(n-1)}{a-c}$  км/ч,  $n > 1$ ,  $a > c$ .

**13.259.** Пароход через 2 ч после отправления от пристани  $A$  останавливается на 1 ч и затем продолжает путь со скоростью, равной  $0,8$  первоначальной, вследствие чего опаздывает к пристани  $B$  на  $3,5$  ч. Если бы остановка произошла на  $180$  км дальше, то при тех же остальных условиях пароход опоздал бы в  $B$  на  $1,5$  ч. Найти расстояние  $AB$ .

*Решение.*

Пусть  $AB = x$  км,  $v$  км/ч — скорость парохода.

По условию 
$$\begin{cases} \frac{x}{v} + 3,5 = 2 + 1 + \frac{x - 2v}{0,8v}, \\ \frac{x}{v} + 1,5 = \frac{2v + 180}{v} + 1 + \frac{x - 2v - 180}{0,8v}, \end{cases}$$

откуда  $x = 270$  км.

*Ответ:* 270 км.

**13.260.** Две материальные частицы, находясь на расстоянии 295 м одна от другой, одновременно начали двигаться навстречу друг другу. Первая частица продвигается равномерно со скоростью 15 м/с, а вторая в первую секунду продвинулась на 1 м, а в каждую следующую — на 3 м больше, чем в предыдущую. На какой угол переместится секундная стрелка часов за время, прошедшее от начала движения частиц до их встречи?

*Решение.*

Пусть до встречи частиц прошло  $t$  с. За это время первая частица прошла  $15t$  м, а вторая  $\frac{2 + 3(t - 1)}{2} \cdot t$  (использовалась формула суммы членов арифметической прогрессии).

По условию  $\frac{2 + 3(t - 1)}{2} \cdot t + 15t = 295$ , откуда  $t = 10$  с.

Угол отклонения стрелки  $\alpha = \frac{360^\circ}{\frac{60}{10}} = 60^\circ$ .

*Ответ:*  $60^\circ$ .

**13.261.** В полдень из пункта  $A$  в пункт  $B$  вышел пешеход и выехал велосипедист, и в полдень же из  $B$  в  $A$  выехал верховой. Все трое отправились в путь одновременно. Через 2 ч велосипедист и верховой встретились на расстоянии 3 км от середины  $AB$ , а еще через 48 мин встретились пешеход и верховой. Определить скорость каждого и расстояние  $AB$ , если известно, что пешеход движется вдвое медленнее велосипедиста.

*Решение.*

Пусть  $v_1$  км/ч — скорость пешехода,  $2v_1$  км/ч — велосипедиста,  $v_3$  км/ч — верхового,  $x$  км — расстояние  $AB$ .

$$\text{По условию } \begin{cases} 2v_1 \cdot 2 + 2v_3 = x, \\ 2,8v_1 + 2,8v_3 = x, \\ 2v_3 = \frac{x}{2} - 3, \\ 2v_1 \cdot 2 = \frac{x}{2} + 3, \end{cases}$$

откуда  $v_1 = 6$  км/ч;

$2v_1 = 12$  км/ч;

$v_3 = 9$  км/ч;

$x = 42$  км.

*Ответ:* 6, 9 и 12 км/ч; 42 км.



**13.262.** Известно, что свободно падающее тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Если два тела начали падать с одной высоты спустя 5 с одно после другого, то через какое время они будут друг от друга на расстоянии 220,5 м?

*Решение.*

Пусть  $t$  с — искомое время. За это время первое тело пролетит  $4,9t^2$  м, второе  $4,9(t-5)^2$  м.

По условию  $4,9t^2 - 4,9(t-5)^2 = 220,5$ , откуда  $t = 7$  с.

*Ответ:* через 7 с после начала падения первого тела.

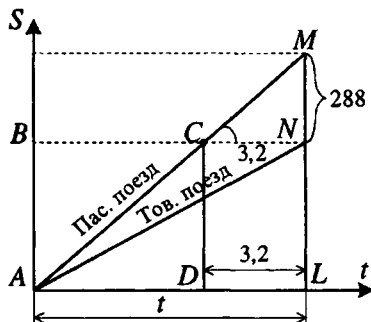


Рис. 13.7

**13.263.** Путь от  $A$  до  $B$  пассажирский поезд проходит на 3 ч 12 мин быстрее товарного. За то время, что товарный поезд проходит путь от  $A$  до  $B$ , пассажирский проходит на 288 км больше. Если скорость каждого увеличить на 10 км/ч, то пассажирский пройдет от  $A$  до  $B$  на 2 ч 24 мин быстрее товарного. Определить расстояние от  $A$  до  $B$ .

*Решение.*

На рис. 13.7 рассматриваются графики движения поездов до изменения скоростей.

Имеем  $\operatorname{tg} \angle MCN = v_{\text{пас.}}^{(0)} = 288 : 3,2 = 90$  км/ч. Если  $v_{\text{тов.}}^{(0)} = x$  км/ч, то

$AB = NL = xt$  км,  $CD = 90(t - 3,2) = xt \Rightarrow t = \frac{288}{90 - x}$ . После изменения

скоростей получаем  $v_{\text{пас.}}^{(1)} = 100$  км/ч,  $v_{\text{тов.}}^{(1)} = x + 10$  км/ч. По условию

$\frac{xt}{x+10} - \frac{xt}{100} = 2,4$ . Подставляя сюда  $t = \frac{288}{90-x}$  и решая полученное уравнение, находим  $x = 50$  км/ч,  $t = 7,2$  ч. Отсюда  $AB = xt = 50 \cdot 7,2 = 360$  км.

*Ответ:* 360 км.

**13.264.** Для того чтобы подняться на обычном лифте на последний этаж восьмизэтажного дома (высота 33 м) при двух 6-секундных промежуточных остановках, нужно затратить столько же времени, сколько его потребуется, чтобы подняться на лифте высотного здания при одной 7-секундной промежуточной остановке на 20-й этаж (высота 81 м). Определить подъемную скорость лифта в высотном здании, зная, что она превышает скорость обычного лифта на 1,5 м/с, но не достигает 5 м/с.

*Решение.*

Пусть  $v_1$  м/с — скорость обычного лифта ( $v_1 \leq 3,5$  м/с),  $v_2$  м/с — лифта в высотном здании,  $v_2 = v_1 + 1,5$  м/с.

По условию

$$\frac{33}{v_1} + 2 \cdot 6 = \frac{81}{v_1 + 1,5} + 7, \text{ откуда } v_1 = 1,5 \text{ м/с, } v_2 = v_1 + 1,5 = 3 \text{ м/с.}$$

*Ответ:* 3 м/с.

13.265. По внутренней области угла  $60^\circ$  прямолинейно движется материальная точка. Выйдя из вершины этого угла, она через некоторый промежуток времени оказалась на расстоянии  $a$  от одной стороны угла и на расстоянии  $b$  от другой стороны. Далее она изменила направление движения и по кратчайшему пути просто упала на ту сторону, к которой она была ближе. Найти длину пути, пройденного точкой, если  $a < b$ .

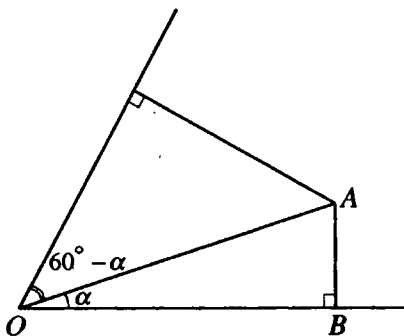


Рис. 13.8

*Решение.*

Длина пути, пройденного точкой, равна сумме длин отрезков  $OA$  и  $AB = a$  (рис. 13.8). Получаем

$$OA = \frac{a}{\sin \alpha} \text{ или } OA = \frac{b}{\sin(60^\circ - \alpha)} \Rightarrow \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{2} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2b + a}{a\sqrt{3}}.$$

Так как  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ , то  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}}$ .

Таким образом, искомая длина равняется

$$a + \frac{a}{\sin \alpha} = a + 2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}.$$

$$\text{Ответ: } a + 2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}.$$

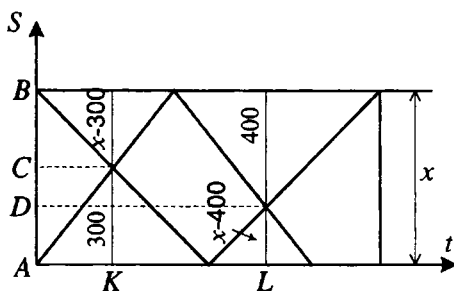


Рис. 13.9

**13.266.** Два спортсмена начинают бег одновременно — первый из  $A$  в  $B$ , второй из  $B$  в  $A$ . Они бегут с не одинаковыми, но постоянными скоростями и встречаются на расстоянии 300 м от  $A$ . Пробежав дорожку  $AB$  до конца, каждый из них тотчас поворачивает назад и встречается другого на расстоянии 400 м от  $B$ . Найти длину  $AB$ .

*Решение.*

Рассмотрим графики бега двух спортсменов (рис. 13.9). Пусть  $AB = x$  м,  $C$  и  $D$  — точки первой и второй встреч,  $v_1$  и  $v_2$  — скорости первого и второго

спортсмена. Тогда  $\frac{300}{v_1} = \frac{x - 300}{v_2}$  (\*). За время, прошедшее между встречами ( $KL$ ), спортсмены пробежали:

$$\text{первый } (x - 300) + 400 = x + 100 \text{ м;}$$

$$\text{второй } 300 + (x - 400) = x - 100 \text{ м.}$$

$$\text{Таким образом } \frac{x + 100}{v_1} = \frac{x - 100}{v_2} (**).$$

$$\text{Из (*) и (**)} \text{ получаем } \frac{x + 100}{300} = \frac{x - 100}{x - 300} \Rightarrow x = 500 \text{ м.}$$

*Ответ:* 500 м.

**13.267.** С одного старта в одном и том же направлении одновременно начали гонки два мотоциклиста: один со скоростью 80 км/ч, другой со скоростью 60 км/ч. Через полчаса с того же старта и в том же направлении отправился третий гонщик. Найти его скорость, если известно, что он догнал первого гонщика на 1 ч 15 мин позже, чем второго.

*Решение.*

Пусть  $x$  км/ч — скорость третьего гонщика. Он догнал первого гонщика через  $t_1$  ч, второго — через  $t_2$  ч. По условию

$$\begin{cases} 80t_1 = x(t_1 - 0,5), \\ 60t_2 = x(t_2 - 0,5), \\ t_1 - t_2 = 1,25, \end{cases}$$

откуда  $x = 100$  км/ч.

Ответ: 100 км/ч.

13.268. Спортсмен стреляет в мишень, отстоящую от него на  $d$  м. Наблюдатель, находящийся на расстоянии  $a$  м от стрелка и  $b$  м от мишени (рис. 13.10), слышит одновременно звук выстрела и звук удара пули в мишень. Найти скорость пули, если скорость звука равна  $v$  м/с.

Решение.

Пусть  $x$  км/ч — скорость пули. Время, за которое звук выстрела достиг наблюдателя  $\frac{a}{v}$  с.

По условию  $\frac{a}{v} = \frac{d}{x} + \frac{b}{v}$ , откуда  $x = \frac{dv}{a-b}$ ,  $a > b$ .

Ответ:  $\frac{dv}{a-b}$  м/с,  $a > b$ .

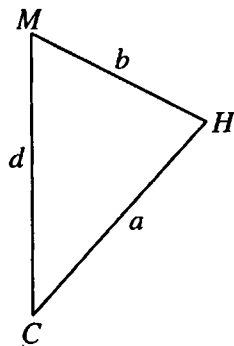


Рис. 13.10

13.269. На пристани с теплохода сошли два пассажира и направились в один и тот же поселок. Один из них первую половину пути шел со скоростью 5 км/ч, а вторую половину — со скоростью 4 км/ч. Другой шел первую половину времени со скоростью 5 км/ч, а вторую половину — со скоростью 4 км/ч и пришел в поселок на 1 мин раньше первого. За какое время каждый из них прошел весь путь и каково расстояние между пристанью и поселком?

Решение.

Пусть  $x$  км — расстояние между пристанью и поселком,  $t$  ч — время, за которое второй пассажир дошел до поселка.

$$\text{По условию } \begin{cases} \frac{x}{2 \cdot 5} + \frac{x}{2 \cdot 4} = t + \frac{1}{60}, \\ 5 \cdot \frac{t}{2} + 4 \cdot \frac{t}{2} = x, \end{cases}$$

откуда  $x = 6$  км;  $t = \frac{4}{3}$  ч = 1 ч 20 мин.

Ответ: 1 ч 21 мин; 1 ч 20 мин; 6 км.

13.270. В Одессу должны прибыть два теплохода с разрывом в 1 ч. Оба теплохода идут с одинаковой скоростью, но обстоятельства сложились так, что первый теплоход опоздал бы на  $t_1$  мин, а второй на  $t_2$  мин. Получив по радио указание о необходимости прибыть без опоздания, оба капитана одновременно увеличили скорости теплоходов: первый — на  $v_1$  км/ч, второй — на  $v_2$  км/ч, в результате чего оба теплохода прибы-

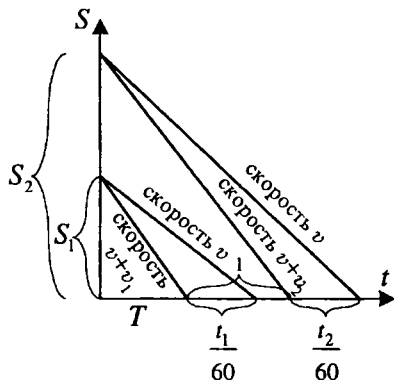


Рис. 13.11

ли в Одессу точно по расписанию. С какой скоростью шли теплоходы до получения сигнала по радио?

*Решение.*

Графическое изображение условий задачи на рис.13.11.

Получаем  $S_1 = (v + v_1)T$ ,  $S_2 = (v_1 + v_2)(T + 1) = v \left( T + 1 + \frac{t_2}{60} \right)$  Упро-

щая и исключая  $T$ , имеем  $v = \frac{60v_1v_2}{v_1t_2 - v_2t_1}$  км/ч.

*Ответ:*  $\frac{60v_1v_2}{v_1t_2 - v_2t_1}$  км/ч.

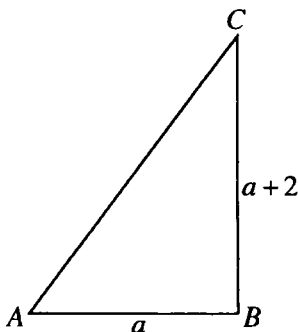


Рис. 13.12

**13.271.** Трасса соревнований по велосипеду представляет собой контур прямоугольного треугольника с разностью катетов в 2 км. При этом его гипотенуза пролегает по проселочной дороге, а оба катета — по шоссе. Один из участников прошел отрезок по проселочной дороге со скоростью 30 км/ч, а оба отрезка по шоссе за то же время со скоростью 42 км/ч. Определить протяженность трассы.

*Решение.*

Протяженность трассы

$$S = AB + BC + AC = a + a + 2 + \sqrt{a^2 + (a+2)^2} \quad (\text{см. рис. 13.12}).$$

По условию  $\frac{\sqrt{a^2 + (a+2)^2}}{30} = \frac{a+a+2}{42}$ , откуда  $a = 8$  км.

$$S = 8 + 8 + 2 + \sqrt{8^2 + 10^2} = 24 \text{ км.}$$

*Ответ:* 24 км.

**13.272.** От почтамта  $A$  отправилась автомашина по направлению к почтовому отделению  $B$ . Через 20 мин за ней выезжает мотоциклист со скоростью 60 км/ч. Догнав автомашину, мотоциклист передал шоферу пакет и тотчас повернул обратно. Автомашина прибыла в  $B$  в тот момент, когда мотоциклист оказался на половине пути от места встречи с автомашиной до  $A$ . Определить скорость автомашины, если путь от  $A$  до  $B$  составляет 82,5 км.

*Решение.*

Пусть  $t$  — время, за которое мотоциклист догнал автомашину,  $v$  — скорость автомобилиста. По условию, имеем систему

$$\begin{cases} v \left( t + \frac{20}{60} \right) = 60 \cdot t, \\ \frac{82,5 - 60 \cdot t}{v} = \frac{t}{2}, \end{cases}$$

откуда  $v = 45$  (км/ч).

*Ответ:* 45 км/ч.

**13.273.** Мяч катится перпендикулярно боковой линии футбольного поля. Предположим, что, двигаясь равномерно замедленно, мяч прокатился в первую секунду 4 м, а в следующую секунду на 0,75 м меньше. Футболист, находящийся первоначально в 10 м от мяча, побежал в направлении движения мяча, чтобы догнать его. Двигаясь равномерно ускоренно, футболист пробежал в первую секунду 3,5 м, а в следующую секунду на 0,5 м больше. За какое время футболист догонит мяч и успеет ли он догнать до выхода мяча за боковую линию, если к линии поля футболисту надо пробежать 23 м?

*Решение.*

Пусть  $t$  с — искомое время. За это время мяч прокатится  $\frac{2 \cdot 4 - 0,75(t-1)}{2} \cdot t$  м, а футболист пробежит  $\frac{2 \cdot 3,5 + 0,5(t-1)}{2} \cdot t$  м. (Использовалась формула суммы  $n$  членов арифметической прогрессии).

По условию

$$\frac{2 \cdot 3,5 + 0,5(t-1)}{2} \cdot t - \frac{2 \cdot 4 - 0,75(t-1)}{2} \cdot t = 10, \text{ откуда } t = 5 \text{ с.}$$

Футболист догонит мяч, пробежав  $\frac{2 \cdot 3,5 + 0,5 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 22,5$  м, на расстоянии 0,5 м до боковой линии.

*Ответ:* через 5 с; за 0,5 м до линии поля.

**13.274.** По графику поезд проходит перегон в 120 км с одной и той же скоростью. Вчера поезд прошел половину перегона с этой скоростью и вынужден был остановиться на 5 мин. Чтобы вовремя прибыть в конечный пункт перегона, машинисту на второй половине перегона пришлось увеличить скорость поезда на 10 км/ч. Сегодня повторилась остановка поезда на середине того же перегона, только задержка продолжалась 9 мин. С какой скоростью машинист вел поезд сегодня на второй половине перегона, если в конечный пункт этого перегона поезд снова прибыл по расписанию?

*Решение.*

Пусть  $x$  км/ч — первоначальная скорость поезда. Учитывая остановку, он пройдет вторую половину перегона за  $\frac{1}{12} + \frac{60}{x+10}$ , откуда  $x = 80$  км/ч.

Пусть  $v$  км/ч — скорость поезда сегодня. Тогда  $\frac{60}{80} = 0,15 + \frac{60}{v}$ , откуда  $v = 100$  км/ч.

*Ответ:* 100 км/ч.

**13.275.** Расстояние между городом  $A$  и станцией  $F$  по железной дороге равно 185 км. Пригородный электропоезд идет от  $A$  первые 40 км в гору, следующие 105 км по ровному месту и остальные 40 км снова в гору. В гору поезд идет на 10 км/ч медленнее, чем по ровному месту. На этом пути имеются станции  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$  на расстояниях 20, 70, 100 и 161 км от  $A$  (рис. 13.13), и на каждой из них поезд стоит 3 мин. Найти время прихода поезда в  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$ , если известно, что он вышел из  $A$  в 8 ч и пришел в  $F$  в 10 ч 22 мин того же дня.

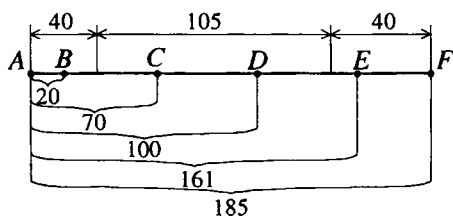


Рис. 13.13

поезд идет на 10 км/ч медленнее, чем по ровному месту. На этом пути имеются станции  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$  на расстояниях 20, 70, 100 и 161 км от  $A$  (рис. 13.13), и на каждой из них поезд стоит 3 мин. Найти время прихода поезда в  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$ , если известно, что он вышел из  $A$  в 8 ч и пришел в  $F$  в 10 ч 22 мин того же дня.

*Решение.*

Пусть  $v$  км/ч — скорость поезда на подъеме,  $(v + 10)$  км/ч — на ровной местности.

По первому подъему поезд шел  $\left(\frac{40}{v} + 0,05\right)$  ч, по ровной местности  $\left(\frac{105}{v+10} + 0,1\right)$  ч и по второму подъему  $\left(\frac{40}{v} + 0,05\right)$  ч.

По условию

$$\frac{40}{v} + 0,05 + \frac{105}{v+10} + 0,1 + \frac{40}{v} + 0,05 = \frac{71}{30},$$

откуда  $v = 80$  км/ч.

До станции  $B$  поезд шел  $\frac{20}{80} = \frac{1}{4}$  ч = 15 мин и пришел в  $B$  в 8 ч 15 мин;

до  $C$  из  $B$ :

$$0,05 + \frac{20}{80} + \frac{30}{80+10} = 38 \text{ мин, в } C \text{ пришел в 8 ч 53 мин;}$$

из  $C$  в  $D$ :

$$0,05 + \frac{30}{90} = 23 \text{ мин, в } D \text{ пришел в 9 ч 16 мин;}$$

из  $D$  в  $E$ :

$$0,05 + \frac{45}{90} + \frac{16}{80} = 0,75 \text{ ч} = 45 \text{ мин, в } E \text{ пришел в 10 ч 01 мин.}$$

*Ответ:* 8 ч 15 мин; 8 ч 53

мин; 9 ч 16 мин; 10 ч 01 мин.

**13.276.** По шоссе от завода  $C$  до станции  $B$  железной дороги на 28 км дальше, чем от станции  $A$  той же дороги. Расстояние от  $A$  до  $B$  через  $C$  на 2 км больше, чем длина участка  $AB$  железной дороги (рис. 13.14). Доставка тонны груза из  $C$  в  $A$  стоит 130 руб., а по железной дороге из  $A$  в  $B$  — 260 руб. Перевозка тонны груза на 1 км автотранспортом стоит на 32 руб. дороже, чем по железной дороге. Определить расстояния  $AC$ ,  $BC$ ,  $AB$ .

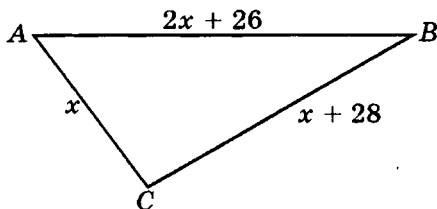


Рис. 13.14

*Решение.*

Пусть  $AC = x$  км,  $BC = x + 28$  км,  $AB = 2x + 26$  км;  $y$  руб. — цена перевозки тонны груза на 1 км по железной дороге;  $y + 32$  руб. — автотранспортом.

По условию

$$\begin{cases} x(y + 32) = 130, \\ (2x + 26)y = 260, \end{cases}$$

откуда  $x = 3,25$ . Итак,  $AC = 3,25$  км;



$BC = 3,25 + 28 = 31,25$  км;  $AB = (31,25 + 3,25) - 2 = 32,5$  км.

*Ответ:* 3,25; 31,25 и 32,5 км.

**13. 277.** Учебный самолет летел со скоростью 220 км/ч. Когда ему осталось пролететь на 385 км меньше, чем он пролетел, самолет увеличил скорость до 330 км/ч. Средняя скорость на всем пути оказалась равной 250 км/ч. Какое расстояние пролетел самолет?

*Решение.*

Пусть самолет со скоростью 220 км/ч пролетел  $x$  км, со скоростью 330 км/ч —  $(x - 385)$  км. На это он затратил  $\left(\frac{x}{220} + \frac{x - 385}{330}\right)$  ч.

По условию  $\frac{x}{220} + \frac{x - 385}{330} = \frac{2x - 385}{250}$ , где  $(2x - 385)$  км — весь путь.

Из уравнения находим  $x = 880$  км. Значит, все расстояние равно  $2 \cdot 880 - 385 = 1375$  км.

*Ответ:* 1375 км.

**13.278.** Пассажир поезда знает, что на данном участке пути скорость этого поезда равна 40 км/ч. Как только мимо окна начал проходить встречный поезд, пассажир пустил секундомер и заметил, что встречный поезд проходил мимо окна в течение 3 с. Определить скорость встречного поезда, если известно, что его длина 75 м.

*Решение.*

Пусть  $x$  — скорость встречного поезда.

По условию  $(40 + x) \cdot \frac{3}{3600} = 75 \cdot 10^{-3}$ , откуда  $x = 50$  (км/ч).

*Ответ:* 50 км/ч.

**13.279.** Два контрольных пункта делят лыжную трассу на три участка одинаковой длины. Известно, что путь, состоящий из первого и второго участков вместе, лыжник прошел со средней скоростью  $a$  м/мин; путь, состоящий из второго и третьего участков вместе, он прошел со средней скоростью  $b$  м/мин. Средняя скорость лыжника на втором участке была такой же, как средняя скорость для первого и третьего участков вместе. Какова средняя скорость лыжника на всей трассе в целом и на каждом участке этой трассы в отдельности? Провести анализ условий существования реального решения задачи.

*Решение.*

Длину одного участка трассы примем за 1. Пусть  $t_1, t_2, t_3$  — время, за которое лыжник проходит каждый участок трассы. По условию

$$\begin{cases} \frac{2}{t_1 + t_2} = a, \\ \frac{2}{t_2 + t_3} = b, \\ \frac{1}{t_2} = \frac{2}{t_1 + t_3}, \end{cases} \text{откуда } t_1 = \frac{3b - a}{2ab}, t_2 = \frac{a + b}{2ab}, t_3 = \frac{3a - b}{2ab}.$$

Средняя скорость на всей трассе будет  $\frac{3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{2ab}{a + b}$ ; на первом участке  $\frac{1}{t_1} = \frac{2ab}{3b - a}$ ; на втором  $\frac{1}{t_2} = \frac{2ab}{a + b}$ ; на третьем  $\frac{1}{t_3} = \frac{2ab}{3a - b}$ .

Задача имеет реальное решение, если  $\begin{cases} 3a - b > 0, \\ 3b - a > 0, \end{cases}$  откуда  $\frac{b}{3} < a < 3b$ .

*Ответ:*  $\frac{2ab}{a + b}$ ;  $\frac{2ab}{3b - a}$ ;  $\frac{2ab}{a + b}$ ;  $\frac{2ab}{3a - b}$  м/мин, где  $\frac{b}{3} < a < 3b$ .

**13.280.** Для контроля за движением лыжника тренер разделил трассу на три участка равной длины. Стало известно, что средние скорости лыжника на этих трех отдельных участках были различными. При этом на пробег первого и второго участков вместе лыжнику потребовалось 40,5 мин, а на пробег второго и третьего — 37,5 мин. Выяснилось также, что средняя скорость лыжника на втором участке была такой же, как средняя скорость для первого и третьего участков вместе. За какое время лыжник достиг финиша?

*Решение.*

Пусть  $x$  — длина участка,  $t_1, t_2, t_3$  — время пробега первого, второго и третьего участка соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 40,5, \\ t_2 + t_3 = 37,5, \text{откуда } t_1 + t_2 + t_3 = 58,5 \text{ (мин).} \\ \frac{x}{t_2} = \frac{2x}{t_1 + t_3}, \end{cases}$$

*Ответ:* за 58,5 мин.

**13.281.** Два велосипедиста стартовали одновременно из одного и того же места в одном направлении. Следом за ними, через 10 мин с того же места начал путь третий велосипедист. Сначала он обогнал первого велосипедиста, после чего находился в пути еще 20 мин, пока

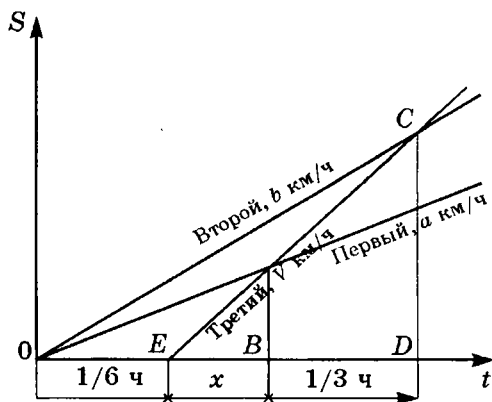


Рис. 13.15

догнал второго. Начиная от самого старта и до конца пути, каждый велосипедист шел с постоянной скоростью:  $a$  км/ч — первый велосипедист и  $b$  км/ч — второй. Найти скорость третьего велосипедиста.

*Решение.*

Графики движения велосипедистов изображены на рис. 13.15. Выразим пройденные ими расстояния: для первого  $AB = \left(\frac{1}{6} + x\right)a$ ; для третьего

$AB = xV$ , где  $V$  — искомая скорость;  $CD = \left(x + \frac{1}{3}\right)V$ ; для второго

$$CD = \left(\frac{1}{6} + x + \frac{1}{3}\right)b.$$

Имеем систему уравнений относительно  $x$  и  $V$ :

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{6} + x\right)a = xV, \\ \left(\frac{1}{2} + x\right)b = \left(x + \frac{1}{3}\right)V. \end{cases}$$

Исключив  $x$ , находим

$$V = \frac{a + 3b + \sqrt{a^2 - 10ab + 9b^2}}{4} \text{ (км/ч).}$$

Ответ:  $\frac{a + 3b + \sqrt{a^2 - 10ab + 9b^2}}{4}$  (км/ч).

**13.282.** Связист получил задание прибыть в пункт  $B$  из пункта  $A$  в назначенный срок. Расстояние между  $A$  и  $B$  равно  $s$  км. Когда связист добрался до пункта  $C$ , расположенного точно на полпути от  $A$  до  $B$ , то рассчитал, что опоздает на 2 ч, если будет продолжать движение с той же скоростью. Если же в пункте  $C$  он отдохнет 1 ч, а на оставшейся половине пути увеличит скорость на  $v$  км/ч, то прибудет в  $B$  в назначенный срок. Какой срок был назначен связисту?

*Решение.*

Пусть  $x$  — назначенный срок,  $V'$  — скорость связиста. По условию, имеем систему

$$\begin{cases} \frac{S}{V'} = x + 2, \\ \frac{S}{2V'} + 1 + \frac{S}{2(V' + v)} = x, \end{cases} \text{ откуда } x = \frac{v + \sqrt{9v^2 + 6vS}}{v} \text{ (ч).}$$

*Ответ:*  $\frac{v + \sqrt{9v^2 + 6vS}}{v}$  ч.

**13.283.** Из двух пунктов, расстояние между которыми 28 км, одновременно вышли навстречу друг другу два пешехода. Если бы первый не задержался на 1 ч на расстоянии 9 км от места своего отправления, то встреча пешеходов произошла бы на полпути. После остановки первый пешеход увеличил скорость на 1 км/ч, и встреча произошла на расстоянии 4 км от того места, где задержался первый. Найти скорости пешеходов.

*Решение.*

Так как пешеходы могли бы встретиться на полпути, то их скорости равны. Пусть  $V$  — первоначальная скорость одного из пешеходов.

По условию  $\frac{9}{V} + \frac{4}{V+1} + 1 = \frac{28 - (9+4)}{V}$ , откуда  $V = 3$  (км/ч).

*Ответ:* первоначально оба шли с одной скоростью 3 км/ч.

**13.284.** Найти скорость и длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы пройти с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

*Решение.*

Пусть  $l$  — длина поезда,  $V$  — его скорость.

По условию имеем систему

$$\begin{cases} 7V = l, \\ 25V = 378 + l, \end{cases} \text{ откуда } l = 147 \text{ (м)}, V = 21 \text{ (м/с)} = 75,6 \text{ (км/ч).}$$

*Ответ:* 75,6 км/ч; 147 м.

**13.285.** На участке шоссе протяженностью 10 км, лишенном перекрестков, автобус останавливается только для выхода и входа пассажиров. Всего он делает 6 промежуточных остановок, затрачивая на каждую из них по 1 мин, а движется всегда с одной и той же скоростью. Если бы автобус двигался без остановок, то тот же путь он прошел бы со скоростью, превышающей среднюю скорость своего движения с остановками на 5 км/ч. Сколько минут автобус находится в движении на этом участке шоссе?

*Решение.*

Пусть  $t$  мин автобус находится в движении на участке. Тогда его средняя скорость движения без остановок —  $\frac{10}{t}$ , а с остановками —  $\frac{10}{t + \frac{1}{60} \cdot 6}$ .

По условию,  $\frac{10}{t+0,1} + 5 = \frac{10}{t}$ , откуда  $t = 24$  (мин).

*Ответ:* 24 мин.

**13.286.** Шхуна идет от  $A$  до  $B$  по озеру, а от  $B$  до  $C$  вверх по реке и затем отправляется обратно. Скорость шхуны относительно неподвижной воды все время поддерживается равной  $c$  км/ч. От  $A$  до  $C$  шхуна идет  $\alpha$  ч, а обратный путь занимает  $\beta$  ч, причем на путь от  $C$  до  $B$  шхуне нужно втрое меньше времени, чем на путь от  $B$  до  $A$ . Найти расстояния  $AB$  и  $BC$ .

*Решение.*

Пусть  $x$ ,  $y$  — расстояния  $AB$  и  $BC$  соответственно,  $V$  — скорость течения воды в реке. По условию имеем

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{c-V} = \alpha, \quad (1) \quad \frac{y}{c+V} + \frac{x}{c} = \beta, \quad (2) \quad \frac{y}{c+v} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{c} \quad (3).$$

Из уравнений (2),(3) находим  $x = \frac{3\beta c}{4}$ , а из уравнений(1),(3), зная

выражение для  $x$ , находим  $y = \frac{\beta c(4\alpha - 3\beta)}{4(2\alpha - \beta)}$ .

*Ответ:*  $AB = \frac{3\beta c}{4}$  км;  $BC = \frac{\beta c(4\alpha - 3\beta)}{4(2\alpha - \beta)}$  км ( $\alpha > \beta$ ).

**13.287.** Два цеха молокозавода совместно должны обработать поровну определенное количество литров молока. Второй цех приступил к выполнению задания на  $a$  рабочих дней позже, но обрабатывал ежедневно на  $m$  л молока больше, чем первый. Прошло еще  $5a/9$  рабочих дней от начала совместной работы этих цехов и осталась невыполнен-

ной  $1/3$  всего задания. Сколько рабочих дней потребовалось для выполнения задания, если работа была окончена одновременно и каждый цех обработал половину заданного количества литров молока?

*Решение.*

Весь объем работы примем за 1. Пусть  $x$  — производительность труда за 1 ч первого цеха,  $n$  — количество дней, необходимых для выполнения задания.

По условию (1)  $nx = (n - a)(x + m)$ , (2)  $ax + \frac{5a}{9}x + \frac{5a}{9}(x + m) = 1 - \frac{1}{3}$  (ч).

Из (1)  $m = \frac{ax}{n - a}$  подставляем в (2) и находим  $n = \frac{14a^2x - 6a}{19ax - 6}$  (3). Так как каждый цех обработал половину заданного количества литров молока, то

$nx = \frac{1}{2}$ , откуда  $x = \frac{1}{2n}$  (4). В (3) подставляем (4) и находим  $n = 2a$ .

*Ответ:*  $2a$ .

**13.288.** Мастеру и его ученику было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как мастер проработал 7 ч, а ученик 4 ч, оказалось, что они выполнили  $5/9$  всей работы. Проработав совместно еще 4 ч, они установили, что остается выполнить  $1/18$  всей работы. За какой промежуток времени выполнил бы всю работу ученик, работая один?

*Решение.*

Весь объем работ примем за 1. Пусть  $x, y$  — производительности труда за 1 ч мастера и ученика соответственно. По условию, имеем систему

$$\begin{cases} 7x + 4y = \frac{5}{9}, \\ 7x + 4y + 4(x + y) = 1 - \frac{1}{18}, \end{cases} \quad \text{откуда } y = \frac{1}{24}.$$

Время выполнения всей работы учеником —  $\frac{1}{y} = 24$  (ч).

*Ответ:* за 24 ч.

**13.289.** Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько олова содержится в полученном новом сплаве?

*Решение.*

Пусть  $x$  — процентное содержание цинка в первом сплаве. По усло-

вию  $\frac{x}{100} \cdot 150 + \frac{x}{100} \cdot 250 = \frac{30}{100} (150 + 250)$ , откуда  $x = 30\%$ . Тогда во

втором сплаве содержится  $100\% - (26\% + 30\%) = 44\%$  олова, а новый

сплав содержит  $\frac{40}{100} \cdot 150 + \frac{44}{100} \cdot 250 = 170$  (кг) олова.

*Ответ:* 170 кг.

**13.290.** Если две трубы открыть одновременно, то бассейн наполнится за 2 ч 24 мин. В действительности же сначала была открыта только первая труба в течение  $1/4$  времени, которое необходимо второй трубе, чтобы наполнить бассейн, действуя отдельно. Затем действовала вторая труба также в течение  $1/4$  времени, которое необходимо первой, чтобы одной наполнить бассейн, после чего оказалось, что остается наполнить  $11/24$  полной вместимости бассейна. Сколько времени необходимо для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

*Решение.*

Весь объем бассейна примем за 1. Пусть  $x$ ,  $y$  (л) в час протекает по первой и второй трубе соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} 2\frac{24}{60}x + 2\frac{24}{60}y = 1, \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}\right)x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)y = 1 - \frac{11}{24}, \end{cases} \text{ откуда } x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{6}.$$

Тогда для первой трубы необходимо  $\frac{1}{x} = 4$  (ч) для наполнения бас-

сейна, а  $\frac{1}{y} = 6$  (ч) — для второго.

*Ответ:* 4 и 6 ч.

**13.291.** Если выполнение заказа по набору нескольких книг возложить на одного из трех наборщиков, то первый справится с работой на 10 ч быстрее, а третий — на 6 ч быстрее, чем второй. Если же одну из заказанных книг будет набирать первый наборщик, а другую книгу одновременно будет набирать второй, то за 9 ч они наберут столько страниц, сколько за 10 ч наберут второй и третий, работая вместе при тех же условиях. Сколько времени потребуется каждому наборщику для набора всех заказанных книг при раздельной работе?

*Решение.*

Весь объем работы примем за 1. Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  — производительность труда (количество набранных страниц в час) первого, второго и третьего наборщиков соответственно.

По условию имеем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = 10, \\ \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} = 6, \\ 9(\alpha + \beta) = 10(\beta + \gamma), \end{cases} \quad \text{откуда } \alpha = \frac{1}{20}, \beta = \frac{1}{30}, \gamma = \frac{1}{24}.$$

Тогда первый наборщик всю работу выполнит за  $\frac{1}{\alpha} = 20$  (ч), вто-

рой — за  $\frac{1}{\beta} = 30$  (ч), а третий — за  $\frac{1}{\gamma} = 24$  (ч).

*Ответ:* 20, 30 и 24 ч.

**13.292.** Два «механических крота» разной мощности при одновременной работе с разных концов тоннеля могли бы прорыть его за 5 дней. В действительности же оба «крота» были применены последовательно с одной стороны тоннеля, причем первый прорыл  $1/3$ , а второй — остальные  $2/3$  его длины. На выполнение всей работы ушло при этом 10 дней. За сколько дней каждый «крот», работая самостоятельно, мог бы прорыть тоннель?

*Решение.*

Длину тоннеля примем за 1. Пусть  $x, y$  — мощности первого и второго «кротов» соответственно.

По условию имеем систему 
$$\begin{cases} 5(x + y) = 1, \\ \frac{1}{3x} + \frac{2}{3y} = 10, \end{cases} \quad \text{откуда } x = \frac{1}{15}, y = \frac{2}{15}.$$

Тогда первый «крот» самостоятельно пророеет тоннель за  $\frac{1}{x} = 15$  (дней),

а второй — за  $\frac{1}{y} = 7,5$  (дней).

*Ответ:* 15 и 7,5 дней.



**13.293.** В бассейн проведены две трубы разного сечения. Одна — равномерно подающая, другая — равномерно отводящая воду, причем через первую бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на  $1/3$  бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

*Решение.*

Значения искоемых и заданных величин запишем в форме таблицы:

| Труба      | Время, ч | Вместимость   | Производительность |
|------------|----------|---------------|--------------------|
| Подающая   | $x + 2$  | 1             | $\frac{1}{x + 2}$  |
| Отводящая  | $x$      | 1             | $\frac{1}{x}$      |
| Обе вместе | 8        | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{24}$     |

По условию  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{24}$ , откуда  $x = 6$ .

*Ответ:* за 8 и 6 ч.

**13.294.** Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей; после того как первый проработал  $a$  ч, а второй  $0,6a$  ч, оказалось, что они выполнили  $5/n$  всей работы. Проработав совместно еще  $0,6a$  ч, они установили, что им осталось изготовить еще  $1/n$  часть всей партии деталей. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, выполнит всю работу? Число  $n$  натуральное; найти его.

*Решение.*

Весь объем работы примем за 1. Пусть  $x, y$  — производительность труда (количество изготовленных деталей в час) первого и второго рабочих соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} ax + 0,6ay = \frac{5}{n}, \\ ax + 0,6ay + 0,6a(x + y) = 1 - \frac{1}{n}, \end{cases} \text{ откуда } x = \frac{11 - n}{0,4an}, y = \frac{n - 9}{0,24an}.$$

Тогда первый рабочий все детали изготовит за  $\frac{1}{x} = \frac{0,4an}{11 - n}$  (ч), а второй — за  $\frac{1}{y} = \frac{0,24an}{n - 9}$  (ч). Значение  $n$  должно удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} 11 - n > 0, \\ n - 9 > 0, \end{cases} \text{ т.е. } n = 10.$$

Ответ:  $\frac{0,4an}{11-n}$ ;  $\frac{0,24an}{n-9}$ ;  $n = 10$ .

**13.295.** Водоем снабжен двумя каналами. Через первый вода равномерно выливается, через второй — равномерно вливается. За сколько часов через первый канал пройдет  $n$  л воды, если известно, что через второй вольтется в два раза больше тогда, когда он будет открыт на  $a$  ч меньше того времени, за которое через первый канал пройдет  $n$  л? Если оба канала открыть одновременно, то каждый час в водоем прибывает  $a$  л воды.

*Решение.*

Значения искомых и заданных величин запишем в форме таблицы:

| Канал  | Время, ч | Объем воды, л | Производительность |
|--------|----------|---------------|--------------------|
| Первый | $x$      | $n$           | $\frac{n}{x}$      |
| Второй | $x - a$  | $2n$          | $\frac{2n}{x - a}$ |

По условию  $\frac{2n}{x - a} - \frac{n}{x} = a$ ,

откуда  $x = \frac{a^2 + n + \sqrt{a^4 + 6a^2n + n^2}}{2a}$  (ч).

Ответ: за  $\frac{a^2 + n + \sqrt{a^4 + 6a^2n + n^2}}{2a}$  ч.

**13.296.** Два экскаваторщика должны выполнить некоторую работу. После того как первый проработал 15 ч, начинает работать второй и заканчивает эту работу за 10 ч. Если бы при раздельной работе первый выполнил  $\frac{1}{6}$  часть, а второй —  $\frac{1}{4}$  часть работы, то для ее окончания потребовалось бы еще 7 ч их совместной работы. За сколько часов может выполнить работу каждый экскаваторщик в отдельности?

*Решение.*

Весь объем работы примем за 1. Пусть  $x$ ,  $y$  — производительность труда первого и второго экскаваторщика соответственно. По условию име-

ем систему 
$$\begin{cases} 15x + 10y = 1, \\ 7(x + y) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right), \end{cases}$$
 откуда  $x = \frac{1}{30}$ ,  $y = \frac{1}{20}$ .

Тогда первый экскаваторщик всю работу выполнит за  $\frac{1}{x} = 30$  (ч), а

второй — за  $\frac{1}{y} = 20$  (ч).

*Ответ:* за 20 и 30 ч.

**13.297.** Длина круговой дорожки ипподрома равна  $b$  км. Из двух наездников  $A$  и  $B$ , начавших скачки одновременно, наездник  $A$  прибыл к финишу на 2 мин раньше. В другой раз наездник  $B$  увеличил скорость на  $c$  км/ч, в то время как наездник  $A$  уменьшил скорость на  $c$  км/ч и потому  $B$  прибыл к финишу на 2 мин раньше, чем  $A$ . Найти скорости наездников в первом заезде.

*Решение.*

Пусть  $x, y$  — скорости наездников  $A$  и  $B$  в первом заезде. По усло-

вию имеем систему 
$$\begin{cases} \frac{b}{y} - \frac{b}{x} = \frac{2}{60}, \\ \frac{b}{x-c} - \frac{b}{y+c} = \frac{2}{60}, \end{cases}$$

откуда  $x = \frac{c + \sqrt{c^2 + 120bc}}{2}$  (км/ч),  $y = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 120bc}}{2}$  (км/ч).

*Ответ:*  $\frac{c + \sqrt{c^2 + 120bc}}{2}$  и  $\frac{-c + \sqrt{c^2 + 120bc}}{2}$  км/ч.

**13.298.** Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на 10 с меньше, чем второй. Если они начнут пробег с общего старта в одном направлении, то еще раз сойдутся через 720 с. Какую часть длины всей дорожки пробегает в секунду каждый бегун?

*Решение.*

Пусть  $V_1, V_2$  — скорости спортсменов,  $l$  — длина дорожки. По усло-

вию, имеем систему 
$$\begin{cases} \frac{l}{V_2} - \frac{l}{V_1} = 10, \\ 720V_1 - 720V_2 = l, \end{cases}$$
 откуда  $\frac{l}{V_1} = 80, \frac{l}{V_2} = 90.$

Тогда первый спортсмен пробегает  $\frac{l}{V_1} = \frac{1}{80}$  часть длины всей до-

рожки в секунду, а второй  $\frac{l}{V_2} = \frac{1}{90}$ .

*Ответ:*  $\frac{1}{80}$  и  $\frac{1}{90}$ .

**13.299.** По двум концентрическим окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать на два оборота в минуту больше. Пусть в начале движения лучи, направленные из центра окружности к этим точкам, сливались. Вычислить, какова будет величина угла между лучами через 1 с.

*Решение.*

Пусть  $V_1, V_2$  — скорости вращения точек,  $l$  — длина окружности,  $x$  — длина дуги окружности между точками после 1 с вращения. Тогда величина угла между лучами будет  $\alpha = \frac{x \cdot 360^\circ}{l}$  (1). По условию имеем

$$\text{систему } \begin{cases} \frac{l}{V_2} - \frac{l}{V_1} = 5, \\ 60(V_1 - V_2) = 2l, \end{cases} \quad \text{откуда } V_1 = \frac{l}{10}, V_2 = \frac{l}{15}.$$

Если точки вращаются в одном направлении, то  $x = V_1 - V_2 = \frac{l}{30}$  и

$\alpha = 12^\circ$ ; если в противоположных, то  $x = V_1 + V_2 = \frac{l}{6}$  и  $\alpha = 60^\circ$ .

*Ответ:* 12 или  $60^\circ$ .

**13.300.** Меньшая дуга между точками  $A$  и  $B$ , находящимися на окружности, равна 150 м. Если точки начнут двигаться навстречу друг к другу по меньшей дуге, то встретятся через 10 с, а если по большей дуге, то встреча произойдет через 14 с. Определить скорости движения точек и длину окружности, если известно, что точка  $A$  может обежать всю окружность в то время, как  $B$  пройдет только 90 м.

*Решение.*

Пусть  $V_a$  и  $V_b$  — скорости точек  $A$  и  $B$ ,  $l$  — длина окружности. По

условию, имеем систему 
$$\begin{cases} 10(V_a + V_b) = 150, \\ 14(V_a + V_b) = l - 150, \\ \frac{l}{V_a} = \frac{90}{V_b}, \end{cases}$$

откуда  $V_a = 12$  (м/с),  $V_b = 3$  (м/с),  $l = 360$  (м).

*Ответ:* 12 м/с и 3 м/с; 360 м.

**13.301.** В некотором механизме три шестеренки разных диаметров связаны между собой так, что большая из них касается обеих меньших, причем все три шестеренки вместе имеют 60 зубцов. Когда большая шестеренка не доходит на 20 зубцов до полных четырех оборотов, вторая и третья делают соответственно 5 и 10 полных оборотов. Сколько зубцов имеет каждая шестеренка в отдельности?

*Решение.*

Пусть  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — число зубцов трех шестеренок, причем  $x > y > z$  и  $x + y + z = 60$  (1). За время вращения шестеренок в соприкосновение придет одинаковое число зубцов каждой шестеренки, т.е.  $10z = 5y = 4x - 20$  (2).

Решив систему уравнений (1), (2), находим  $x = 30$ ,  $y = 20$ ,  $z = 10$ .

*Ответ:* 10, 20 и 30 зубцов.

**13.302.** По окружности длиной 60 м равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее другой. При этом совпадения точек происходят каждый раз через 1 мин. Определить скорости точек.

*Решение.*

Пусть  $V_1$ ,  $V_2$  — скорости точек. По условию, имеем систему

$$\begin{cases} \frac{60}{V_2} - \frac{60}{V_1} = 5, \\ 60(V_1 - V_2) = 60, \end{cases} \quad \text{откуда } V_1 = 4 \text{ (м/с), } V_2 = 3 \text{ (м/с).}$$

*Ответ:* 3 и 4 м/с.

**13.303.** Два колеса соединены бесконечным ремнем; меньшее из них делает на 300 оборотов в минуту больше второго. Большое колесо совершает 10 оборотов в промежуток времени, на 1 с больший, чем время такого же числа оборотов меньшего колеса. Сколько оборотов в минуту совершает каждое колесо?

*Решение.*

Пусть  $x$  — число оборотов большого колеса за 1 мин. Тогда меньшее колесо делает  $x + 300$  оборотов. По условию, имеем  $\frac{10}{x} - \frac{1}{60} = \frac{10}{x + 300}$ , откуда  $x = 300$ .

*Ответ:* 300 и 600.

**13.304.** Две сцепляющиеся шестерни  $A$  и  $B$  насажены плотно: первая на вал  $O_1$ , а вторая на вал  $O_2$ . Шестерня  $A$  имеет на 10 зубцов больше, чем  $B$ . При некоторой скорости вращения вала  $O_1$  вал  $O_2$  совершает 63 оборота в минуту. Если шестерни поменять местами, то при той же скорости вала  $O_1$  вал  $O_2$  совершает 28 оборотов. Определить число зубцов каждой шестерни.

*Решение.*

Пусть шестерня  $B$  имеет  $x$  зубцов, а  $A$  —  $(x + 10)$ ,  $V$  — скорость вращения вала  $O_1$ . По условию, имеем систему  $\begin{cases} (x + 10)V = 63x, \\ xV = 28(x + 10), \end{cases}$  откуда  $x = 20$ .

*Ответ:* 20 и 30.

**13.305.** Найти два двузначных числа  $A$  и  $B$  по следующим условиям. Если число  $A$  написать впереди записи числа  $B$  и полученное четырехзначное число разделить на число  $B$ , то в частном получится 121. Если же число  $B$  написать впереди числа  $A$  и полученное четырехзначное число разделить на  $A$ , то в частном получится 84 и в остатке 14.

*Решение.*

По условию, имеем систему  $\begin{cases} 100A + B = 121B, \\ 100B + A = 84A + 14, \end{cases}$  откуда  $A = 42, B = 35$ .

*Ответ:* 42 и 35.

**13.306.** Через 2 ч после отправления поезд остановился на 30 мин. На оставшемся до станции участке пути производились ремонтные работы и поезду была разрешена скорость, составляющая  $1/3$  первоначальной скорости, вследствие чего поезд пришел на станцию с опозданием на 1 ч 10 мин. На другой день остановка поезда произошла на 14 км ближе к конечной станции и при тех же условиях опоздание сократилось до 50 мин. Определить расстояние между станциями и скорость поезда.

*Решение.*

Пусть  $x$  — расстояние между станциями,  $V$  — скорость поезда. По условию имеем систему

$$\begin{cases} 2 + \frac{30}{60} + \frac{x-2V}{\frac{1}{3}V} = \frac{x}{V} + 1 + \frac{10}{60}, \\ \frac{2V+14}{V} + \frac{30}{60} + \frac{x-(2V+14)}{\frac{1}{4}V} = \frac{x}{V} + \frac{50}{60}, \end{cases}$$

откуда  $x = 196$  (км),  $V = 84$  (км/ч).

*Ответ:* 196 км; 84 км/ч.

**13.307.** Найти трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию, если известно, что после его уменьшения на 495 получается число, записанное такими же цифрами, какими записано искомое число, но расположенными в обратном порядке; если цифры числа, получившегося после вычитания, уменьшить (слева направо) соответственно на 1, на 1 и на 2, то получится арифметическая прогрессия.

*Решение.*

Пусть  $100x + 10y + z$  — искомое число. По условию, имеем систему

$$\begin{cases} xz = y^2, \\ 100x + 10y + z - 495 = 100z + 10y + x, \text{ откуда } x = 9, y = 6, z = 4, \\ (z-1) + (x-2) = 2(y-1), \end{cases}$$

*Ответ:* 964.

**13.308.** Какое двузначное число меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5?

*Решение.*

Пусть  $10x + y$  — искомое число. По условию имеем систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10x + y + 11, \\ 2xy = 10x + y - 5; \end{cases}$$

вычитая из первого уравнения второе, находим  $(x-y)^2 = 16$  и получаем две системы:

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ 2xy = 10x + y - 5 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - y = -4, \\ 2xy = 10x + y - 5, \end{cases}$$

решения которых  $x = 9, y = 5$  и  $x = 1, y = 5$ .

*Ответ:* 95 или 15.

**13.309.** Имеются два сплава золота и серебра. В одном сплаве количества этих металлов находятся в отношении 1:2, в другом — 2:3.

Сколько граммов нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 19 г сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 7:12?

*Решение.*

Пусть взяли  $x$  (г) первого сплава, в котором содержится  $\frac{1}{3}x$  золота и  $\frac{2}{3}x$  серебра. По условию имеем систему

$$\begin{cases} x + y = 19, \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y = \frac{7}{12}\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y\right) \end{cases} \text{ откуда } x = 9 \text{ (г)}, y = 10 \text{ (г)}.$$

*Ответ:* 9 и 10 г.

**13.310.** Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5 и 40%. Сколько нужно взять металла каждого из этих сортов, чтобы получить 140 т стали с 30%-м содержанием никеля?

*Решение.*

Пусть  $x, y$  — масса взятого металла каждого из сортов. По условию

$$\text{имеем систему } \begin{cases} x + y = 140, \\ \frac{x + y}{100} = \frac{0,05x + 0,4y}{30}, \end{cases} \text{ откуда } x = 40 \text{ (т)}, y = 100 \text{ (т)}.$$

*Ответ:* 40 и 100 т.

**13.311.** Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 2400 км, навстречу друг другу выходят одновременно пассажирский и скорый поезда. Каждый из них идет с постоянной скоростью, и в некоторый момент времени они встречаются. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на 3 ч раньше фактического момента встречи. Если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на 5 ч позже фактического момента встречи. Найти скорости поездов.

*Решение.*

Пусть  $V_1, V_2$  — скорости пассажирского и скорого поездов соответственно,  $t$  — время движения поездов до встречи. По условию имеем

$$\text{систему } \begin{cases} t(V_1 + V_2) = 2400, \\ 2V_2(t - 3) = 2400, \\ 2V_1(t + 5) = 2400, \end{cases} \text{ откуда } V_1 = 60 \text{ (км/ч)}, V_2 = 100 \text{ (км/ч)}.$$

*Ответ:* 60 и 100 км/ч.

**13.312.** При разгрузке баржи сначала 2 ч действовали четыре подъемных крана одинаковой мощности. Затем добавочно ввели в



действие еще два крана меньшей, но одинаковой мощности. После этого для окончания разгрузки потребовалось еще 3 ч. Если бы все эти краны начали работать одновременно, то разгрузка была бы произведена за 4,5 ч. Если бы один кран большей и один кран меньшей мощности работали совместно, то за какое время они разгрузили бы баржу?

*Решение.*

Весь объем работы примем за 1. Пусть для ее выполнения в одиночку крану большей мощности нужно  $x$  дней, крану меньшей мощности —  $y$  дней, а при совместной работе одного крана большей и одного крана меньшей мощности —  $z$  дней. Производительность труда соот-

ветственно равна  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{y}$  и  $\frac{1}{z}$ . По условию имеем систему

$$\begin{cases} \frac{8}{x} + \left( \frac{4}{x} + \frac{2}{y} \right) \cdot 3 = 1, \\ \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{4,5}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}, \end{cases} \quad \text{откуда } x = 24, y = 36, z = 14,4.$$

*Ответ:* за 14,4 ч.

**13.313.** Знаменатель дроби меньше квадрата ее числителя на 1. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше  $1/4$ ; если от числителя и знаменателя первоначальной дроби отнять по 3, то значение дроби будет равно  $1/12$ . Найти эту дробь.

*Решение.*

Пусть  $\frac{x}{y}$  — искомая дробь. По условию имеем систему 
$$\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ \frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{12}, \end{cases}$$

откуда искомая дробь  $\frac{4}{15}$ , а дробь  $\frac{8}{63}$  не удовлетворяет неравенству

$$\frac{x+2}{y+2} > \frac{1}{4}.$$

*Ответ:*  $\frac{4}{15}$ .

**13.314.** Два зубчатых колеса находятся в сцеплении. Колесо  $A$  имеет 12 зубьев, а колесо  $B$  — 54. Сколько оборотов сделает каждое колесо до того, как оба они вернуться в исходное положение?

*Решение.*

Пусть колесо  $A$  делает  $x$  оборотов, а колесо  $B$  —  $y$ . Так как колеса сцеплены, то за время их вращения придет в соприкосновение одинаковое число зубьев каждого колеса, т.е.  $12x = 54y$ , откуда  $x = \frac{9}{2}y$ . Число  $x$  — натуральное, поэтому наименьшее значение  $y = 2$ .

*Ответ:* 9 и 2.

**13.315.** Первоначальная себестоимость единицы продукции была равна 50 руб. В течение первого года производства она повысилась на некоторое число процентов, а в течение второго года снизилась (по отношению к повышенной себестоимости) на такое же число процентов, в результате чего она стала равной 48 руб. Определить проценты повышения и снижения себестоимости единицы продукции.

*Решение.*

Пусть себестоимость единицы продукции повышалась на  $x$  процентов.

После повышения себестоимость стала равной  $50 + \frac{x}{100} \cdot 50 = 50 + \frac{x}{2}$ , а

после снижения —  $\left(50 + \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{100} \cdot \left(50 + \frac{x}{2}\right) = \left(50 + \frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{100}\right)$ . По усло-

вию имеем  $\left(50 + \frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 48$ , откуда  $x = 20\%$ .

*Ответ:* 20%.

**13.316.** Предприятие увеличивало объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что за два года объем выпускаемой продукции возрос в два раза.

*Решение.*

Пусть  $x$  — объем выпускаемой продукции, а  $y$  — число процентов.

За один год объем выпускаемой продукции стал  $x + \frac{y}{100}x = x \left(1 + \frac{y}{100}\right)$ , а

за второй —  $x \left(1 + \frac{y}{100}\right) + \frac{y}{100} \left(x \left(1 + \frac{y}{100}\right)\right) = x \left(1 + \frac{y}{100}\right)^2$ . По условию

имеем  $x \left(1 + \frac{y}{100}\right)^2 = 2x$ , откуда  $y = (\sqrt{2} - 1) \cdot 100$  или  $y \approx 41,4\%$ .

*Ответ:*  $\approx 41,4\%$ .

**13.317.** Один турист вышел в 6 ч, а второй — навстречу ему в 7 ч. Они встретились в 8 ч и, не останавливаясь, продолжили путь. Сколько времени затратил каждый из них на весь путь, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 28 мин позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый? Считается, что каждый шел без остановок с постоянной скоростью.

*Решение.*

Пусть  $V_1, V_2$  — скорости первого и второго туристов соответственно,  $x$  — время, за которое второй турист проходит то расстояние, которое первый проходит за 2 часа. По условию, имеем систему

$$\begin{cases} xV_2 = 120V_1, \\ V_2x + 60V_2 = 120V_1 + V_1(x + 28). \end{cases} \quad \text{Из первого уравнения выражаем } \frac{V_1}{V_2} \text{ и}$$

подставляем во второе. Из полученного уравнения находим  $x = 72$  (мин). Тогда первый турист затратил на весь путь  $120 + 72 + 28 = 220$  (мин), а второй —  $60 + 72 = 132$  (мин).

*Ответ:* 3 ч. 40 мин и 2 ч 12 мин.

**13.318.** На один продукт два раза была снижена цена, каждый раз на 15%. На другой продукт, имевший первоначально ту же цену, что и первый, снизили цену один раз на  $x\%$ . Каким должно быть число  $x$ , чтобы после всех указанных снижений оба продукта снова имели одну и ту же цену?

*Решение.*

Пусть  $z$  — первоначальная цена продукта. После первого снижения цена стала  $z - 0,15z = 0,85z$ , а после второго —  $0,85z - 0,85 \cdot 0,15z = 0,85^2 z$ . По

условию  $z - \frac{x}{100}z = 0,85^2 z$ , откуда  $x = (1 - 0,85^2) \cdot 100 = 27,75\%$ .

*Ответ:* 27,75%.

**13.319.** Сосуд вместимостью 8 л наполнен смесью кислорода и азота, причем на долю кислорода приходится 16% вместимости сосуда. Из этого сосуда выпускают некоторое количество смеси и впускают такое же количество азота, после чего опять выпускают такое же, как и в первый раз, количество смеси и опять добавляют столько же азота. В новой смеси кислорода оказалось 9%. Какое количество смеси каждый раз выпускалось из сосуда?

*Решение.*

Первоначально в сосуде содержалось  $16 \cdot \frac{8}{100} = \frac{32}{25}$  л кислорода. Выпу-

щенные  $x$  л смеси содержат  $\frac{16x}{100} = \frac{4x}{25}$  л кислорода. Теперь в сосуде на 8 л

смеси приходится  $\frac{32 - 4x}{25}$  л кислорода, что составляет  $(16 - 2x)\%$ . Вторич-

но выпущенные  $x$  л смеси содержат  $(16 - 2x) \cdot \frac{x}{100} = (8 - x) \cdot \frac{x}{50}$  л кислоро-

да. По условию,  $\frac{32 - 4x}{25} - \frac{(8 - x)x}{50} = 9 \cdot \frac{8}{100}$ , откуда  $x_1 = 2, x_2 = 14$ .

*Ответ:* 2 л.

**13.320.** Примеси составляют 20% от общего объема раствора. Каково наименьшее число фильтров, через которые нужно пропустить раствор, чтобы окончательное содержание примесей не превышало 0,01%, если каждый фильтр поглощает 80% примесей? (Известно, что  $\lg 2 \approx 0,30$ )

*Решение.*

Примеси составляют  $\frac{1}{5}$  раствора. После первой фильтрации оста-

нется  $\left(\frac{1}{5}\right)^2$  примесей, а после  $k$ -ой фильтрации —  $\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}$ . По усло-

вию  $\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} \leq 10^{-4}$ ;  $-(k+1)\lg 5 \leq -4$ , откуда  $k \geq 4,7$ .

*Ответ:* 5 фильтров.

**13.321.** Сумма двух трехзначных чисел, написанных одинаковыми цифрами, но в обратном порядке, равна 1252. Найти эти числа, если сумма цифр каждого из них равна 14, а сумма квадратов цифр равна 84.

*Решение.*

Пусть  $100x + 10y + z$  — искомое число. По условию имеем систему

$$\begin{cases} 100x + 10y + z + 100z + 10y + x = 1252, \\ x + y + z = 14, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 84, \end{cases}$$

откуда  $x = 8, y = 2, z = 4$ .

*Ответ:* 824 и 428.

**13.322.** Пчелы, перерабатывая цветочный нектар в мед, освобождают его от значительной части воды. Исследования показали, что нектар

обычно содержит около 70% воды, а полученный из него мед содержит только 17% воды. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчелам для получения 1 кг меда?

*Решение.*

Пусть 1 кг меда получается из  $x$  кг нектара. После удаления воды из нектара останется 300 г прочих веществ на каждый килограмм, а после удаления воды из меда — 830 г на килограмм. Имеем  $300x = 830$ , откуда  $x \approx 2,77$  (кг).

*Ответ:*  $x \approx 2,77$  кг.

13.323. Для изготовления пшеничного хлеба взято столько килограммов муки, сколько процентов составляет припек на эту муку. Для изготовления ржаного хлеба взято на 10 кг муки больше, т. е. столько килограммов, сколько процентов составляет припек на ржаную муку. Сколько килограммов взято той и другой муки, если всего выпечено 112,5 кг хлеба?

*Решение.*

Пусть  $x$  — масса муки для пшеничного хлеба,  $(x+10)$  — для ржаного.

По условию  $x + x \cdot \frac{x}{100} + (x+10) + \frac{x+10}{100}(x+10) = 112,5$  откуда  $x = 35$ .

*Ответ:* 35 и 45 кг.

13.324. Инженер в первую неделю отпуска израсходовал на несколько рублей меньше, чем  $\frac{3}{5}$  количества взятых с собой денег; во вторую неделю  $\frac{1}{4}$  остатка и еще 30 руб.; в третью неделю  $\frac{2}{5}$  нового остатка и еще 12 руб.; после чего осталось  $\frac{6}{35}$  от количества взятых денег. Известно также, что количество денег, оставшихся неизрасходованными к концу первой, второй и третьей недель, убывало в арифметической прогрессии. Сколько денег было израсходовано за три недели отпуска?

*Решение.*

Пусть  $S$  — сумма взятых денег. Заполним таблицу:

| Период        | Израсходовано, руб  | Остаток, руб              |
|---------------|---|---------------------------|
| первая неделя | $x$   | $S - x$                   |
| вторая неделя | $\frac{S - x}{4} + 30$                                    | $\frac{3(S - x)}{4} - 30$ |
| третья неделя | $\frac{2}{5} \left( \frac{3(S - x)}{4} - 30 \right) + 12$ | $\frac{6}{35} S$          |

$$\text{По условию } \begin{cases} x < \frac{3}{5}S, \\ \frac{S-x + \frac{6}{35} \cdot S}{2} = \frac{3(S-x)}{4} - 30, \\ \frac{3(S-x)}{4} - 30 - \frac{2}{5} \left( \frac{3(S-x)}{4} - 30 \right) - 12 = \frac{6}{35}S, \end{cases}$$

откуда  $S = 1400$  руб.

Тогда израсходовано  $S - \frac{6}{35}S = 1160$  (руб).

*Ответ:* 1160 руб.

**13.325.** Можно изготовить 9000 деталей на нескольких новых станках одинаковой конструкции и одном станке старой конструкции, работающем вдвое медленнее каждого из новых станков. Можно и этот старый станок заменить новым станком той же конструкции, что и остальные. Тогда по второму варианту на каждом станке изготовлялось бы на 200 деталей меньше, чем на одном новом станке по первому варианту. Сколько всего было станков?

*Решение.*

Пусть  $x$  деталей изготавливается на одном новом станке,  $\frac{x}{2}$  — на старом,  $n$  — количество станков. По условию имеем систему

$$\begin{cases} (n-1)x + \frac{x}{2} = 9000, \\ \frac{9000}{n} = x - 200, \end{cases} \quad \text{откуда } n = 5.$$

*Ответ:* 5.

**13.326.** Из  $A$  в  $B$  через равные промежутки времени отправляются три автомашины. Они прибывают в  $B$  одновременно, затем выезжают в пункт  $C$ , находящийся на расстоянии 120 км от  $B$ . Первая машина прибывает туда через час после второй. Третья машина, прибыв в  $C$ , сразу поворачивает обратно и в 40 км от  $C$  встречает первую машину. Определить скорость первой машины, считая, что по всей трассе скорость каждой машины была неизменной.



По условию имеем систему 
$$\begin{cases} x + y + z = 24, \\ 4(x - y - z) = 6y - 2x - 2z, \text{ откуда} \\ 4(x - y - z) = 7z - y - x, \end{cases}$$

$x = 13, y = 7, z = 4.$

*Ответ:* 13, 7 и 4 л.

**13.328.** Бригада рыбаков планировала выловить в определенный срок 1800 ц рыбы. В течение  $\frac{1}{3}$  этого срока был шторм, вследствие чего плановое задание ежедневно недовыполнялось на 20 ц. Однако в остальные дни бригаде удавалось ежедневно вылавливать на 20 ц больше дневной нормы, и плановое задание было выполнено за один день до срока. Сколько центнеров рыбы планировалось вылавливать ежедневно?

*Решение.*

Пусть  $x$  — срок по плану,  $y$  — количество центнеров в день по пла-

ну. По условию имеем систему 
$$\begin{cases} xy = 1800, \\ \frac{x}{3}(y - 20) + \left(\frac{2x}{3} - 1\right)(y + 20) = 1800, \end{cases}$$

откуда  $y = 100.$

*Ответ:* 100 ц.

**13.329.** Двое рабочих были приняты на один и тот же срок выполнения сезонной работы с разной оплатой каждому за один день труда. Первый работал на  $a$  дней меньше срока и получил  $r$  руб., а второй проработал на  $a$  дней больше срока и получил  $s$  руб. Если бы первый работал столько дней, сколько второй, а второй столько дней, сколько первый, то они получили бы поровну. Определить установленный срок работы.

*Решение.*

Пусть  $x$  — срок работы. Тогда первый зарабатывал  $\frac{r}{x-a}$  руб. в

день, а второй —  $\frac{s}{x+a}$ . Допустим,  $s > r$ .

По условию имеем  $\frac{r}{x-a}(x+a) = \frac{s}{x+a}(x-a)$ , откуда  $x = \frac{a(\sqrt{r} + \sqrt{s})}{\sqrt{s} - \sqrt{r}}$ .

*Ответ:*  $\frac{a(\sqrt{r} + \sqrt{s})}{\sqrt{s} - \sqrt{r}}$  дней, где  $s > r$ .

**13.330.** Два грузовых автомобиля должны были перевезти некоторый груз в течение 6 ч. Второй автомобиль задержался в гараже, и



когда он прибыл на место погрузки, первый перевез уже  $\frac{3}{5}$  всего груза; остальную часть груза перевез второй автомобиль, и весь груз был перевезен таким образом за 12 ч. Сколько времени нужно было каждому автомобилю в отдельности для перевозки груза?

*Решение.*

Весь объем работы примем за 1. Пусть  $x, y$  — масса груза, перевозимая каждой машиной за один рейс. По условию имеем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 6, \\ \frac{3}{5x} + \frac{2}{5y} = 12, \end{cases} \text{ откуда } x = \frac{1}{10}, y = \frac{1}{15} \text{ или } x = y = \frac{1}{12}. \text{ Тогда первая ма-}$$

шина перевезет весь груз за 10 ч, а вторая — за 15 ч или каждая за 12 ч.

*Ответ:* 10 и 15 ч или по 12 ч.

**13.331.** Из металла определенной марки изготовлено несколько шариков, равных по массе, для подшипников и несколько поршневых колец, также равных по массе. Если бы число, выражающее массу каждого шарика в граммах, было на 2 меньше числа сделанных колец, а число, выражающее массу каждого кольца в граммах, на 2 больше числа сделанных шариков, то число, выражающее их общую массу, превышало бы удвоенную разность числа колец и шариков на 800, а если бы число, выражающее массу каждого предмета в граммах, было равно числу сделанных предметов того же рода, то общая их масса равна была бы 881 г. Сколько было сделано шариков и колец?

*Решение.*

Пусть  $x$  — количество шариков,  $m_x$  — масса одного шарика,  $y$  — количество колец,  $m_y$  — масса одного кольца. По условию имеем систему

$$\begin{cases} m_x + 2 = y, \\ m_y = x + 2, \\ x \cdot m_x + y \cdot m_y - 800 = 2(y - x), \\ x^2 + y^2 = 881, \end{cases} \text{ откуда } x = 25, y = 16 \text{ или } x = 16, y = 25.$$

*Ответ:* 25 шариков и 16 колец или 16 шариков и 25 колец.

**13.332.** Три мальчика  $A, B$  и  $B$  условились, что при совместном путешествии на катере каждый побывает в должности капитана, причем величина времени пребывания каждого в этой должности будет пропорциональна числу очков, которые он получит, участвуя в географической викторине. В итоге  $A$  получил на 3 очка больше, чем  $B$ ;  $B$  и  $B$  вместе получили 15 очков. Число, выражающее  $\frac{1}{10}$  всего времени путешествия (в часах), на 25 больше числа очков, полученных мальчи-

ками. Сколько времени были капитанами  $A$  и  $B$ , если  $B$  исполнял эту обязанность 160 ч?

*Решение.*

Пусть  $x$ ,  $18 - x$ ,  $x - 3$  очков получили мальчики  $A$ ,  $B$  и  $B$  соответственно,  $k$  — коэффициент пропорциональности. По условию имеем

$$\text{систему } \begin{cases} \frac{1}{10} k(x + 18 - x + x - 3) = x + 18 - x + x - 3 + 25, \\ k \cdot (18 - x) = 160, \end{cases}$$

откуда  $x = 10$ ,  $k = 20$ . Тогда  $kx = 200$ ,  $k(x - 3) = 140$ .

*Ответ:* 200 и 140 ч.

**13.333.** Мяч падает с высоты 2 м 43 см и, ударяясь о землю, отскакивает вновь, поднимаясь всякий раз на  $\frac{2}{3}$  высоты, с которой он в очередной раз падает. После скольких ударов мяч поднимется на высоту 32 см?

*Решение.*

Числа, выражающие высоту поднятия мяча, составляют геометрическую прогрессию с  $b_1 = 243q$  и  $q = \frac{2}{3}$ . По условию  $q_n = 32 = b_1 q^{n-1}$ , откуда  $n = 5$ .

*Ответ:* после 5 ударов.

**13.334.** В ателье поступило по одному куску черной, зеленой и синей ткани. Хотя зеленой ткани было на 9 м меньше, чем черной, и на 6 м больше, чем синей, стоимость кусков была одинаковой. Известно также, что стоимость 4,5 м черной ткани равна стоимости 3 м зеленой и 0,5 м синей вместе. Сколько метров ткани было в каждом куске?

*Решение.*

Пусть  $x$ ,  $x + 6$ ,  $x + 15$  — длина синего, зеленого и черного куска ткани,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — стоимости одного метра синей, зеленой и черной ткани соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} \alpha x = \beta(x + 6), \\ \alpha x = \gamma(x + 15), \\ 4,5\gamma = 3\beta + 0,5\gamma, \end{cases} \text{ откуда } x = 30.$$

*Ответ:* 45, 36 и 30 м.

**13.335.** Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 8. Если число, составленное из тех же цифр, но записанных в обратном порядке, разделить на произведение цифр, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найти это число.

*Решение.*

Пусть  $10x + y$  — искомое число. По условию имеем систему

$$\begin{cases} 10x + y = 3xy + 8, \\ 10y + x = 2xy + 5, \end{cases} \text{ откуда } x = 5, y = 3.$$

*Ответ:* 53.

**13.336.** Уголь, привезенный на склад, предназначен для двух заводов. На первый завод начали доставлять уголь с 1-го июня по  $m$  т ежедневно, не исключая воскресений, на второй завод — с 8-го июня по  $n$  т ежедневно, не исключая воскресений. К концу дня 16-го июня на складе осталась половина первоначального количества угля. Какого числа был вывезен со склада весь уголь, если оба завода получили угля поровну?

*Решение.*

Массу всего угля примем за 1. Пусть  $z$  — количество дней, необходимых для доставки половины всего угля на два завода одновременно.

$$\text{По условию имеем систему } \begin{cases} (8-1)m + (16-8+1)(n+m) = \frac{1}{2}, \\ z(n+m) = \frac{1}{2}, \\ (16+z)m = (16-8+1+z)n, \end{cases}$$

откуда  $z = 12$ , а весь уголь был перевезен к  $16 + 12 = 28$  июня.

*Ответ:* 28 июня.

**13.337.** На предприятие, где изготавливают растворимый кофе, в последних числах мая привезли партию зерен кофе для переработки. Один механизм, перемалывающий зерна, был приведен в действие в понедельник 1-го июня и перемалывал ежедневно по  $m$  кг. С 6-го июня к выполнению этой работы подключили второй механизм, который перемалывал ежедневно по  $n$  кг. К концу рабочего дня 10-го июня осталась не перемолотой только половина первоначального количества зерен. Когда была закончена переработка всей партии зерен, если известно, что оба механизма перемололи поровну и, кроме воскресений, других перерывов в работе не имели?

*Решение.*

Массу всей партии зерен примем за 1. Пусть  $z$  — количество дней, необходимых для перемалывания половины всех зерен двумя механизмами одновременно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} (6-1)m + (10-6)(n+m) = \frac{1}{2}, \\ z(n+m) = \frac{1}{2}, \\ (10-1+z)m = (10-6+z)n, \end{cases} \quad \text{откуда } z = 6, \text{ а все зерна были}$$

перемолоты за  $10 - 1 + 6 = 15$  рабочих дней, или к  $10 + 1 + 6 = 17$  июня.

*Ответ:* через 15 рабочих дней, или 17 июня.

**13.338.** Запись шестизначного числа начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

*Решение.*

Первоначальное шестизначное число имеет вид  $2 \cdot 10^5 + x$ . После перенесения цифры 2 на последнее место, получим число  $10x + 2$ . По условию  $10x + 2 = 3(2 \cdot 10^5 + x)$ , откуда  $x = 85714$ .

*Ответ:* 285714.

**13.339.** Нужно было взять несколько литров жидкости при температуре  $a^\circ$  и другое количество литров той же жидкости при температуре  $b^\circ$ , чтобы получить температуру смеси  $c^\circ$ . Однако второй жидкости было взято столько, сколько предполагалось взять первой, и наоборот. Какая температура смеси получилась?

*Решение.*

Пусть  $m_a, m_b$  — объем взятой жидкости при температуре  $a^\circ$  и  $b^\circ$  соответственно,  $x$  — температура полученной смеси. По условию, имеем

$$\text{систему } \begin{cases} m_a(a-c) + m_b(b-c) = 0, \\ m_b(a-x) + m_a(b-x) = 0, \end{cases} \quad \text{откуда } x = a + b - c.$$

*Ответ:*  $a + b - c$ .

**13.340.** Известно, что разность переменных величин  $z$  и  $y$  пропорциональна величине  $x$ , а разность величин  $x$  и  $z$  пропорциональна величине  $y$ . Коэффициент пропорциональности один и тот же и равен целому положительному числу  $k$ . Некоторое значение величины  $z$  в  $5/3$  раза больше разности соответствующих значений  $x$  и  $y$ . Найти числовое значение коэффициента  $k$ .

*Решение.*

По условию имеем систему 
$$\begin{cases} z - y = kx, \\ x - z = ky, \\ x - y = \frac{3}{5}z. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений выражаем  $\frac{x}{z}$  и  $\frac{y}{z}$  через  $k$ , затем подставля-

ем полученные выражения  $\frac{x}{z}$  и  $\frac{y}{z}$  в третье уравнение и находим  $k = 3$ .

*Ответ:* 3.

**13.341.** Трое рабочих участвовали в соревновании. Первый и третий из них произвели продукции в два раза больше, чем второй, а второй и третий — в три раза больше, чем первый. Какое место занял каждый рабочий в соревновании?

*Решение.*

Пусть  $x_1, x_2, x_3$  — объем произведенной продукции первым, вторым и третьим рабочим соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2, \\ x_2 + x_3 = 3x_1, \end{cases} \text{ откуда } x_3 : x_2 : x_1 = 5 : 4 : 3.$$

*Ответ:* на первом месте — третий, на втором — второй, на третьем — первый. Количества выработанной ими продукции относятся как 5:4:3.

**13.342.** Расстояние между станциями  $A$  и  $B$  равно 360 км. В одно и то же время из  $A$  и из  $B$  навстречу друг другу выходят два поезда. Поезд, вышедший из  $A$ , прибывает на станцию  $B$  не ранее чем через 5 ч. Если бы его скорость была в 1,5 раза больше, чем на самом деле, то он встретил бы второй поезд раньше, чем через 2 ч после своего выхода из  $A$ . Скорость какого поезда больше?

*Решение.*

Пусть  $V_A, V_B$  — скорости поездов, вышедших из  $A$  и  $B$  соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} V_A \leq \frac{360}{5}, \\ \frac{360}{\frac{3}{2}V_A + V_B} < 2, \end{cases} \text{ откуда } V_A \leq 72 \text{ (км/ч)}$$

и  $V_B > 180 - \frac{3}{2}V_A$ . При максимальной скорости  $V_A = 72$  км/ч имеем

$$V_B - V_A > 0, \text{ откуда } V_B > V_A.$$

*Ответ:* вышедшего из  $B$ .

**13.343.** Есть предположение, что выражение

$$(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$$

является квадратом трехчлена вида  $x^2 + px + qa^2$ . Как можно проверить это утверждение и найти коэффициенты  $p$  и  $q$ ?

*Решение.*

Чтобы проверить данное утверждение, приравняем выражения:

$$(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4 = (x^2 + px + qa^2)^2;$$

раскроем скобки

$$x^4 + 10ax^3 + 35a^2x^2 + 50a^3x + 25a^4 = x^4 + 2px^3 + (2qa^2 + p^2)x^2 + 2pqa^2x + q^2a^4;$$

проверяем, совпадают ли коэффициенты при  $x^4$ ,  $x^3$ ,  $x^2$ ,  $x$  и равны ли свободные члены  $25a^4$  и  $q^2a^4$ . Если утверждение верно, то  $10a = 2p$ , откуда  $p = 5a$ , и  $35a^2 = 2qa^2 + p^2$ , откуда  $q = 5$ . Далее убеждаемся, что при найденных значениях  $p$  и  $q$  верно  $50a^3 = 2pqa^2$  и  $25a^4 = q^2a^4$ .

*Ответ:*  $p = 5a$ ;  $q = 5$ .

**13.344.** Модули двух сил, действующих на материальную точку под прямым углом, и модуль их равнодействующей составляют арифметическую прогрессию. Определить, в каком отношении находятся модули сил.

*Решение.*

По условию  $a^2 + (a+d)^2 = (a+2d)^2$ , т.е.  $3d^2 + 2ad - a^2 = 0$ . Пусть  $d = ak$  ( $k > 0$ ); тогда  $3a^2k^2 + 2a^2k - a^2 = 0$ , откуда  $3k^2 + 2k - 1 = 0$ .

Годится лишь корень  $k = \frac{1}{3}$ .

Находим искомые отношения:

$$\frac{a+d}{a} = 1 + \frac{d}{a} = \frac{4}{3}; \quad \frac{a+2d}{a} = 1 + \frac{2d}{a} = \frac{5}{3}.$$

*Ответ:*  $3 : 4 : 5$ .

**13.345.** Предполагая, что стрелки часов движутся без скачков, установить, через сколько минут после того, как часы показывали 8 ч, минутная стрелка догонит часовую.

*Решение.*

Пусть  $t$  — время, за которое минутная стрелка догонит часовую. Ско-

рость минутной стрелки примем за 1, тогда скорость часовой —  $\frac{1}{12}$ . По

условию  $\frac{1}{12} \cdot t + 40 = 1 \cdot t$ , откуда  $t = \frac{480}{11}$  (мин).

*Ответ:* через  $43\frac{7}{11}$  мин.

**13.346.** Объем вещества  $A$  составляет половину суммы объемов веществ  $B$  и  $C$ , а объем вещества  $B$  составляет  $1/5$  часть суммы объемов веществ  $A$  и  $C$ . Найти отношение объема вещества  $C$  к сумме объемов веществ  $A$  и  $B$ .

*Решение.*

По условию,  $2V_A = V_B + V_C$  и  $5V_B = V_A + V_C$ . Пусть  $V_A = xV_C$

и  $V_B = yV_C$ . Тогда получаем систему  $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ -x + 5y = 1, \end{cases}$  откуда  $x = \frac{2}{3}$ ,  $y = \frac{1}{3}$ .

Следовательно,  $\frac{V_C}{V_A + V_B} = \frac{1}{x + y} = 1$ .

*Ответ:* 1.

**13.347.** Найти два числа по следующим условиям: сумма их равна 1244; если в конце обозначения первого числа приписать цифру 3, а в конце обозначения второго числа отбросить цифру 2, то получатся два равных числа.

*Решение.*

Пусть  $x$ ,  $y$  — искомые числа. По условию имеем систему

$$\begin{cases} x + y = 1244, \\ 10x + 3 = \frac{y - 2}{10}, \end{cases}$$

откуда  $x = 12$ ,  $y = 1232$ .

*Ответ:* 12 и 1232.

**13.348.** От станции  $A$  по направлению к станции  $B$  отошел пассажирский поезд (рис. 13.17). Через  $a$  ч от станции  $B$  по направлению к станции  $A$  отошел поезд «Стрела». Поезда встретились на станции  $C$ .

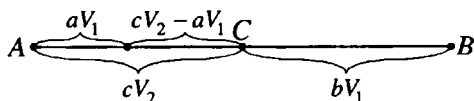


Рис. 13.17

После встречи пассажирский поезд шел  $b$  ч, поезд «Стрела» шел  $c$  ч. Сколько времени потребовалось каждому из этих поездов на весь путь между станциями  $A$  и  $B$ ? Предполагается, что скорость поездов постоянная на всем пути.

*Решение.*

Пусть  $V_1, V_2$  — скорости поезда и «Стрелы» соответственно. По условию  $\frac{cV_2 - aV_1}{V_1} = b \frac{V_1}{V_2}$ , откуда  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bc}}{2c}$ . Тогда поезд дви-

гался от станции  $A$  к  $B$   $a + \left( c \frac{V_2}{V_1} - a \right) + b = \frac{a}{2} + b + \frac{\sqrt{a^2 + 4bc}}{2}$  (ч), а «Стре-

ла» двигалась от станции  $B$  к  $A$   $-c + b \frac{V_1}{V_2} = c - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4bc}}{2}$  (ч).

*Ответ:*  $\frac{a + 2b + \sqrt{a^2 + 4bc}}{2}$  и  $\frac{2c - a + \sqrt{a^2 + 4bc}}{2}$  ч.

**13.349.** От почты  $A$  до поселка  $B$  надо пройти 9 км. Почтальон проходит весь путь туда и обратно, не задерживаясь в поселке, за 3 ч 41 мин. Дорога из  $A$  в  $B$  идет сначала в гору, потом по ровному месту и затем под гору. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту, если в гору почтальон идет со скоростью 4 км/ч, по ровному месту 5 км/ч, а под гору 6 км/ч?

*Решение.*

Пусть  $x, y, z$  — длина дороги в гору, по ровному месту и под гору соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} + \frac{z}{6} + \frac{y}{5} + \frac{x}{4} = 3 \frac{41}{60}, & \text{или} \begin{cases} 25x + 24y + 25z = 221, \\ 25x + 25y + 25z = 225, \end{cases} \\ x + y + z = 9, \end{cases}$$

откуда  $y = 4$  (км).

*Ответ:* 4 км.

**13.350.** Два автомобилиста встретились на полпути между городами  $A$  и  $B$ . При встрече выяснилось, что первый из  $A$  выехал раньше, чем второй из  $B$ , на столько часов, сколько составит половина того времени (также в часах), которое прошло бы до их встречи при одновременном выезде из тех же пунктов, по той же дороге, с теми же скоростями, постоянными на всем пути. Во сколько раз второй автомобилист ехал быстрее первого?



*Решение.*

Пусть  $V_1, V_2$  — скорости автомобилей из городов  $A$  и  $B$  соответственно,  $x$  — расстояние между городами  $A$  и  $B$ . Тогда автомобилист из  $A$  выехал на

$$\frac{x}{2(V_1 + V_2)} \text{ (ч) раньше, чем автомобилист из } B \text{ и проехал } \frac{xV_1}{2(V_1 + V_2)} \text{ (км).}$$

По условию, 
$$\frac{\frac{x}{2} - \frac{xV_1}{2(V_1 + V_2)}}{V_1} = \frac{\frac{x}{2}}{V_2}, \text{ откуда } \frac{V_2}{V_1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

*Ответ:* в  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  раз.

**13.351.** Дорога от почты  $A$  до поселка  $B$  идет сначала в гору на протяжении 2 км, потом по ровному месту 4 км и затем под гору 3 км. Почтальон проходит от  $A$  до  $B$  за 2 ч 16 мин, а обратно — за 2 ч 24 мин. Если бы конечный пункт его пути был расположен по той же дороге, но вдвое ближе к  $A$ , то на весь путь туда и обратно почтальону было бы достаточно 2 ч 19 мин. Сколько километров в час проходит почтальон, когда он идет: а) в гору; б) по ровному месту; в) под гору?

*Решение.*

Пусть  $V_1, V_2, V_3$  — скорости почтальона на участке в гору, по ровному месту, под гору соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} 2V_1 + 4V_2 + 3V_3 = 2 \frac{16}{60}, \\ 3V_1 + 4V_2 + 2V_3 = 2 \frac{24}{60}, \\ 2V_1 + \left(\frac{2+4+3}{2} - 2\right)V_2 + \left(\frac{2+4+3}{2} - 2\right)V_3 = 2 \frac{19}{60}, \end{cases}$$

откуда  $V_1 = 3$  (км/ч),  $V_2 = 4$  (км/ч),  $V_3 = 5$  (км/ч).

*Ответ:* а) 3 км/ч; б) 4 км/ч; в) 5 км/ч.

**13.352.** Навстречу движущемуся трамваю шла девушка — знакомая юноши, сидевшего у окна трамвая. Через 8 с после того, как она поравнялась с окном, юноша вышел из трамвая и пошел следом за ней. Сколько прошло времени с этого момента до того, как он догнал девушку? Скорость юноши в два раза больше скорости девушки и в пять раз меньше скорости трамвая.

*Решение.*

Пусть  $x, 2x, 10x$  — скорости девушки, юноши, трамвая соответ-

ственно. По условию  $8 \cdot x + 8 \cdot 10x + t \cdot x = t \cdot 2x$ , где  $t$  — искомое время. Решив уравнение, находим  $t = 88$  (с).

*Ответ:* 88 с.

**13.353.** При умножении двух положительных чисел, из которых одно на 75 больше другого, по ошибке получилось произведение на 1000 меньше истинного. Вследствие этого, деля (при проверке) ошибочное произведение на меньший из множителей, получили в частном 227 и в остатке 113. Найти оба числа.

*Решение.*

Пусть  $x, y$  — искомые числа,  $z$  — ошибочное произведение чисел  $x$  и  $y$ .

$$\text{По условию имеем систему } \begin{cases} x - y = 75, \\ xy = z + 1000, \\ z = 227y + 113, \end{cases} \text{ откуда } x = 234, y = 159.$$

*Ответ:* 159 и 234.

**13.354.** При умножении двух чисел, из которых одно на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив цифру десятков произведения на 4. При делении полученного произведения на меньший множитель для проверки ответа он получил в частном 39, а в остатке 22. Найти множители.

*Решение.*

Пусть  $x, y$  — множители,  $z$  — ошибочное произведение чисел  $x$  и  $y$ .

$$\text{По условию имеем систему } \begin{cases} x - y = 10, \\ xy = z + 40, \\ z = 39y + 22, \end{cases} \text{ откуда } x = 41, y = 31.$$

*Ответ:* 31 и 41.

**13.355.** Автомобиль, пройдя путь от  $A$  до  $B$ , равный 300 км, повернул назад и через 1 ч 12 мин после выхода из  $B$  увеличил скорость на 16 км/ч. В результате на обратный путь он затратил на 48 мин меньше, чем на путь от  $A$  до  $B$ . Найти первоначальную скорость автомобиля.

*Решение.*

Пусть  $V$  — первоначальная скорость автомобиля. По условию имеем

$$\frac{300}{V} - \left( 1 \frac{12}{60} + \frac{300 - 1 \frac{12}{60} V}{V + 16} \right) = \frac{48}{60}, \text{ откуда } V = 60 \text{ (км/ч).}$$

*Ответ:* 60 км/ч.

**13.356.** Расстояние между пунктами  $A$  и  $B$  равно 308 м. Из пункта  $A$  по направлению к  $B$  движется точка, которая в первую секунду проходит 15 м, а в каждую следующую секунду на 1 м меньше. Из пункта  $B$  в противоположном направлении движется точка, которая в первую секунду проходит 20 м, а в каждую следующую на 3 м больше. На каком расстоянии от пункта  $A$  произойдет встреча, если точка, вышедшая из пункта  $B$ , начала двигаться на 3 с позже точки, вышедшей из пункта  $A$ ?

*Решение.*

Найдем законы движения точек.

$$\text{Для точки из } A: \begin{cases} 15 = 1 \cdot V_1 - \frac{a_1 \cdot 1^2}{2}, \\ 15 + 14 = 2V_1 - \frac{a_1 \cdot 2^2}{2}, \end{cases} \text{ откуда } V_1 = 15,5 \text{ (м/с)},$$

$a_1 = 1 \text{ (м/с}^2\text{)}, \text{ и закон ее движения — } S_A = 15,5t - \frac{t^2}{2}.$

$$\text{Для точки из } B: \begin{cases} 20 = 1 \cdot V_2 + \frac{a_1 \cdot 1^2}{2}, \\ 20 + 23 = 2V_2 + \frac{a_1 \cdot 2^2}{2}, \end{cases} \text{ откуда } V_2 = 18,5 \text{ (м/с)},$$

$a_2 = 3 \text{ (м/с}^2\text{)}, \text{ и закон ее движения — } S_B = 18,5t + \frac{3t^2}{2}.$

Точка из  $A$  за 3 с пройдет  $15,5 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} = 42 \text{ (м)}$  и скорость ее станет

$$V = V_1 - 3a_1 = 12,5 \text{ (м/с)}. \text{ По условию, } 42 + 12,5t - \frac{t^2}{2} + 18,5t + \frac{3t^2}{2} = 308,$$

откуда  $t = 7 \text{ (с)}$ .

Тогда точки встретятся на расстоянии  $42 + 12,5 \cdot 7 - \frac{7^2}{2} = 105 \text{ (м)}$  от пункта  $A$ .

*Ответ:* 105 м.

**13.357.** Велосипедист проехал 96 км на 2 ч быстрее, чем предполагал. При этом за каждый час он проезжал на 1 км больше, чем предполагал проезжать за 1 ч 15 мин. С какой скоростью он ехал?

*Решение.*

Пусть  $V$  — скорость, с которой ехал велосипедист,  $\frac{1 \cdot V - 1}{1 \frac{15}{60}}$  — ско-

рость, с которой велосипедист предполагал ехать. По условию

$$\frac{96}{V} + 2 = \frac{96}{V-1}, \text{ откуда } V = 16 \text{ (км/ч).}$$
$$1 \frac{1}{4}$$

*Ответ:* 16 км/ч.

**13.358.** Найти шестизначное число, начинающееся с цифры 1 и такое, что если переставить эту цифру в конец, то получится число, в три раза больше искомого.

*Решение.*

Первоначальное шестизначное число имеет вид  $1 \cdot 10^5 + x$ . После перенесения цифры 1 на последнее место получим число  $10x + 1$ . По условию,  $10x + 1 = 3(1 \cdot 10^5 + x)$ , откуда  $x = 42857$ .

*Ответ:* 142857.

**13.359.** Найти два двузначных числа, обладающих следующим свойством: если к большему искомому числу приписать справа нуль и за ним меньшее число, а к меньшему числу приписать справа большее число и затем нуль, то из полученных таким образом двух пятизначных чисел первое, будучи разделено на второе, дает в частном 2 и в остатке 590. Кроме того, известно, что сумма, составленная из удвоенного большего искомого числа и утроенного меньшего, равна 72.

*Решение.*

Пусть  $x, y$  — искомые числа. По условию имеем систему

$$\begin{cases} 1000x + y = 2(1000y + 10x) + 590, \\ 2x + 3y = 72, \end{cases} \quad \text{откуда } x = 21, y = 10.$$

*Ответ:* 21 и 10.

**13.360.** Велосипедист отправляется из  $A$  в  $B$ . Расстояние от  $A$  до  $B$  равно 60 км; скорость велосипедиста постоянна. Не задерживаясь в  $B$ , он едет обратно с той же скоростью, но через час после выезда из  $B$  делает остановку на 20 мин. После этого он продолжает путь, увеличив

скорость на 4 км/ч. В каких границах заключена скорость  $V$  велосипедиста, если известно, что на обратный путь от  $B$  до  $A$  он потратил времени не более, чем на путь от  $A$  до  $B$ ?

*Решение.*

Пусть  $V$  — скорость велосипедиста.

По условию,  $\frac{60}{V} \geq 1 + \frac{20}{60} + \frac{60 - 1 \cdot V}{V + 4}$ , откуда  $0 < V \leq 20$  (км/ч).

*Ответ:*  $0 < V \leq 20$  км/ч.

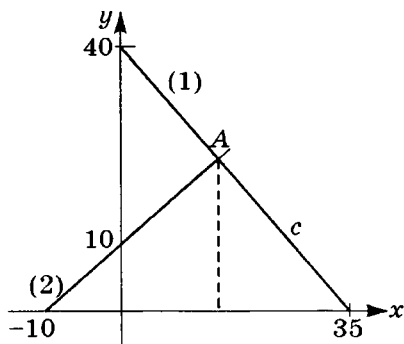


Рис. 13.18

**13.361.** Красный карандаш стоит 27 коп., синий — 23 коп. На покупку карандашей можно затратить не более 9 руб. 40 коп. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество красных и синих карандашей. При этом красных карандашей нужно закупить как можно меньше, но число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более, чем на 10. Сколько красных и сколько синих карандашей следует закупить при указанных условиях?

*Решение.*

Пусть было куплено  $x$  красных и  $y$  синих карандашей. По условию,  $27x + 23y \leq 940$  и  $y - x \leq 10$ . Построим прямые  $27x + 23y = 940$  (1) и  $y - x = 10$  (2). Из рис. 13.18 видно, что эти прямые пересекаются в точке  $A$ , координаты которой удовлетворяют уравнениям (1) и (2), и при этом достигается максимально возможная сумма  $x + y$ . Решив систему (1), (2) и учитывая, что числа  $x$  и  $y$  — натуральные, получаем  $x = 14$ ,  $y = 24$ .

*Ответ:* 14 красных и 24 синих.

**13.362.** Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1:2, а другой содержит те же металлы в отношении 2:3. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

*Решение.*

Пусть взято  $x$  частей первого металла и  $y$  частей второго. Тогда

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y = \frac{17}{44}(x + y), \text{ откуда } \frac{y}{x} = \frac{35}{9}.$$

*Ответ:* 9 и 35 частей.

**13.363.** Некоторый сплав содержит металлы  $A$  и  $B$  в отношении  $m:n$ , другой — те же металлы в отношении  $p:q$ . Какие количества первого и второго сплавов нужно взять, чтобы получить 1 кг третьего сплава с равным содержанием металлов  $A$  и  $B$ ?

*Решение.*

Пусть  $x$  — масса первого сплава, в котором  $\frac{m}{n+m}x$  металла  $A$  и

$\frac{n}{n+m}x$  металла  $B$ ;  $(1-x)$  — масса второго сплава, в котором

$\frac{p}{p+q}(1-x)$  металла  $A$  и  $\frac{q}{p+q}(1-x)$  металла  $B$ .

По условию  $\frac{n}{n+m}x + \frac{p}{p+q}(1-x) = \frac{n}{n+m}x + \frac{q}{p+q}(1-x)$ , откуда  $x = \frac{1}{2} + \frac{mp - nq}{2(np - mq)}$ .

*Ответ:*  $\frac{1}{2} + \frac{mp - nq}{2(np - mq)}$ ;  $\frac{1}{2} - \frac{mp - nq}{2(np - mq)}$ .

**13.364.** Основание степени увеличили в  $k$  раз, а показатель степени уменьшили во столько же раз, в результате чего сама степень не изменилась. Найти основание степени, обладающей таким свойством.

*Решение.*

Пусть  $x, y$  — основание и показатель степени. По условию,

$(kx)^{\frac{y}{k}} = x^y$  или  $(kx)^{\frac{1}{k}} = x$ , откуда  $x = k^{-1}\sqrt[k]{k}$ .

*Ответ:*  $k^{-1}\sqrt[k]{k}$ .

**13.365.** Два судна движутся прямолинейно и равномерно в один и тот же порт. В начальный момент времени положения судов и порта образуют равносторонний треугольник, а после того как второе судно прошло 80 км — прямоугольный треугольник. В момент прибытия первого судна

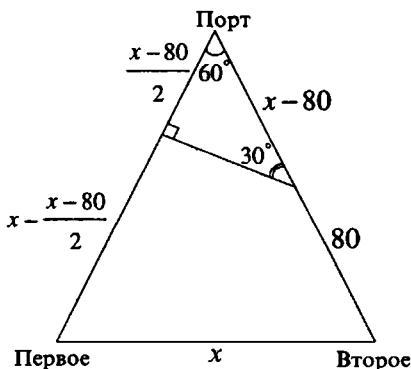


Рис. 13.19

в порт второму остается пройти 120 км. Найти расстояние между судами в начальный момент времени.

*Решение.*

Пусть  $x$  — расстояние между судами в начальный момент времени (рис. 13.19);  $V_1, V_2$  — скорости движения первого и второго судов соответственно. По условию имеем систему

$$\begin{cases} x - \frac{x-80}{2} = \frac{80}{V_2}, \\ \frac{x-80}{2} = \frac{x-80-120}{V_2}. \end{cases}$$

Из каждого уравнения выражаем  $\frac{V_1}{V_2}$ , приравниваем полученные выражения и находим  $x = 240$  (км).

*Ответ:* 240 км.

**13.366.** На реке, скорость течения которой 5 км/ч, в направлении ее течения расположены пристани  $A, B$  и  $C$ , причем  $B$  находится посередине между  $A$  и  $C$ . От пристани  $B$  одновременно отходят плот, который движется по течению к пристани  $C$ , и катер, который идет к пристани  $A$ , причем скорость катера в стоячей воде равна  $V$  км/ч. Дойдя до пристани  $A$ , катер разворачивается и движется по направлению к пристани  $C$ . Найти все те значения  $V$ , при которых катер приходит в  $C$  позже, чем плот.

*Решение.*

Пусть  $x$  — половина расстояния между  $A$  и  $C$ .

По условию  $\frac{x}{V-5} + \frac{2x}{V+5} > \frac{x}{2}$ , откуда  $5 < V < 15$  (км/ч).

*Ответ:*  $5 < V < 15$  км/ч.

**13.367.** Несколько студентов решили купить магнитофон ценой от 170 до 195 долларов. Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 доллар больше. Сколько стоил магнитофон?

*Решение.*

Пусть  $x$  — сумма, которую первоначально должен был внести каждый студент;  $y$  — количество студентов. По условию

$$\begin{cases} 2x = y - 2, \\ xy \geq 170, \\ xy \leq 195, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{y}{2} - 1, \\ y\left(\frac{y}{2} - 1\right) \geq 170, \\ y\left(\frac{y}{2} - 1\right) \leq 195. \end{cases}$$

Решая неравенства, находим  $y = 20$ , тогда  $x = \frac{20}{2} - 1 = 9$  (долларов), и стоимость магнитофона  $xy = 180$  долларов.

*Ответ:* 180 долларов.

**13.368.** Для перевозки груза из одного места в другое было затребовано некоторое количество грузовиков одинаковой вместимости. Ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно были затребованы 4 такие же машины. Масса перевезенного груза была не менее 55 т, но не превосходила 64 т. Сколько тонн груза было перевезено на каждом грузовике?

*Решение.*

Пусть масса перевезенного груза составляет  $x$  т, а число машин равно  $n$ . По условию  $x = \left(\frac{x}{n} - \frac{1}{2}\right)(n + 4)$  или  $n^2 + 4n - 8x = 0$ , откуда

$n = 2(-1 + \sqrt{1 + 2x})$  ( $n$  — натуральное). В промежутке  $55 \leq x \leq 64$  подходит только  $x = 60$ . Тогда  $n = 2(-1 + 11) = 20$ . Итак, было 24 машины, на каждую из которых грузили по

$$\frac{60}{24} = 2,5 \text{ т.}$$

*Ответ:* 2,5 т.

**13.369.** Около дома посажены липы и березы, причем их общее количество более 14. Если количество лип увеличить вдвое, а количество берез на 18, то берез станет больше, чем лип. Если же количество берез увеличить вдвое, не изменяя количества лип, то лип теперь будет больше, чем берез. Сколько лип и сколько берез было посажено?

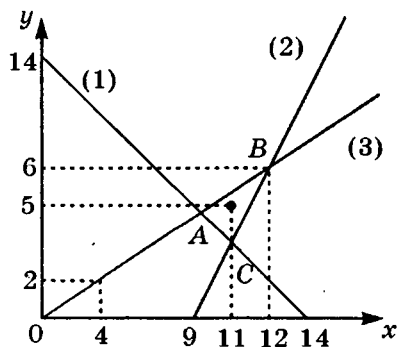


Рис. 13.20



*Решение.*

Пусть  $x, y$  — количество лип и берез соответственно. По условию,

имеем систему неравенств 
$$\begin{cases} x + y > 14, \\ y + 18 > 2x, \\ x > 2y. \end{cases}$$

Построим прямые  $x + y = 14$  (1),  $y + 18 = 2x$  (2),  $x = 2y$  (3). Из рис. 13.20 видно, что точка (11;5) — единственная точка с натуральными координатами, которая лежит внутри треугольника  $ABC$ , т.е. удовлетворяет нашей системе неравенств.

*Ответ:* 11 лип и 5 берез.

**13.370.** Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если же школьнику подарить еще такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

*Решение.*

Пусть  $x$  — количество листов в альбоме,  $y$  — количество марок у школь-

ника. По условию имеем систему 
$$\begin{cases} 20x < y, \\ 23x > y, \\ 21x + y = 500, \end{cases}$$
 откуда находим

$$\frac{500}{44} < x < \frac{500}{41}.$$

*Ответ:* 12.

**13.371.** Сооружается участок железнодорожной насыпи длиной 100 м, поперечным сечением которого является равнобедренная трапеция с нижним основанием 5 м, верхним основанием, не меньшим 2 м, и углом откоса  $45^\circ$ . Какую высоту  $h$  должна иметь эта насыпь, чтобы объем земляных работ составил не менее  $400 \text{ м}^3$  но не более  $500 \text{ м}^3$ ?

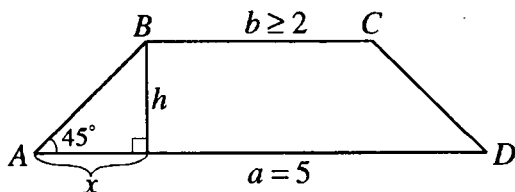


Рис. 13.21

*Решение.*

Из рис. 13.21 имеем  $x = \frac{a-b}{2}$ ;  $h = x \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a-b}{2}$ . Площадь трапеции  $ABCD$   $S = \frac{a+b}{2} h = \frac{a^2 - b^2}{4}$ .

По условию  $400 \leq \frac{a^2 - b^2}{4} \cdot 100 \leq 500$ , откуда  $\sqrt{5} \leq b \leq 3$  (м). Тогда

$$\frac{a-3}{2} \leq h \leq \frac{a-\sqrt{5}}{2} \text{ (м) или } 1 \leq h \leq \frac{5-\sqrt{5}}{2} \text{ (м)}.$$

*Ответ:*  $1 \leq h \leq \frac{5-\sqrt{5}}{2}$  м.

# Содержание

---

|  |      |
|--|------|
| <i>Решения к главе 2. Тожественные преобразования алгебраических выражений</i> . . . . .     | 3    |
| <i>Решения к главе 3. Тожественные преобразования тригонометрических выражений</i> . . . . . | 131  |
| <i>Решения к главе 4. Прогрессии</i> . . . . .   | 289  |
| <i>Решения к главе 6. Алгебраические уравнения</i> . . . . .                                 | 312  |
| <i>Решения к главе 7. Логарифмы. Показательные и логарифмические уравнения</i> . . . . .     | 398  |
| <i>Решения к главе 8. Тригонометрические уравнения</i> . . . . .                             | 468  |
| <i>Решения к главе 9. Неравенства</i> . . . . .  | 629  |
| <i>Решения к главе 10. Задачи по планиметрии</i> . . . . .                                   | 705  |
| <i>Решения к главе 11. Задачи по стереометрии</i> . . . . .                                  | 817  |
| <i>Решения к главе 12. Задачи по геометрии с применением тригонометрии</i> . . . . .         | 891  |
| <i>Решения к главе 13. Применение уравнений к решению задач</i> . . . . .                    | 1153 |

## **АВТОРСКИЙ КОЛЛЕКТИВ**

**Егерев Виктор Константинович**  
**Зайцев Владимир Валентинович**  
**Кордемский Борис Анастасьевич**  
**Маслова Тамара Николаевна**  
**Орловская Ираида Федоровна**  
**Позойский Роман Исаевич**  
**Ряховская Галина Сергеевна**  
**Сканави Марк Иванович**  
**Суходский Андрей Матвеевич**  
**Федорова Нина Михайловна**

## **ТВОРЧЕСКИЙ КОЛЛЕКТИВ**

**Карпук Андрей Андреевич** — профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информации и радиоэлектроники

**Жевняк Ростислав Михайлович** — профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информации и радиоэлектроники

**Ермолицкий Александр Александрович** — кандидат физико-математических наук

*Учебное издание*

**ПОЛНЫЙ  
СБОРНИК РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ  
ПО МАТЕМАТИКЕ**

для поступающих в вузы

**Группа Б**

Под редакцией *М. И. Сканави*

Подписано в печать с готовых диапозитивов заказчика 18.10.2011.  
Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Бумага газетная.  
Усл. печ. л. 77,00. Доп. тираж 3000 экз. Заказ 1048.

Общероссийский классификатор продукции  
ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательство «Мир и Образование».  
115193, Москва, ул. 5-я Кожуховская, д. 13, стр. 1.  
Тел./факс: (495) 742-43-51, 742-43-54.  
E-mail: mir-obrazovanie@onyx.ru

ООО «Издательство Астрель».  
129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а.

Издание осуществлено при техническом содействии

ООО «Издательство АСТ».

Издано при участии ООО «Харвест». ЛИ № 02330/0494377 от 16.03.2009.  
Республика Беларусь, 220013, Минск, ул. Кульман, д. 1, корп. 3, эт. 4, к. 42.  
E-mail редакции: harvest@anitex.by

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».  
ЛП № 02330/0150496 от 11.03.2009.  
Республика Беларусь, 220600, Минск, ул. Красная, 23.